Dr. E. Fašangová
Institut für Analysis , TU Dresden
Analysis
Wintersemester 2016/17

Aufgabenblatt 1: Ordnungsrelation

1.1 Gegeben sind die Teilmengen $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}, M_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 1\}$ der reellen Zahlen. Entscheiden Sie, ob diese Mengen bezüglich der Ordnungsrelation "kleiner oder gleich sein", $\leq$, nach oben beschränkt, nach unten beschränkt, bzw. beschränkt sind oder nicht! Geben Sie jeweils einige obere bzw. untere Schranken an! Geben Sie, falls diese existieren, $\min M_1, \max M_1, \inf M_1, \sup M_1$ und $\min M_2, \max M_2, \inf M_2, \sup M_2$ an!

Gegeben ist die Menge $A = \{4, 11, 12, 27, 31, 44, 121, 213, 400\}$ und wir betrachten auf dieser Menge die Relation $\preceq$ definiert durch

$$11 \preceq 12 \preceq 121 \preceq 213 \preceq 27 \preceq 31 \preceq 4 \preceq 400 \preceq 44$$

("alphabetische" Ordnungsrelation). Erklären Sie, warum $\preceq$ eine Ordnungsrelation auf der Menge A ist! Für die Teilmenge $M = \{121, 212, 44\} \subset A$ begründen Sie, dass $\min_\preceq M, \max_\preceq M, \inf_\preceq M, \sup_\preceq M$ existieren, und geben Sie diese Elemente an!

1.2 Wir betrachten auf der Menge $Q = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$ zwei Relationen $\leq_1, \leq_2$ welche folgendermaßen definiert sind:

$$(a, b) \leq_1 (c, d) \Leftrightarrow (a < c) \vee (a = c \wedge b \leq d),$$
$$(a, b) \leq_2 (c, d) \Leftrightarrow \ (\ (a, b) = (c, d) \vee \ (\ (a, b) \text{ liegt vor } (c, d) \text{ auf der Spirale } \mathcal{S} \text{ liegt })\ ),$$

wobei die Spirale $\mathcal{S}$ im Punkt $(0, 0)$ anfängt und der Reihe nach durch die Punkte $(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1), (2, -1), (2, 0), \ldots$ (fertigen Sie eine Skizze für $\mathcal{S}$ an) geht. Begründen Sie, dass jede dieser Relationen eine Ordnungsrelation auf der Menge Q ist!

Betrachten wir die Teilmengen $M_1 = \{(a, b) \in Q : b = 1, a \in \mathbb{N}\}$ und $M_2 = \{(a, b) \in Q : b \in \mathbb{N}, a = 1\}$ der Menge Q. Untersuchen Sie, ob jede dieser Mengen nach unten bzw. nach oben bezüglich der Ordnungsrelation $\leq_2$ beschränkt ist oder nicht! Geben Sie $\min_{\leq_2} M_1, \max_{\leq_2} M_1, \inf_{\leq_2} M_1, \sup_{\leq_2} M_1$ an, falls diese existieren!

1.3 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, und die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 4\}$. Bestimmen Sie die Menge $f(A)$ und die Zahlen $\min f(A), \max f(A)$, wobei Minimum und Maximum bezüglich der Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ gemeint sind. Bestimmen Sie auch die Mengen $\{z \in \mathbb{R} : f(z) = \min f(A)\}$, $\{z \in \mathbb{R} : f(z) = \max f(A)\}$. Fertigen Sie eine Skizze aus!

1.4 Betrachten wir die Menge $\mathbb{N}$ und die Darstellung der Zahlen im dezimalen Zahlensystem. Auf den Ziffern definieren wir die Relation

$$0 \leq_a 1 \leq_a 2 \leq_a 3 \leq_a 4 \leq_a 5 \leq_a 6 \leq_a 7 \leq_a 8 \leq_a 9$$

und auf $\mathbb{N}$ die damit entstehende "alphabetische" Ordnungsrelation $\leq_a$. Beweisen Sie, dass folgende Aussage falsch ist:

"Für jede $x, y, z \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq_a y \Rightarrow x + z \leq_a y + z$" !

(Wir sagen, dass auf der Menge $\mathbb{N}$ die Relation $\leq_a$ mit der Operation $+$ **nicht verträglich** ist.)

1.5 (Hausaufgabe) Für die Ordnungesrelation $\leq_1$ auf der Menge Q aus Aufgabe 1.2 untersuchen Sie, ob die dort definierten Mengen M_1, M_2 nach unten bzw. nach oben beschränkt sind oder nicht! Falls diese existieren, geben Sie $\min_{\leq_1} M_2$, $\max_{\leq_1} M_2, \inf_{\leq_1} M_2, \sup_{\leq_1} M_2$ an!

1.6 (Hausaufgabe) Bearbeiten Sie die Fragen aus Aufgabe 1.3 für die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$!

1.7 Auf der Menge Q aus Aufgabe 1.2 sei eine dritte Relation $\leq_3$ durch

$$(a, b) \leq_3 (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d \leq b \cdot c$$

gegeben. Beweisen Sie, dass $\leq_3$ eine Ordnungsrelation auf Q ist! Untersuchen Sie die Mengen M_1, M_2 aus Aufgabe 1.2 auf Beschränktheit bezüglich dieser Ordnungsrelation und die Existenz von Minimum, Maximum, Supremum, Infimum!

1.8 Interpretieren Sie die Relation "Vorfahr zu sein" auf einem Familienstammbaum F. Inwieweit sind $\min M$ und $\inf M$ dann für eine Teilmenge $M \subset F$ bezüglich dieser Relation sinnvoll? Skizzieren Sie ein Beispiel.

1.9 Auf der Menge $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ betrachten wir die Relation $R \subset K \times K$, die folgendermaßen definiert ist: für $u_1, u_2 \in K$ gilt $(u_1, u_2) \in R$ genau dann, wenn die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche $f(e_1) = u_1, f(e_2) = u_2$ erfüllt, Determinante größer oder gleich 0 hat. Ist R eine Ordnungsrelation auf K ? Welche Beziehung besteht zu Orientierung ? Wie kann man diese Relation graphisch erklären ?

Aufgabenblatt 2: Topologie

2.1 Die Abbildung $d_e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d_e(x,y) = |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf der Menge $\mathbb{R}$. Geben Sie die Teilmengen

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : d_e(x,2) = 2\}, \qquad M_2 = \{x \in \mathbb{R} : d_e(x,2) < 2\},$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : d_e(x,2) \leq 2\}$$

an und veranschaulichen Sie diese auf dem Zahlenstrahl!

Betrachten wir weiter die Teilmenge $M = (1,2) \subset \mathbb{R}$ (bzw. $M = (1,2], [1,+\infty), (1,+\infty)$). Geben Sie jeweils $\mathbb{R} \setminus M$ an und entscheiden Sie, ob die Menge M offen bzw. abgeschlossen bezüglich der Metrik d_e ist oder nicht!

2.2 Begründen Sie, dass die Abbildung $d_d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d_d(x,y) = 0$ für $x = y$ und $d_d(x,y) = 1$ für $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$, eine Metrik auf der Menge $\mathbb{R}$ ist! Geben Sie die Teilmengen

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : d_d(x,2) = 2\}, \qquad M_2 = \{x \in \mathbb{R} : d_d(x,2) < 2\},$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : d_d(x,2) \leq 2\}$$

an und veranschaulichen Sie diese auf dem Zahlenstrahl! Beweisen Sie, dass die Menge $[1,2] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und gleichzeitig auch offen bezüglich der Metrik d_d ist!

2.3 Sei der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ ausgerüstet. Durch $d_2(u,v) = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$ für $u, v \in \mathbb{R}^2$ ist eine Metrik auf der Menge $\mathbb{R}^2$ definiert. Entscheiden Sie, ob die Teilmengen

$$M_1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : d_2(u, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 2\}, \quad M_2 = \{u \in \mathbb{R}^2 : d_2(u, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) < 2\},$$
$$M_3 = \{u \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \leq 2\}$$

bezüglich d_2 offen bzw. abgeschlossen sind! Veranschaulichen Sie diese Mengen im Euklidischen Koordinatensystem! Geben Sie eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ an, welche weder offen noch abgeschlossen bezüglich d_2 ist und veranschaulichen Sie diese im Euklidischen Koordinatensystem!

2.4 Für die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ sei die Abbildung $d : K \times K \to \mathbb{R}$ durch $d(u,v) = d_2(u,v)$ für $u, v \in K \subset \mathbb{R}^2$ definiert, wobei d_2 die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 2.3 ist. Begründen Sie, dass d eine Metrik auf K ist und geben Sie jeweils eine Teilmenge von K an, welche

a) abgeschlossen und nicht offen, b) offen und nicht abgeschlossen, c) offen und abgeschlossen, d) nicht offen und nicht abgeschlossen ist!

2.5 (Hausaufgabe) Wir betrachten die Abbildung $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $d_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Begründen Sie, dass d_1 eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist und veranschaulichen Sie die Menge $\{u \in \mathbb{R}^2 : d_1(u, 0_{\mathbb{R}^2}) = 1\}$ (die "Einheitskreislinie" bezüglich d_1) im Euklidischen Koordinatensystem!

2.6 (Hausaufgabe) Gegeben sind zwei Geraden in der Ebene mit Normalendarstellung: $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$ und $g_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \frac{1}{2}y = 2\}$. Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y \leq 1\},\ M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \frac{1}{2}y \leq 2\},\ M_1 \cap M_2$$

und untersuchen Sie, ob sie offene beziehungsweise abgeschlossene Teilmengen der Ebene bezüglich der Euklidischen Metrik sind oder nicht!

2.7 Wir betrachten die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik d. Untersuchen Sie, ob folgende Mengen offene beziehungsweise abgeschlossene Teilmengen der Ebene bezüglich der Euklidischen Metrik sind:

$$\begin{aligned} &M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d((x_1, x_2), (2, 2)) \leq 1\}, \\ &M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d((x_1, x_2), (-2, 0)) < 5,3\}, \\ &M_1 \cap M_2, \qquad M_1 \cup M_2, \qquad M_1 \setminus M_2\ . \end{aligned}$$

Geben Sie eine kreisförmige und eine ringförmige Umgebung des Elementes $(0, 1)$ an, beschreiben Sie diese Mengen analytisch und veranschaulichen sie sie im Euklidischen Koordinatensystem!

2.8 Wir betrachten die Menge K mit der Metrik d aus Aufgabe 2.4 und den Element $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in K$. Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} &M_1 = \{x \in K : d(x, P) = 2\}, \quad M_2 = \{x \in K : d(x, P) < 2\}, \\ &M_3 = \{x \in K : d(x, P) \leq 2\}\ ! \end{aligned}$$

Geben Sie eine kreisförmige und eine ringförmige Umgebung von $(0, 1) \in K$ an, beschreiben Sie diese Mengen analytisch und veranschaulichen sie sie im Euklidischen Koordinatensystem!

2.9 Untersuchen Sie, ob die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ bezüglich der Euklidischen Metrik offen bzw. abgeschlossen ist oder nicht! Ist sie offen bzw. abgeschlossen bezüglich der diskreten Metrik auf $\mathbb{R}$?

Aufgabenblatt 3: Reelle Zahlen

3.1 Bestimmen Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R} : |x-4| < 6\}$ und $\{x \in \mathbb{R} : |1-2x| + |x+4| \leq 10\}$ als Vereinigung von Intervallen und veranschaulichen Sie diese Mengen auf dem Zahlenstrahl!

3.2 Beweisen Sie mithilfe der Axiome der reellen Zahlen, dass für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ folgende Aussage wahr ist:

$$(a < b \quad \wedge \quad c < 0) \Rightarrow b \cdot c < a \cdot c$$

($a < b$ ist eine Abkürzung für die Aussage $b + (-a) \in P$).

3.3 Seien $p, q \in \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$(\ x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x^2 + px + q = 0\ ) \ \Leftrightarrow$$
$$\left(0 \leq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \ \wedge \ \left(x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \ \vee \ x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right) \right)$$

3.4 Für $x \in \mathbb{R}$ definiere $|x| = \max\{x, -x\}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq |x|$;

b) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$;

c) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$.

3.5 (Hausaufgabe) Bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |3-x| + |2x+1|\}$ als Vereinigung von Intervallen und veranschaulichen Sie diese Menge auf dem Zahlenstrahl! Entscheiden Sie, ob die Menge offen bzw. abgeschlossen bezüglich der Euklidischen Metrik ist oder nicht! Entscheiden Sie, ob die Menge beschränkt (bezüglich der Euklidischen Metrik) ist oder nicht! Entscheiden Sie, ob die Menge nach unten bzw. nach oben beschränkt bezüglich der Ordungsrelation $\leq$ ist oder nicht!

3.6 (Hausaufgabe) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ definiere $x : y = x \cdot \frac{1}{y}$. Beweisen Sie folgende Aussage mithilfe der Axiome der reellen Zahlen:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \ (\ a \neq 0 \wedge b \neq 0\ ) \ \Rightarrow \ \frac{1}{a : b} = b : a\ .$$

3.7 Gegeben sind folgende Teilmengen der Menge der reellen Zahlen:

$$M_1 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}\ .$$

Untersuchen Sie, ob diese Mengen nach oben beziehungsweise nach unten beschränkt sind und ob sie ein Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum bezüglich $\leq$ auf $\mathbb{R}$ besitzen. Wenn ja, geben Sie diese an!

3.8 Skizzieren Sie folgende Mengen reeller Zahlen auf dem Zahlenstrahl und untersuchen Sie, ob sie offene beziehungsweise abgeschossene Teilmengen der Menge $\mathbb{R}$ bezüglich der Euklidischen Metrik sind:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 1\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x+4| < 5,3\}, \quad M_1 \cap M_2 \ .$$

3.9 Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} : \ (\ b \neq 0 \wedge c \neq 0 \wedge d \neq 0\ ) \ \Rightarrow \ (a:b):(c:d) = (a \cdot d):(b \cdot c)\ .$$

3.10 Beweisen Sie, dass für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ stets $||x|-|y|| \leq |x+y|$ gilt !

3.11 Beweisen Sie, dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \neq 0$ gilt, dass $r \cdot x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabenblatt 4: Wiederholung

4.1 Veranschaulichen Sie die Mengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-4y| < 6\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |1-2x| + |x+y| \leq 10\}$ im Euklidischen Koordinatensystem! Entscheiden Sie, ob diese Mengen bezüglich der Euklidischen Metrik offen bzw. abgeschlossen sind oder nicht und ob sie beschränkt sind oder nicht!

4.2 Wir betrachten auf der Menge $Q = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$ die Relation $\leq_3$ definiert durch

$$(a_1,b_1) \leq_3 (a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 \leq b_1 \cdot a_2 \text{ für } (a_1,b_1),(a_2,b_2) \in Q\ .$$

Beweisen Sie, dass $\leq_3$ transitiv und total, aber nicht antisymmetrisch ist!

(Diese Aufgabe soll als Korrektur der Aufgabe 1.7 gesehen werden. Beachte auch die Aufgabe 4.5.)

4.3 Beweisen Sie, dass für beliebige reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$ folgende Aussagen gelten:

$$|y-2| < \frac{1}{9} \;\Rightarrow\; |y^2-4| < \frac{1}{9} \cdot 5\ ,$$
$$|y-2| < \frac{1}{99} \;\Rightarrow\; |y^2-4| < \frac{1}{99} \cdot 5\ ,$$
$$|y-2| < \frac{1}{999} \;\Rightarrow\; |y^2-4| < \frac{1}{999} \cdot 5\ !$$

4.4 Beweisen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen a_1, a_2 mit $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ folgende Ungleichungen gelten

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}, \qquad \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leq \sqrt{a_1 \cdot a_2}\ !$$

Untersuchen Sie, in welchem Fall Gleichheit in diesen Ungleichungen gilt!

4.5 (Hausaufgabe) Wir betrachten auf der Menge $Q = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$ die Relation $\approx$ definiert durch

$$(a_1,b_1) \approx (a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 \text{ für } (a_1,b_1),(a_2,b_2) \in Q\ .$$

Beweisen Sie, dass $\approx$ transitiv, symmetrisch und reflexiv, aber nicht total ist!

4.6 (Hausaufgabe) Beweisen Sie, dass für beliebige reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$ folgende Aussagen gelten:

$$\begin{aligned} |y-2| < \frac{1}{9} &\;\Rightarrow\; |y^3 - 8| < \frac{1}{9} \cdot 19\ , \\ |y-2| < \frac{1}{99} &\;\Rightarrow\; |y^3 - 8| < \frac{1}{99} \cdot 19\ , \\ |y-2| < \frac{1}{999} &\;\Rightarrow\; |y^3 - 8| < \frac{1}{999} \cdot 19\ ! \end{aligned}$$

Hinweis: Weise nach, dass für beliebige reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$ und benutze diese Formel um den Term $y^3 - 8$ umzuformen.

4.7 Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x + 3$ für $x \in \mathbb{R}$ und die Mengen $[-2, 4]$, $[-1, 11]$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung definiert durch $g(y) = \frac{y-3}{2}$ für $y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

$$\begin{aligned} & x \in [-2, 4] \;\Rightarrow\; f(x) \in [-1, 11]\ , \\ & \forall y \in [-1, 11]\ \exists x \in \mathbb{R} :\ f(x) = y\ , \\ & f(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = g(y)\ , \\ & y \in [-1, 11] \;\Rightarrow\; g(y) \in [-2, 4]\ . \end{aligned}$$

Aus diesen Aussagen folgt: $f([-2, 4]) = [-1, 11]$.

Aufgabenblatt 5: Grenzwert

für die Woche 14.-18. 11. 2016,

Abgabetermin für Hausaufgaben Montag 21.11.2016 vor der Vorlesung

5.1 Beweisen Sie, dass 1 Grenzwert der Folge $f(n) = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist, und dass -1 nicht Grenzwert der Folge $g(n) = \frac{(-1)^n n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, ist!

5.2 Raten Sie zuerst, ob die gegebene Funktion einen Grenzwert $A \in \mathbb{R}$ im Unendlichen besitzt oder nicht und welche Zahl A der Grenzwert sein könnte; beweisen Sie danach Ihre Aussage!

$$f(x) = \frac{x}{x+1},\ x > 0; \qquad g(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}; \qquad h(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

5.3 Beweisen Sie

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4, \quad \lim_{x\to 1} x^3 = 1, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} = 0\,!$$

5.4 Seien $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ jeweils mit der Euklidischen Metrik ausgestattet. Wir betrachten die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) = (x, 2x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $g((x,y)) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass $(1,2)$ Grenzwert von f an der Stelle 1 ist und dass 1 Grenzwert von g an der Stelle $(0,0)$ ist!

5.5 (Hausaufgabe) Raten Sie zuerst, ob die gegebene Funktion einen Grenzwert $A \in \mathbb{R}$ an der gegebenen Stelle bzw. im Unendlichen besitzt oder nicht und welche Zahl A der Grenzwert sein könnte; beweisen Sie danach Ihre Aussage!

$$f(x) = x^3,\ \text{Stelle } 2; \quad g(x) = \frac{1}{x^2},\ \text{im Unendlichen}\ ; \quad h(x) = |x \cdot \sin\frac{1}{x}|,\ \text{Stelle } 0\ .$$

5.6 (Hausaufgabe) Beweisen Sie folgende Aussagen über Grenzwerte von Folgen (reelle Folgen, Folgen in $\mathbb{R}^2$, komplexe Folgen; auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind jeweils die Euklidische Metrik, auf $\mathbb{C}$ die entsprechende Euklidische Metrik aus $\mathbb{R}^2$ zugrunde gelegt)!

$$\lim_n \frac{n^2}{n^2+1} = 1, \quad \lim_n \frac{(-1)^n}{n^3} = 0, \quad \lim_n \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0), \quad \lim_n \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\mathrm{i} = 0\ .$$

5.7 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten in der Euklidischen Ebene die Halbkreislinie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y \leq 1 \wedge x^2 + (y-1)^2 = 1\}$ und die Gerade $g_n \subset \mathbb{R}^2$, welche durch die Punkte $(0, 1)$ und $(n, 0)$ geht. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Gerade g_n an! Berechnen Sie den Durchschnitt der Gerade g_n mit K! Dies besteht aus einem Punkt und wir bezeichnen diesen Punkt mit $Q_n \in \mathbb{R}^2$.

Auf der Menge $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Euklidische Metrik d_e.

Für die Menge $P = \mathbb{N}$ sei die Abbildung $d : P \times P \to \mathbb{R}$ durch $d_P(n, m) = d_e(Q_n, Q_m)$ für $n, m \in \mathbb{N}$ definiert. Begründen Sie, dass d_P eine Mentrik auf der Menge P ist!

Sei ∞ eine Symbol. Wir betrachten die Menge $T = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wir definieren die Abbildung $d_T : T \times T \to \mathbb{R}$ wie folgt: für $n, m \in \mathbb{N}$ setzen wir $d_T(n, m) = d_P(n, m)$, für $n \in \mathbb{N}$ und $m = \infty$ setzen wir $d_T(n, \infty) = d_e(Q_n, Q_+)$, wobei $Q_+ = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ ist, für $n = \infty$ und $m \in \mathbb{N}$ setzen wir $d_T(\infty, m) = d_e(Q_m, Q_+)$ und für $n = \infty, m = \infty$ setzen wir $d_T(\infty, \infty) = 0$. Beweisen Sie, dass d_T eine Metrik auf der Menge T ist! Skizzieren Sie eine kreis- und eine ringförmige Umgebung des Elements $n = 100$ sowie eine ringförmige Umgebung des Elements ∞, wenn die Menge $\mathbb{N}$ auf dem Zahlenstrahl dargestellt ist!

5.8 Beweise Sie

$$\lim_{n} \frac{n}{n^2 + 1} = 0 \quad \text{(Grenzwert einer reellen Folge)},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 \quad \text{(Grenzwert einer Funktion im Unendlichen)},$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3 \quad \text{(Grenzwert einer Funktion an einer Stelle)},$$

$$\lim_{n} \frac{n^2 + 1}{n} = +\infty \quad \text{(Unendlich als Grenzwert einer Folge)},$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{(Unendlich als Grenzwert einer Funktion im Unendlichen)}.$$

5.9 Schreiben Sie die Definition der Abkürzungen $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ auf! Geben Sie jeweils ein Beispiel einer solchen Funktion f an!

5.10 Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt: für $-1 < x \leq 1$ setzen wir $f(x) = |x|$, für $1 < x \leq 3$ setzen wir $f(x) = |x - 2|$, für $-3 < x \leq -1$ setzen wir $f(x) = |x + 2|$, für $3 < x \leq 5$ setzen wir $f(x) = |x - 4|$, für $-5 < x \leq -3$ setzen wir $f(x) = |x + 4|$ (skizzieren Sie den Graph!) und so weiter, das heißt, allgemein setzen wir $f(x) = |x - 2n|$ für $2n-1 < x \leq 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Skizzieren Sie den Graph von f und untersuchen Sie die Existenz des Grenzwertes an der Stelle 1 und im Unendlichen!

Aufgabenblatt 6: Folgen

für die Woche 21.-25. 11. 2016,
Abgabetermin für Hausaufgaben Montag 28.11.2016 vor der Vorlesung

6.1 Untersuchen Sie folgende Folgen von reellen Zahlen auf Monotonie und auf Beschränktheit!

$$a(n) = \frac{1}{n}, \quad b(n) = -n^2, \quad c(n) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad d(n) = -\frac{1}{n^2}, \quad e(n) = \frac{n+1}{n}, \; n \in \mathbb{N}\,.$$

6.2 Untersuchen Sie mit Hilfe der Rechenregeln folgende Folgen auf Konvergenz und geben Sie den Grenzwert an, falls die Folge konvergent ist!

$$a(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad b(n) = 3^n, \quad c(n) = \frac{5n^8 - 7n - 1}{n^8 + n^4 + n^2 + 1},$$
$$d(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad e(n) = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}, \; n \in \mathbb{N}\,.$$

6.3 Veranschaulichen Sie die gegebenen Folgen und erklären Sie Ihre Skizze:

$$a(n) = -n^2, \; b(n) = ((-1)^n, \frac{1}{n}), \; c(n) = \cos\frac{n\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2},$$
$$d(n) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{n}x\}, \; n \in \mathbb{N}\;!$$

6.4 Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge f für jeden gegebenen Wert des Parameters $x \in \mathbb{R}$!

a) $f(n) = \frac{1}{1+x^n}$, $x \geq 0$

b) $f(n) = x^n$, $|x| \leq 1$

c) $f(n) = x^{\frac{1}{n}}$, $x = 5,\; 1,\; \frac{1}{5}$

d) $f(n) = n^x$, $x \in \mathbb{Z}$

6.5 (Hausaufgabe) Untersuchen Sie folgende Folgen von reellen Zahlen auf Monotonie und auf Beschränktheit! Veranschaulichen Sie die ersten 4 Folgenglieder und erklären Sie Ihre Skizze!

$$a(n) = \frac{(-1)^n}{n^2}, \; b(n) = 4n+1, \; c(n) = (\sqrt{2})^n, \; d(n) = \sin(n\pi), \; n \in \mathbb{N}\,.$$

6.6 (Hausaufgabe) Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und geben Sie den Grenzwert an, falls die Folge konvergent ist!

$$a(n) = (\sqrt{2})^n,\ b(n) = \frac{10000n}{n^2+1},\ c(n) = \frac{n^2+3n+2}{n^3+1},\ d(n) = \sqrt{n^2+n} - n,\ n \in \mathbb{N}$$

6.7 Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine reelle Folge, die die gegebenen Eigenschaften hat.

a) Die Folge a ist streng monoton wachsend und $\sup\{a(n) : n \in \mathbb{N}\} = 3$.

b) Die Folge b ist streng monoton fallend und $\inf\{b(n) : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

c) Die Folge c ist so, dass die Menge $\{c(n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

d) Die Folge d ist so, dass die Menge $\{d(n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen ist.

e) Die Folge e ist nicht monoton wachsend, nicht monoton fallend, $\sup\{e(n) : n \in \mathbb{N}\} = 3$ und $\inf\{e(n) : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

6.8 Untersuchen Sie folgende Folgen von komplexen Zahlen auf Konvergenz und veranschaulichen Sie einige Folgenglieder in der Gaußschen Zahlenebene!

$$a(n) = \frac{1}{n} + i,\ b(n) = i^n,\ c(n) = \frac{1}{n} i^n,\ d(n) = \cos(n\pi) + \mathrm{i}\sin(n\pi),\ n \in \mathbb{N}\ !$$

Warum hat es kein Sinn, über Monotonie von komplexen Folgen zu reden? Wie kann man die Beschränktheit interpretieren? Sind diese Folgen beschränkt oder nicht?

Aufgabenblatt 7: Reihen

für die Woche 28.11.- 2.12. 2016,
Abgabetermin für Hausaufgaben Montag 5.12.2016 vor der Vorlesung

7.1 Geben Sie die n-te Partialsumme s_n der Reihe an! Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und geben Sie die Summe der Reihe an, falls die Reihe konvergent ist!

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-5)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ .$$

7.2 Mit Hilfe der Konvergenzkriterien entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit den gegebenen a_n konvergent ist oder nicht!

$$\frac{2^n}{n!}, \quad \frac{3^n}{n^3}, \quad \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n(n+1)}, \quad \frac{n}{2^n}, \quad \sqrt{n}, \quad \frac{n+1}{n!+1} \ .$$

7.3 Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a(k)$ konvergent ist und Summe A hat und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b(k)$ konvergent ist und Summe B hat, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a(k)+b(k))$ konvergent und hat Summe $A+B$.

7.4 Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist oder nicht für jeden gegebenen Wert des Parameters $x \in \mathbb{R}$, wobei

a) $a_k = x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$;

b) $a_k = \frac{x^k}{k}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$;

c) $a_k = \cos kx$, $x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}$;

d) $a_k = (2x)^k$, $x \geq 0$;

e) $a_k = \frac{\sin kx}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, wobei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$;

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, wobei $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

7.5 (Hausaufgabe) a) Geben Sie die n-te Partialsumme s_n der Reihe an! Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und geben Sie die Summe der Reihe an, falls die Reihe konvergent ist!

$$\sum_{k=1}^{\infty} k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\cdot\pi) .$$

b) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent ist und hat Summe A, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(c\cdot f(k))$ auch konvergent und hat Summe $c\cdot A$.

7.6 (Hausaufgabe) Mit Hilfe der Konvergenzkriterien entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit den gegebenen a_n konvergent ist oder nicht!

a) $\frac{n!}{3^n}$, $\frac{5}{n^n}$, $\frac{n}{n+1}$;

b) $a_n = \frac{x^n}{n^2}$ mit Parameter $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq 1$;

c) $a_n = \sin nx$ mit Parameter $x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}$.

7.7 Beweisen Sie, dass folgende Reihen absolut konvergent sind!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Hinweis: Vergleiche mit $\sum \frac{1}{n(n-1)}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, wobei $x \in \mathbb{C}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, wobei $a_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

7.8 Beweisen Sie, dass folgende Reihen absolut konvergent sind!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, wobei $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, wobei $x \in \mathbb{C}$

7.9 Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a(k)$ konvergent ist und hat Produkt (Wert) $A \in \mathbb{R}$ und das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} b(k)$ konvergent ist und hat Produkt (Wert) $B \in \mathbb{R}$, dann ist das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a(k)b(k)$ konvergent und hat Produkt (Wert) $A \cdot B$.

Aufgabenblatt 8: Funktionen

für die Woche 5.12.- 9.12. 2016,
Abgabetermin für Hausaufgaben Montag 12.12.2016 vor der Vorlesung

Wiederholen Sie die nötige Begriffe aus dem linearen Algebra!

8.1 Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir nehmen an, dass $I \subset D_f$ ist. Wir sagen, dass f **monoton wachsend auf I ist**, falls folgende Aussage wahr ist

$$\forall x, y \in I : \; x < y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y) \; .$$

Wir sagen, dass f **streng monoton wachsend auf I ist**, falls folgende Aussage wahr ist

$$\forall x, y \in I : \; x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y) \; .$$

Wir sagen, dass f **monoton fallend auf I ist** (bzw. f **streng monoton fallend auf I ist**), falls folgende Aussage wahr ist

$$\forall x, y \in I : \; x < y \;\Rightarrow\; f(y) \leq f(x) \text{ (bzw. } f(y) < f(x) \text{) } .$$

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf den gegebenen Intervallen auf die obige Eigenschaften:

a) $f(x) = x^2$, $I_1 = [0, +\infty[$ und $I_2 = [-1, 1]$;

b) $f(x) = ax + b$, $I = \mathbb{R}$, in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I_1 =]0, +\infty[$ und $I_2 =]-\infty, 0[$.

8.2 Geben Sie jeweils eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $I \subset D_f$ an, welche folgende Eigenschaften erfüllen:

a) I ist offen und $f(I)$ ist ein Intervall;

b) $f(I)$ ist ein abgeschlossenes Intervall;

c) f ist streng monoton wachsend auf I und $f(I)$ ist kein Intervall;

d) f ist nicht monoton auf I (d.h. weder wachsend noch fallend) und $f(I)$ ist ein Intervall welches weder offen noch abgeschlossen ist.

8.3 Beweisen Sie folgende Aussage!

Satz. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval so, dass $I \subset D_f$, und sei $a \in I$. Nehmen wir an, dass die Funktion f an der Stelle a den reellen Grenzwert A besitzt. Dann gilt für jede Folge $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaften, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $g(n) \in I \setminus \{a\}$ und $\lim_n g(n) = a$ ist, dass $\lim_n f(g(n)) = A$.

Hat die Funktion f gegeben durch $f(x) = 0$ wenn $x = \frac{1}{n}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 1$ sonst einen Grenzwert an der Stelle 0 ? Warum ?

8.4 Sei die Funktion f definiert durch $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für diejenige $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe konvergent ist. Beweisen Sie, dass $D_f = \mathbb{R}$ und dass f streng monoton wachsend auf $[0, +\infty[$ ist!

8.5 (Hausaufgabe) Untersuchen Sie folgende Funktionen f auf den gegebenen Intervallen I auf die Eigenschaften 1) f monoton wachsend/fallend auf I, 2) $f(I)$ ist ein/kein Intevall, 3) $f(I)$ ist nach oben/unten beschränkt, 4) $f(I)$ ist offen/abgeschlossen:

a) $f(x) = -x^2, I_1 =]0, 1[, I_2 =] - 1, 1[$;

b) $f(x) = x^3, I_1 = [-1, 1], I_2 = \mathbb{R}$;

c) $f(x) = 1$ für $x > 0$, $f(x) = -1$ für $x < 0$ und $f(0) = 0$, $I = \mathbb{R}$.

8.6 (Hausaufgabe) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $]1, +\infty[$ streng monoton wachsend ist und die Menge $f(]1, +\infty[)$ nicht nach oben beschränkt ist, dann hat f in $+\infty$ den Grenzwert $+\infty$!

8.7 Die Funktion g mit Vorschrift $g(x) = x^2$ und Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}$ ist gegeben. Geben Sie für jede der folgenden Mengen M das Bild $g(M) = \{y : \exists x \in D_g \cap M \text{ mit } g(x) = y\}$ und das Urbild $g_{-1}(M) = \{x : x \in D_g \text{ und } g(x) \in M\}$ an:

$$] - \infty, 0[, \quad] - 1, 1[, \quad [1, 4], \quad [0, \infty[, \quad \mathbb{R}\ !$$

Skizzieren Sie den Graphen von g und die Mengen $A = (-1, 1) \subset D_g$, $g(A) \subset W_g$, $B = [1, 4] \subset W_g$, $g_{-1}(B) \subset D_g$ im Kartesischen Koordinatensystem!

8.8 Für $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ geben Sie die Kompositionen $h_1 = g \circ f$, $h_2 = f \circ g$, $h_3 = f \circ f$, $h_4 = g \circ g$ an, sowie die Definitionsbereiche dieser Funktionen h_1, h_2, h_3 und h_4 ! Untersuchen Sie, ob eine inverse Funktion zu f bzw. g existiert und wenn ja, geben Sie diese an!

Aufgabenblatt 9: Stetigkeit

für die Woche 12.12.- 16.12. 2016,
Abgabetermin für Hausaufgaben Montag 19.12.2016 vor der Vorlesung

Bereiten Sie sich (wie es **immer** sein soll) zu Hause vor, insbesondere auf die Aufgabe 9.3 d) !

9.1 Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f **stetig an der Stelle** a **ist**, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- $\exists r > 0 :]a - r, a + r[\subset D_f$,
- f besitzt an der Stelle a einen reellen Grenzwert $A \in \mathbb{R}$,
- $f(a) = A$.

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit an den gegebenen Stellen:

a) $f(x) = x^3$ für $x \in \mathbb{R}$, $a = 2$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ für $x \geq 0$, $a = 2$;

c) $f(x) = \alpha x + \beta$ für $x \in \mathbb{R}$, $a = 2$, in Abhängigkeit von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a = 2$.

Skizzieren Sie jeweils einen Graph!

9.2 Untersuchen Sie die Funktion f gegeben durch $f(x) = \lfloor x \rfloor$ für $x \in \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an allen Stellen $a \in \mathbb{R}$. Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor$ diejenige ganze Zahl, welche die Eigenschaft $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ erfüllt (eine solche ganze Zahl existiert und ist eindeutig).

Skizzieren Sie den Graph von f! Stellen Sie die Notation $\lfloor . \rfloor$ im Zusammenhang mit Rundung nach unten bzw. Rundung nach oben auf Einer, Zehner, Hunderter !

9.3 Geben Sie jeweils eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $I \subset D_f$ an, welche folgende Eigenschaften erfüllen!

a) f ist an jeder Stelle $a \in I$ stetig und $f(I)$ ist nicht offen.

b) f ist monoton wachsend auf I, an drei Stellen $a_1, a_2, a_3 \in I$ nicht stetig, aber an den übrigen Stellen $a \in I \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ stetig.

c) f ist nicht stetig an einer Stelle $a_1 \in I$, aber der Grenzwert $\lim_{x \to a_1} f(x)$ existiert und ist eine reelle Zahl. Kann eine solche Funktion monoton sein?

d) Forschen Sie nach (in Internet, in Büchern, bei Bekannten), ob es eine Funktion geben kann, welche stetig an jeder Stelle $a \in I$ ist und $f(I)$ ist weder ein Intervall noch eine einelementige Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zitieren Sie die zugehörige Aussage oder einen Beispiel für eine solche Funktion!

9.4 Beweisen Sie folgende Aussage!

Satz. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in \mathbb{R}$. Wenn f stetig an der Stelle a ist und g stetig an der Stelle a ist, dann ist die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = f(x) + g(x)$ für $x \in D_f \cap D_g$ auch stetig an der Stelle a.

Ist jede Polynomfunktion stetig an jeder Stelle? Warum ?

9.5 (Hausaufgabe) Berechnen Sie (mit Begründungen!) die Werte und die Grenzwerte folgenden Funktionen an der gegebenen Stelle:

$$f(x) = x^2,\ a = 2; \quad f(x) = \sqrt{x},\ a = 2; \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}, a = 2;$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2},\ a = 2, \quad f(x) = |x|,\ a = -2\ .$$

9.6 (Hausaufgabe) Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $]1, 2[$ monoton wachsend ist und an der Stelle 2 stetig ist, dann ist sie monoton wachsend auf dem Intervall $]1, 2]$.

9.7 Mit Hilfe von Literatur schreiben Sie den Beweis folgender Aussage auf! "Die Funktion f definiert durch $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$ ist an der Stelle $a = 0$ stetig."

9.8 Geben Sie jeweils eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $I \subset D_f$ an, welche folgende Eigenschaften erfüllen!

a) f ist an jeder Stelle $a \in I$ stetig und $f(I)$ hat kein Maximum;

b) f ist an jeder Stelle $a \in I$ stetig und $f(I)$ hat kein Supremum;

c) I ist abgeschlossen und beschränkt und $f(I)$ hat kein Maximum;

d) I ist abgeschlossen, f ist stetig an jeder Stelle $a \in I$ und $f(I)$ hat kein Maximum;

e) I ist beschränkt, f ist stetig an jeder Stelle $a \in I$ und $f(I)$ hat kein Maximum.

Aufgabenblatt 10: Differentiation

für die Woche 19.12.- 21.12. 2016,

Abgabetermin für Hausaufgaben Montag 9.1.2017 vor der Vorlesung

10.1 Untersuchen Sie, ob der reelle Grenzwert

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

existiert oder nicht und bestimmen Sie diesen, falls er existiert, für die folgende Funktionen f:

a) $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ und $f(3) = 5$ (Hinweis: Aufgabe 8.3);

c) $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ und $f(5) = 2$;

d) $f(x) = x^2$ für $x = 3$ und $f(x) = -1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ (Hinweis. Aufgabe 8.3);

e) $f(x) = x^2 + b$ für $x \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von dem Parameter $b \in \mathbb{R}$;

f) $f(x) = a \cdot x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

10.2 Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \text{ für } n=2, n=3$$

(Hinweis: benutzt wird $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1$, beweise dies aus der Definition.)

10.3 Berechnen Sie die Grenzwerte in Abhängigkeit von den gegebenen Parametern!

a) $\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Hinweis: formuliere den Satz für Grenzwerte von Quotienten von Funktionen),

b) $\lim_{x\to y} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{x-y}$ für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Hinweis: wie in a)),

c) $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ für $y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$,

d) $\lim_{x\to y} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei die Funktion f durch $f(x) = ax + b$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist und $a, b \in \mathbb{R}$ sind Parametern.

10.4 Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Begründen Sie, dass für jede $y \in \mathbb{R}$ der reelle Grenzwert $\lim_{x \to y} \frac{p(x)-p(y)}{x-y}$ existiert! Betrachten wir die Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $q(y) = \lim_{x \to y} \frac{p(x)-p(y)}{x-y}$ für $y \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass q auch eine Polynomfunktion ist!

Für p gegeben durch $p(x) = 2x^2 - 3x - 5$ für $x \in \mathbb{R}$ berechnen Sie q und skizzieren Sie die Graphen von p sowie von q in einem gemeinsamen Kartesischen Koordinatensystem!

10.5 (Hausaufgabe) Untersuchen Sie, ob ein reeller Grenzwert

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

existiert und bestimmen Sie diesen für die folgende Funktionen f:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$;

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x < 0$ und $f(x) = 2$ für $x > 0$;

d) $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Q}$ (Hinweis: Aufgabe 8.3).

10.6 (Hausaufgabe) Erhalten sind die Zahlen $x_1 = 4 < x_2 = 7 < x_3 = 17$ aus einer statistischen Untersuchung. Wir betrachten die drei Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_i(x) = |x - x_i|$ für $x \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ bzw. 3. Skizzieren Sie die Funktionen f_1, f_2, f_3! Berechnen Sie $f(x) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x)$ für $x < x_1$, für $x > x_3$, für $x \in]x_1, x_2]$ und für $x \in]x_2, x_3]$! Skizzieren Sie den Graph der Funktion f ! Schlussfolgern Sie, dass $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ existiert und geben Sie diese Zahl an! (Diese Zahl heißt **Median** der statistischen Daten.)

Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert ein reeller Grenzwert $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ und für welche nicht!

10.7 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ so, dass $a \in D_f$ ist und dass der reelle Grenzwert $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert, nennen wir diesen Grenzwert A und nennen wir B den Wert der Funktion f an der Stelle a. Betrachten wir die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = A \cdot x + B$ für $x \in \mathbb{R}$. Sei d die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{x \to a} \frac{d(f(x), g(x))}{d(x, a)} = 0 \ !$$

Aufgabenblatt 11: Wiederholung

für die Woche 9.1.- 13.1. 2017,
Abgabetermin für Hausaufgaben Montag 16.1.2017 vor der Vorlesung

11.1 Beweisen Sie, dass die Dezimahlzahl $0,123123...$ (die Ziffern $1,2,3$ wiederholen sich periodisch) eine rationale Zahl ist! (Hinweis: schreiben Sie die entsprechende Reihe auf und berechnen Sie ihre Summe, welche man in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ schreiben soll.) Überlegen Sie sich, dass jede periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl representiert! Formulieren Sie eine umgekehrte Aussage und forschen sie nach, ob diese wahr oder falsch ist!

11.2 Skizzieren Sie jeweils den Graph der gegebenen Funktion f und entscheiden Sie, ob diese Funktion an der Stelle 0 stetig ist oder nicht!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x > 0 \\ -x \text{ für } x \leq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

11.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $]a-r, a[\cup]a, a+r[\subset D_f$ ($a, r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$) und $A, B \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass A **der Grenzwert von f an der Stelle a von links** ist, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ x \in]a-\delta, a[\ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \ .$$

Bezeichnung $A = \lim_{x \to a-} f(x)$. Wir sagen, dass B **der Grenzwert von f an der Stelle a von rechts** ist, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ x \in]a, a+\delta[\ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \ .$$

Bezeichnung $B = \lim_{x \to a+} f(x)$.

Beweisen Sie folgende Aussage: "Ein reeller Grenzwert der Funktion f an der Stelle a existiert genau dann, wenn die beide reelle Grenzwerte $\lim_{x \to a-} f(x)$ und $\lim_{x \to a+} f(x)$ existieren und gleich sind."

Wie kann man diese Aussage auf den Fall $+\infty$ bzw. $-\infty$ als Grenzwert verallgemeinern? Begründen Sie die Antworte in der Aufgabe 11.3!

11.4 Seien $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei die Sinus- und Kosinusfunktionen wie in der Vorlesung definiert sind. Berechnen Sie $f(0), g(0), f'(0)$ und $g'(0)$! Begründen Sie, dass f und g an der Stelle 0 stetig sind!

11.5 (Hausaufgabe) Entscheiden Sie, ob die gegebene Funktion f an der Stelle 0 stetig ist oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort!

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ für } x > 0 \\ -x^2 + 1 \text{ für } x \leq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} |x \cdot \sin \frac{1}{x}| \text{ für } x \neq 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

Fertigen Sie jeweils eine Skizze von den Graphen von f an!

11.6 (Hausaufgabe) Entscheiden Sie, ob die gegebene Funktion f an der Stelle 1 differenzierbar ist oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort!

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1 \text{ für } x \geq 1 \\ 1 \text{ für } x < 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ für } x > 1 \\ 3x \text{ für } x \leq 1 \end{cases}$$

Fertigen Sie jeweils eine Skizze von den Graphen von f an!

11.7 Für die Funktionen aus der Aufgabe 11.2 berechnen Sie noch zusätzlich $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ und $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, falls diese Grenzwerte existieren! Schlussfolgern Sie daraus, ob die Funktion f an der Stelle 0 differenzierbar ist oder nicht!

11.8 Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$, auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit! Skizzieren Sie den Graph von f !

11.9 Recherchieren Sie nach der **Bolzanofunktion**. Welche Zusammenhänge hat sie mit der Vorlesung ?

11.10 Beweisen Sie, dass für beliebige $t \in \mathbb{R}$ die Zahl $k(t) = \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}t) + \exp(-\mathrm{i}t))$ eine reelle Zahl ist! Damit ist eine reelle Funktion $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D_k = \mathbb{R}$ definiert. Berechnen Sie $k(0)$! Beweisen Sie, dass k beschränkt ist (d.h., die Menge $\{k(t) : t \in D_k\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist) !

11.11 Beweisen Sie, dass die Funktion f definiert durch $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$ und durch $f(0) = 0$ an der Stelle 0 differenzierbar ist und ihre Ableitung ist $f'(0) = 0$!

Aufgabenblatt 12: Differentiation und Integration

für die Woche 16.1.- 20.1. 2017,
Abgabetermin für Hausaufgaben **am Ende der Übung**

Vorbereitung vor der Übung:

- wiederholen Sie die Rechenregeln der Differentialrechnung aus der Schule,
- besorgen Sie sich eine Formelsammlung bzw. Tabellen,
- besorgen Sie sich eine Aufgabensammlung der höheren Mathematik und schreiben Sie 20 Funktionen, welche man ableiten soll und 20 Funktionen, welche man integrieren soll, auf. Zu den Aufgaben, welche Sie lösen können, schreiben Sie die Lösungen hin und geben Sie diese zwei Listen nach der Übung ab!

12.1 Mit Hilfe der Rechenregeln und Tabellen bzw. Formelsammlung bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \text{ für } x > 0; \qquad f(x) = (x^2 - x + 1)\sin(x) \text{ für } x \in \mathbb{R};$$
$$f(x) = \tan(x) \text{ für } x \in (0, \frac{\pi}{2}); \qquad f(x) = \sin(x^3) \text{ für } x \in \mathbb{R};$$
$$f(x) = \sin(\frac{1}{x}) \text{ für } x > 0; \qquad f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ für } x > 0;$$
$$f(x) = x \cdot \exp(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}; \qquad f(x) = x \cdot \ln(x) \text{ für } x > 0.$$

12.2 Prüfen Sie nach, dass die Funktion F eine Stammfunktion zu f auf der gegebenen Intervall I ist (hier sind $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gegeben) !

a) $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $f(x) = x^n$, $I = (0, +\infty)$;

b) $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $f(x) = x^n$, $(-\infty, 0)$;

c) $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + 7$, $f(x) = x^n$, $I = (0, +\infty)$;

d) $F(x) = \ln(-x)$, $f(x) = x^{-1}$; $I = (-\infty, 0)$;

e) $F(x) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, $f(x) = x^\alpha$, $I = (0, +\infty)$;

f) $F(x) = (\sin(x))^2$, $f(x) = \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$.

12.3 Mit Hilfe der Rechenregeln und Tabellen bzw. Formelsammlung bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen auf den gegebenen Intervallen:

$$\begin{aligned} f(x) = x^{-2},\ x \in (0, +\infty), \qquad & f(x) = \frac{1}{x+2},\ x \in (-2, +\infty), \\ f(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}, \qquad & f(x) = \sqrt[3]{x},\ x \in (0, \infty), \\ f(x) = 2x\exp(x^2),\ x \in \mathbb{R}, \qquad & f(x) = \sin(x)\cos(x),\ x \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

12.4 Zu den folgenden Funktionen geben Sie die Ableitung sowie eine Stammfunktion auf einem passenden Intervall an ($n \in \mathbb{N}$ ist gegeben):

$$x^n, \qquad \frac{1}{x^3}, \qquad \tan(x), \qquad 2x\exp(x), \qquad \frac{1}{1+x^2}, \qquad \sqrt[3]{x}\ .$$

12.5 (Hausaufgabe) Fertigen Sie eine Liste von 20 Funktionen an, welche man differenzieren soll und zu diejenigen, welche Sie schon lösen können, schreiben Sie auch die Lösungen dazu !

12.6 (Hausaufgabe) Fertigen Sie eine Liste von 20 Funktionen an, welche man integrieren soll und zu diejenigen, welche Sie schon lösen können, schreiben Sie auch die Lösungen dazu !

12.7 Differenzieren und integrieren Sie folgende Funktionen:

$$\frac{x^4}{x^2-1}, \qquad -2x^2+3x+1\ .$$

Aufgabenblatt 13: Anwendungen der Differentialrechnung

für die Woche 23.1.- 27.1. 2017,
Abgabetermin für Hausaufgaben Montag 30.1.2017 vor der Vorlesung

13.1 Mit dem Vorschrift

$$\frac{x^4}{x^2-1}$$

ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich, untersuchen Sie die Funktion auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitung! Mit der Hilfe der Ableitung bestimmen Sie die Intervalle, auf denen die Funktion monoton wachsend bzw. fallend ist! Entscheiden Sie, ob die Funktion nach oben bzw. nach unten beschränkt ist! Bestimmen Sie die Maximal- bzw. Minimalstellen sowie den Maximal- bzw. Minimalwert der Funktion f, falls diese existieren! Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion in den "Randpunkten" des Definitionsbereiches! Skizzieren Sie den Graph!

13.2 Prüfen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung nach, dass für gegebene statistische Daten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|^2$, $x \in \mathbb{R}$, genau eine Minimalstelle hat und dass diese durch $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (der **arithmetische Mittel**) gegeben ist!

13.3 Formulieren Sie folgende Aufgaben als Extremalwertaufgabe für geeignete Funktionen:

a) Unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

b) Unter allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

13.4 Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu f definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ auf dem Intervall $]1, +\infty[$ und berechnen Sie

$$\lim_{x \to 1+} F(x) - \lim_{x \to +\infty} F(x) \ !$$

Die Interpretation von diesem Term ist ein Flächeninhalt; skizzieren Sie die entsprechende Fläche! Vergleichen Sie dieses Resultat mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$!

13.5 (Hausaufgabe) Bearbeiten Sie die Funktion $-2x^2 + 3x + 1$ wie in der Aufgabe 13.1 !

13.6 (Hausaufgabe) Bearbeiten Sie die Funktion $-2x^2 + 3x + 1$ für das Intervall $I =]0, 3[$ wie in der Aufgabe 13.4 !

13.7 Orthogonale Projektion Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt. Gegeben sei der Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und die Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass es genau einen Punkt Q auf der Gerade g gibt, welcher den kleinsten Abstand (in der Euklidischer Metrik) zu P hat, und geben Sie diesen an! Prüfen Sie nach, dass dieser Punkt Q mit der orthogonalen Projektion von P auf g übereinstimmt!

Gegeben ist der Punkt $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ und die Gerade $g = \{(1, 0) + t(-1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$. Begründen Sie, dass unendlich viele Punkte auf der Gerade g liegen, welche zu den Punkt O einen minimalen Abstand bezüglich der Metrik d_1 aus der Aufgabe 2.5 haben! Hinweis: Die Funktion f definiert durch $f(t) = |1 - t| + |t|$ für $t \in \mathbb{R}$ ist zu minimieren; dies ist auch ohne Anwendung der Differentialrechnung möglich.

13.8 Lineare Regression Gegeben sind n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene. Im Folgenden werden zwei Aufgaben (a) und b)) formuliert. Zeigen Sie, dass die Lösung der Aufgabe a) die Lösung der Aufgabe b) liefert und umgekehrt!

a) Die Gerade g der Form $g = \{(x, ax + b) : x \in \mathbb{R}\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist zu finden, für welche die Summe der Quadrate der Abständen von P_i zu g minimal ist (Abstand ist in der Euklidischer Metrik gemessen).

b) Minimalstelle einer bestimmten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zu finden.

Geben Sie diese Funktion f an! Fertigen Sie eine erklärende Skizze an auf der die Punkte P_i, eine Gerade g und die Abstände zwischen P_i und g zu sehen sind!

Wie könnte man die Aufgabe b) lösen ?

13.9 Seien die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ aus einer Messung entstanden. Bezeichnen wir $x_1 = \ldots$ und definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sum_{i=1}^{n} d_d(x, x_i)$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei d_d die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, wobei Minimum und Maximum bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ zu verstehen ist! Bestimmen Sie diejenige Daten m aus der Messung, für welche $f(m) = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ ist! (Diese Zahl heißt **Modus** der Daten der Messung.)

Aufgabenblatt 14: Beispielklausur

für die Woche 30.1.- 3.2.2017

<u>Theorie</u>:

1. Geben Sie die Definition einer Metrik auf einer Menge an und nennen Sie zwei Beispiele!

1P.

2. Schreiben Sie den Satz über den Grenzwert der Summe von reellen Folgen auf!

1P.

3. Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn die Funktion f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist f an der Stelle a stetig.

2P.

<u>Praxis</u>:

4. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ auf Konvergenz!

1P.

5. Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{wenn } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{wenn } x > 1\ . \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit an der Stelle 1 !

1P.

6. Die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$, ist gegeben. Untersuchen Sie die Funktion auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie ihre Ableitung! Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen die Funktion monoton wachsend bzw. fallend ist! Entscheiden Sie, ob die Funktion nach oben bzw. nach unten beschränkt ist! Bestimmen Sie die Maximal- bzw. Minimalstellen sowie den Maximal- bzw. Minimalwert der Funktion f, falls diese existieren! Skizzieren Sie den Graph!

2P.

7. (Zusatzaufgabe)

Gegeben sei der Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und die Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass es genau einen Punkt Q auf der Gerade g gibt, welcher den kleinsten Abstand (in der Euklidischen Metrik) zu P hat, und geben Sie diesen an!

Gegeben ist der Punkt $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ und die Gerade $g = \{(1,0) + t(-1,1) : t \in \mathbb{R}\}$. Begründen Sie, dass es unendlich viele Punkte auf der Gerade g liegen, welche zu den Punkt O einen minimalen Abstand bezüglich der Metrik d_1 haben, wobei

$$d_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \; .$$

2P.