# Analysis

E.Fašangová, 2016/17, TU Dresden

July 12, 2017

## Contents

# 1 Literatur


- R. Lasser, F. Hofmaier: Analysis 1+2, Springer Verlag, 2012
- K. Tretter: Analysis I, Analysis II, Birkhäuser, 2013
- K. Königsberger: Analysis 1, Springer Verlag, 1999 (4. Auflage)
- W. Luh, M. Wießner: Aufgabensammlung Analysis, Aula-Verlag, 1991
- W. Walter: Analysis 1, Analysis 2, Springer Verlag, 1995 (4. Auflage)
- W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer Verlag, 1996 (6. Auflage)
- O. Forster: Analysis 1, Vieweg Verlag, 2011 (10. Auflage)
- H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Band 1, Teubner Verlag, 1980
- O. Forster, Th. Szymczak: Übungsbuch zur Analysis 2 - Aufgaben und Lösungen 2013 (8. Auflage)
- V. P. Minorskij: Aufgabensammlung der höheren Mathematik / mit 2670 Aufgaben mit Lösungen 2008 (15. Auflage, aus Russischen übersetzt)
- E. Fašangová: Grundlagen der linearen Algebra und analytischen Geometrie, Vorlesung und Skript TU Dresden 2013/2014
- E.A. Pforr, W. Schirotzek: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen, 1973 (MINÖL - Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte - Band 2)
- I.M. Gelfand, E.G.Glagolewa, E.Schnol: Funktionen und ihre graphische Darstellungen, 1974 (Mathematische Schülerbücherei)
- H. Kütting: Einführung in Grundbegriffe der Analysis, Band 1,2, 1973 (Studienbücher Mathematik)

**1. Vorlesung, Montag den 10.10.2016**

# 2 Motivation

Viele Größen in der Natur und Gesellschaft lassen sich mit Zahlen angeben, viele Strukturen kann man mit Vektorräumen modellieren und viele Abhängigkeiten kann man mit linearen Abbildungen beschreiben. Aber eben nicht alle. Zum Beispiel, zur Berechnung des Flächeninhalts einer Kreisscheibe muss man Approximationen durch Zahlen benutzen, die Erdoberfläche ist kein Vektorraum und beim freien Fall häng der Weg nicht linear von der Zeit ab.

Unser Ziel in dieser Vorlesung ist es, auch solche Objekte modellieren zu können (Grenzwert, Approximation). Außerdem erlernen wir kräftige Methoden (Differential- und Integralrechnung), wie man mit diesen Objekten arbeiten kann.

# 3 Ordnungsrelation, Supremum, Infimum

Wiederholung (Lineare Algebra):

**Definition** Sei $P$ eine Menge und $R$ eine Relation zwischen $P$ und $P$, d.h. $R \subset P \times P$. Die Relation $R$ heißt **Ordnungsrelation auf** $P$, wenn folgende Eigenschaften gelten:

i) $\forall x \in P$: $(x,x) \in R$ (**reflexiv**);

ii) $\forall x,y \in P$: $((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow x = y$ (**antisymmetrisch**);

iii) $\forall x,y,z \in P$: $((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow ((x,z) \in R)$ (**transitiv**);

(iv) $\forall x,y \in P$: $(x,y) \in R \vee (y,x) \in R$ (**total**).

Beispiele: $\mathbb{R}$ mit $\leq$, Wörterbuch mit alphabetischer Ordnung
Bemerkung: Oft wird statt $(x,y) \in R$ die Notation $x \preccurlyeq y$ benutzt.

**Definition** Sei $P$ eine Menge, $\preccurlyeq$ eine Ordnungsrelation auf $P$, $M \subset P$ und $m \in P$. $m$ heißt **obere Schranke für** $M$ **(in** $P$ **bezüglich** $\preccurlyeq$**)** , wenn

$$\forall x \in M : x \preccurlyeq m \ .$$

Die Menge $M$ heißt **nach oben beschränkt (ordnungsbeschränkt, bzgl. $\preccurlyeq$ auf $P$)**, wenn sie mindestens eine obere Schranke besitzt. $m$ heißt **größtes Element von $M$ (bezüglich $\preccurlyeq$)** , wenn

$$m \in M \ \wedge \ ( \ \forall x \in M : x \preccurlyeq m \ ) \ .$$

**Satz** Eine Menge $M \subset P$ hat bezüglich einer Ordnungsrelation $\preccurlyeq$ auf $P$ entweder kein größtes Element oder genau ein größtes Element.

Beweis. Wenn $p_1$ und $p_2$ beide größte Elemente von $M$ wären, dann ist insbesondere $p_1 \in M$ und $p_2 \in M$. Weil $p_1$ größtes Element von $M$ ist, und $p_2 \in M$, gilt (insbesondere) $p_2 \preccurlyeq p_1$. Weil $p_2$ größtes Element von $M$ ist, und $p_1 \in M$, gilt $p_1 \preccurlyeq p_2$. Wegen der Antisymmetrie der Relation $\preccurlyeq$ muss $p_1 = p_2$ gelten. Also können keine zwei verschiedenen größten Elemente der Menge $M$ existieren. $\square$

Notation: Wir bezeichnen das größte Element von $M \subset P$ (bzgl. $\preccurlyeq$), falls es existiert, durch $\max_{\preccurlyeq} M$ und nennen es **Maximum von $M$ (bzgl. $\preccurlyeq$)**. (Beachte, dass $\max_{\preccurlyeq} M \in P$ ist.)

Bemerkungen:

- Analog kann man **untere Schranken**, **nach unten beschränkte Menge** und **kleinstes Element** definieren. Das kleinste Element von $M$ wird durch $\min M$ bezeichnet und **Minimum** genannt.
- Wenn $M$ endlich viele Elemente besitzt, hat es Sinn, das **mittlere Element** zu definieren (eins, wenn $M$ eine ungerade Anzahl von Elementen hat; zwei, wenn sie eine gerade Anzahl von Elementen hat). Dieses heißt in der Statistik **Median**.

**Definition** Sei $P$ eine Menge, $\preccurlyeq$ eine Ordnungsrelation auf $P$, $M \subset P$, $M$ nicht leer und $s \in P$. $s$ heißt **obere Grenze von $M$ (in $P$ bezüglich $\preccurlyeq$)** , wenn $s$ eine obere Schranke für $M$ ist und gleichzeitig $s$ das kleinste Element von der Menge $S = \{m \in P : m \text{ ist obere Schranke von } M \ \}$ ist.

**Satz** Eine Menge hat bezüglich einer Ordnungsrelation entweder keine obere Grenze oder genau eine obere Grenze.

Beweis. Wenn $s_1$ und $s_2$ beide obere Grenzen für $M$ wären, dann ist insbesondere $s_1$ eine obere Schranke für $M$ und $s_2$ auch eine obere Schranke für $M$. Außerdem ist $s_1$ und auch $s_2$ kleinstes Element der Menge $S$. Nach dem vorherigen Satz muss $s_1 = s_2$ sein. Also können keine zwei verschiedenen oberen Grenzen der Menge $M$ existieren. $\square$

Bemerkung und Notation:

- Analog kann man **untere Grenze** definieren.
- Die obere Grenze von $M$, falls sie existiert, nennen wir **Supremum** und bezeichnen sie mit $\sup M$, die untere Grenze **Infimum**, $\inf M$.

**Satz** Wenn eine Menge $M \subset P$ bzgl. einer Ordnungsrelation $\preccurlyeq$ auf $P$ ein größtes Element $p$ besitzt, dann besitzt sie auch eine obere Grenze, nämlich $\sup M = p = \max M$ .

Beweis. Da $p = \max M$ gilt, ist insbesondere $p$ eine obere Schranke für $M$ und $p \in M$. Sei $m$ eine obere Schranke für $M$. Weil $p \in M$ ist, gilt $p \preccurlyeq m$. Also ist $p$ das kleinste Element der Menge aller oberen Schranken von $M$. Das bedeutet, dass $p$ die obere Grenze für $M$ ist. $\square$

**Definition** Betrachte $\mathbb{R}$ mit der Ordnungsrelation $\leq$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ werden wir folgende Mengen **Intervalle** nennen und angegebene Notation benutzen:

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \wedge x \leq b\} = [a, b],\\
&\{x \in \mathbb{R} : a < x \wedge x < b\} = (a, b) = ]a, b[,\\
&\{x \in \mathbb{R} : a < x \wedge x \leq b\} = (a, b] = ]a, b],\\
&\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \wedge x < b\} = [a, b) = [a, b[,\\
&\{x \in \mathbb{R} : a < x\} = (a, +\infty) = ]a, +\infty[,\\
&\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} = [a, +\infty) = [a, +\infty[,\\
&\{x \in \mathbb{R} : x < a\} = (-\infty, a) = ] - \infty, a[ \text{ und}\\
&\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} = (-\infty, a] = ] - \infty, a] \ .
\end{aligned}$$

Beachte, dass die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ noch nicht definiert sind!

Übung: Untersuche diese Mengen auf Existenz von Minimum, Maximum, Supremum und Infimum, auf Beschränktheit nach oben/unten bzw. unbeschränktheit. Untersuche die Menge $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ bezüglich $\leq$ auf $\mathbb{R}$ auf diese Eigenschaften.

**Ende 1. Vorlesung**

**2. Vorlesung, Freitag den 14.10.2016**

# 4 Metrik, Umgebungen, Topologie

Unser Ziel soll nun sein einem Element "nah zu sein". Dazu wollen wir Entfernungen modellieren.

Wiederholung (Geometrie): Metrik auf einer Menge, Beispiel ist der Euklidische Abstand auf $\mathbb{R}^n$.

**Definition** Sei $M$ eine nichtleere Menge und $d : M \times M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. $d$ heißt **Metrik auf** $M$, falls folgende Eigenschaften gelten:

i) $\forall x \in M : d(x, x) = 0$ und

ii) $\forall x, y \in M : \; x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$ (**positive Definitheit**),

iii) $\forall x, y \in M : \; d(x, y) = d(y, x)$ (**Symmetrie**),

iv) $\forall x, y, z \in M : \; d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (**Dreiecksungleichung**).

Beispiele:

- Eisenbahnnetz
- diskrete Metrik (siehe Geometrie)
- Sei $P = \mathbb{R}$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ definiere $d(x, y) = \max\{x, y\} - \min\{x, y\}$, wobei Maximum und Minimum bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ gemeint ist. Dann ist $d$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$, wir werden sie **Euklidische Metrik** nennen.

  Beweis. Symmetrie ist offensichtlich. Für die positive Definitheit: wenn $x = y$ gilt, dann ist $d(x, y) = \max\{x, y\} - \min\{x, y\} = x - x = 0$; wenn $x < y$ gilt, dann ist $d(x, y) = \max\{x, y\} - \min\{x, y\} = y - x > 0$; und wenn $y < x$ gilt, dann ist wegen der Symmetrie und dem vorherigen Fall (mit $x, y$ vertauscht) $d(x, y) = d(y, x) > 0$. Für die Dreiecksungleichung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit müssen wir nur zwei Fälle untersuchen: $x = y$ oder $x < y$ (sonst können wir $x$ und $y$ vertauschen). Für $z$ ergeben sich insgesamt 8 Fälle. Einer davon ist $z < x < y$. In diesem Fall ist $d(x, z) + d(z, y) = x - z + y - z$ und $d(x, y) = y - x$. Zu beweisen ist also die Ungleichung $y - x < x + y - 2z$, welche äquivalent zu der wahren Ungleichung $z < x$ und damit wahr ist.

- Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\langle ., . \rangle$ ein Skalarprodukt auf $V$. Definiere $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ für $x, y \in V$. Dann ist $d$ eine Metrik auf $V$.

Zum Beweis siehe die Vorlesung Geometrie, wo diese Aussage für den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischer Metrik bewiesen wurde. Den Beweis kann man auf den allgemeinen Fall übertragen.

**Satz** Der aus dem Euklidischen Skalarprodukt entstandene Abstand ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Wir werden sie **Euklidische Metrik** nennen.

Beweis siehe Geometrie.

Übung: Für $x \in \mathbb{R}$ definiere den **(absoluten) Betrag** von $x$ als $|x| = \max\{x, -x\}$. Weise nach, dass für die Euklidische Metrik $d$ auf $\mathbb{R}$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = |x - y| \ .$$

**Definition** Sei $P$ eine Menge und $d$ eine Metrik auf $P$. Für $a \in P$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ definiere

$$B_P(a, r) = \{x \in P : d(a, x) < r\} \ .$$

Diese Menge werden wir **kreisförmige Umgebung (des Elements $a$ mit Radius $r$ in $P$ bzgl. $d$)** nennen. Die Menge $B_M(a, r) \setminus \{a\}$ werden wir **ringförmige Umgebung** nennen.

Beispiele:

- Sei $P = \mathbb{R}$, $d$ die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Dann ist

  $$B_{\mathbb{R}}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(a, x) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |a-x| < r\} = (a-r, a+r) \ .$$

- Sei $P = \mathbb{R}^2$, $d$ die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$. Dann ist

  $$\begin{aligned} B_{\mathbb{R}^2}(a, r) &= \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : d(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) < r\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\} \end{aligned}$$

  die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $a$ und Radius $r$.

- Eisenbahnnetz

- Sei $P = \mathbb{R}$, $d$ die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Dann ist $B(a, r) = \{a\}$, wenn $r < 1$ ist, und $B(a, r) = \mathbb{R}$, wenn $r \geq 1$ ist.

**Definition** Sei $P$ eine Menge, $d$ eine Metrik auf $P$ und $A \subset P$. Die Menge $A$ heißt **offen (in $P$ bezüglich $d$ )** , falls für jedes $a \in A$ (mindestens) eine reelle Zahl $r > 0$ existiert mit $B_P(a, r) \subset A$. $A$ heißt **abgeschlossen (in $P$ bezüglich $d$ )**, falls $P \setminus A$ offen ist.

- $P = \mathbb{R}$ mit Euklidischer Metrik, $A = (0, 1)$, $B = [0, 1]$, $C = [0, 1)$, $D = \mathbb{R}$. Dann ist $A$ offen und $B$ ist nicht offen. Da $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ nicht offen ist, ist $A$ nicht abgeschlossen. $C$ ist nicht offen und weil $\mathbb{R} \setminus C = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ nicht offen ist, ist $C$ auch nicht abgeschlossen. Da $\mathbb{R} \setminus B = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ offen ist, ist $B$ abgeschlossen. $D$ ist offen. Da $\mathbb{R} \setminus D = \{\}$ die leere Menge ist, ist diese offen (Bedingung erfüllt, da kein $x \in \{\}$ exsitiert) und damit ist $D$ abgeschlossen.

**Definition** Sei $P$ eine Menge, $d$ eine Metrik auf $P$ und $A \subset P$. $A$ heißt **beschränkt (metrisch beschränkt, in $P$ bzgl. $d$ )**, falls mindestens eine reelle Zahl $r > 0$ und ein Element $a \in P$ existieren, für welche $A \subset B_P(a, r)$ gilt.

Übung: Für $P = \mathbb{R}$ mit Euklischer Metrik $d$ untersuche die Intervalle danach, ob sie offen / nicht offen sind bzw. abgeschlossen / nicht abgeschlossen sind. Kläre, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ genau dann beschränkt bezüglich der Metrik $d$ ist, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ ist. Untersuche Intervalle auf Beschränktheit!

**Ende 2. Vorlesung**

**3. Vorlesung, Montag den 17.10.2016**

**Anwendung** Seien die statistischen Daten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben (zum Beispiel Zahlen, aber das spielt keine Rolle). Wir nehmen als Modell paarweise verschiedene Elemente $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ ("Schubladen"), definieren die Menge $P = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ und die Abbildung $d : P \times P \to \mathbb{R}$ mit $d(Q_i, Q_j) = 0$, falls $x_i = x_j$ und $d(Q_i, Q_j) = 1$, falls $x_i \neq x_j$. Für $Q \in P$ definieren wir die Zahl $f(Q) = d(Q, Q_1) + d(Q, Q_2) + \cdots + d(Q, Q_n)$. Dann ist $f : P \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit Wertebereich $W_f \subset \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die Relation $\leq$ und bezüglich dieser stellen wir folgende Aufgabe: Bestimme $\min W_f$ und dasjenige (oder diejenigen) $x_i$, für welches $f(Q_i) = \min W_f$. Anders gesagt, wir suchen das Minimum der Werte und die Minimalstellen der Funktion $f$. Man kann sich überlegen, dass das Minimum für den häufigsten Wert $x_i$ (bzw. die häufigsten Werte) auftritt. Dieser Wert heißt in der Statistik **Modus** der gegebenen statistischen Daten.

Beispiel (in der Vorlesung nicht behandelt)

Sei $P = \mathbb{N}$ und die Abbildung $d : P \times P \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der stereographischen Projektion wie folgt definiert: $d(n,m) = d_{Eukl}(Q(n), Q(m))$ für $n, m \in \mathbb{N}$, wobei $Q(n) = (0,1) + \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}(n,-1) \in \mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt der Geraden durch $(n,1)$ und $(1,1)$ mit der unteren Halbkreislinie mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius 1 ist (Punkte, Geraden und die Kreislinie sind in der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ zu verstehen). Zeige, dass $d$ eine Metrik auf $P$ ist!

Sei $R = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ und definiere die Abbildung $d : R \times R \to \mathbb{R}$ wie folgt: $d(n,m) = d_{Eukl}(Q(n), Q(m))$ für $n, m \in \mathbb{N}$, $d(+\infty, +\infty) = 0$, $d(n, +\infty) = d(+\infty, n) = d_{Eukl}(Q(n), Q^+)$, wobei $Q^+ = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ ist. Zeige, dass $d$ eine Metrik auf der Menge $R$ ist! Beschreibe die kreis- und ringförmigen Umgebungen eines Elementes $n \in \mathbb{N}$ und des Elementes $+\infty$.

# 5 Reelle Zahlen

## 5.1 Axiomatische Einführung

Wiederholung (Lineare Algebra): Wir haben die Menge $\mathbb{R}$ (und $\mathbb{N}$) axiomatisch eingeführt und gesagt, dass alle Rechenregeln aus den Axiomen hergeleitet werden können.

**Axiome der reellen Zahlen**

$\mathbb{R}$ ist eine Menge, 0 und 1 sind zwei ausgezeichnete Elemente von $\mathbb{R}$, "+" und "·" sind binäre Operationen auf $\mathbb{R}$ und eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ (ihre Elemente heißen **positive** reellen Zahlen) ist gegeben, so dass folgende Eigenschaften (Axiome) gelten:

(G1+) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$,

(G2+) $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$,

(G3+) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists -x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$,

(G4+) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$;

(G1.) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(G2.) $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$,

(G3.) $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : x \cdot \frac{1}{x} = 1$,

(G4.) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$;

(K9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$;

(A1) für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:

$$x \in P, \qquad x = 0, \qquad -x \in P \ ;$$

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (\ x \in P \ \wedge \ y \in P\ ) \ \Rightarrow \ (\ x \cdot y \in P \ \wedge \ x + y \in P\ )$;

(Notation: aus diesen Axiomen folgt, dass die Relation definiert durch

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + (-x) \in P \vee x = y\}$$

eine Ordnungsrelation auf der Menge $\mathbb{R}$ ist und wir kürzen die Aussage $(x, y) \in R$ als $x \leq y$ ab.)

(S) jede nichtleere und (bezüglich $\leq$) nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Alle Eigenschaften der reellen Zahlen kann man aus diesen 12 Axiomen herleiten. Beispielweise formulieren wir daraus zwei Sätze, den ersten auch mit Beweis. Notation: Schreibe $x < y$ für $y + (-x) \in P$.

**Satz** Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt folgende Aussage:

$$(\ a < b \ \wedge \ 0 < c\ ) \ \Rightarrow \ a \cdot c < b \cdot c\ .$$

Beweis. $a < b$ bedeutet, dass $b + (-a) \in P$. $a \cdot c < b \cdot c$ bedeutet, dass $b \cdot c + (-(a \cdot c)) \in P$. In der folgenden Nebenrechnung benutzen wir die Rechenregeln für Körper bzw. Gruppen:

$$\begin{aligned} b \cdot c + (-(a \cdot c)) &= b \cdot c + ((-1) \cdot a \cdot c) = (b \cdot c) + ((-a) \cdot c) \\ &= (b + (-a)) \cdot c\ . \end{aligned}$$

Wenn jetzt $a < b$ und $0 < c$ ist, dann ist $b + (-a) \in P$ und $c \in P$. Nach dem Axiom (A2) gilt $(b + (-a)) \cdot c \in P$, was mit Hilfe der Nebenrechnung äquivalent zu $b \cdot c + (-(a \cdot c)) \in P$ ist. Dies bedeutet schließlich, dass $a \cdot c < b \cdot c$ gilt, was zu beweisen war. $\square$

**Satz (Lösen von Ungleichungen)** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a$ gilt folgende Aussage:

$$(\ x \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \cdot x < b\ ) \ \Leftrightarrow \ (\ x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x < b \cdot \frac{1}{a}\ )\ .$$

Weitere Notationen und Abkürzungen:
Subtraktionszeichen: $x - y = x + (-y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$,
Divisions- und Bruchzeichen: $x : y = \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$,
Potenznotation: $x^n = x \cdot x \cdot \cdots \cdot x$ (die Anzahl der Faktoren ist $n$) für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

## 5.2 $\mathbb{N}$

Die natürliche Zahlen werden

- in der Schule intuitiv eingeführt und die Rechenregeln intuitiv benutzt;
- im 1. Semester (Lineare Algenbra) axiomatisch eingeführt und die Rechenregeln intuitiv benutzt;
- im 5. Semester (Zahlentheorie) axiomatisch eingeführt und die Rechenregeln bewiesen.

In der Analysis werden sie benötigt. Wenn man die Menge $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit bestimmten Eigenschaften (den Axiomen von $\mathbb{N}$) definiert, kann man folgenden Satz beweisen.

**Satz**

a) Zwischen $n \in \mathbb{N}$ und $n + 1$ gibt es bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ keine natürliche Zahl.

b) Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum (bezüglich $\leq$ auf $\mathbb{R}$).

c) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt (bezüglich $\leq$ auf $\mathbb{R}$).

Dies muss an dieser Stelle ohne Beweis geglaubt werden. Einen Beweis kann man zum Beispiel in [Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1] finden.

## 5.3 $\mathbb{Q}$

Die rationalen Zahlen werden

- in der Schule aus den natürlichen Zahlen intuitiv hergeleitet und die Rechenregeln intuitiv benutzt;
- im 5. Semester ordentlich hergeleitet sowie die Rechenregeln bewiesen;

- in der Algebra und Analysis definiert als die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} : \exists q \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{Z} :\ x = p \cdot \frac{1}{q}\}\ .$$

**Satz**

a) Für beliebige reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es mindestens eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $x < r < y$.

b) Für beliebige reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es mindestens eine Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $x < q < y$.

Dies muss an dieser Stelle ohne Beweis geglaubt werden. Einen Beweis kann man zum Beispiel in [Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1] finden.

Übung: Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik und die Teilmengen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Es folgt aus dem obigen Satz, dass diese Mengen nicht offen und nicht abgeschlossen sind. Untersuche sie auf Beschränktheit bzgl. der Ordungsrelation $\leq$ !

## 5.4 Anwendung: Wurzeln und rationale Potenzen

Wir haben in der Linearen Algebra bewiesen, dass "die Wurzel von zwei nicht existiert", genauer gesagt, dass keine rationale Zahl $x$ mit der Eigenschaft $x^2 = 2$ exsitieren kann. Jetzt werden wir beweisen, dass "die Wurzel von zwei existiert", genauer gesagt, dass eine reelle Zahl $x$ mit der Eigenschaften $x^2 = 2$ und $0 < x$ existiert.

**Satz (Existenz von Wurzel von** 2**)** Die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \wedge x^2 < 2\}$ ist Teilmenge von $\mathbb{R}$, sie ist nicht leer und nach oben beschränkt (bzgl. der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$). Sie besitzt ein Supremum (bzgl. der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$) und für dieses gilt: $0 < \sup A$ und $\sup A \cdot \sup A = 2$. Wir bezeichnen $\sup A = \sqrt{2}$. (Beachte, dass $\sup A \in \mathbb{R}$.)

**Ende 3. Vorlesung, 17.10.2016**

**4. Vorlesung, Montag den 24.10.2016**

Beweis. Weil $1 \cdot 1 = 1 < 2$ gilt, ist $1 \in A$, also ist $A$ nicht leer. Wir zeigen zunächst, dass 2 eine obere Schranke für $A$ ist. Wenn ein $x \in A$ erfüllen würde, dass $2 < x$ ist, dann wäre $4 = 2 \cdot 2 < 2 \cdot x < x \cdot x < 2$, was zu dem Widerspruch $4 < 2$ führt, also muss jedes $x \in A$ $x \leq 2$ erfüllen. Damit ist

2 eine obere Schranke für $A$ und folglich $A$ nach oben beschränkt. Wegen Axiom (S) existiert $\sup A \in \mathbb{R}$.

Bezeichne $s = \sup A$. Weil $1 \in A$ und $s$ insbesondere obere Schranke für $A$ ist, gilt $1 \leq s$ und aus $0 < 1$ folgt dann $0 < s$.

Es bleibt zu zeigen, dass $s \cdot s = 2$ ist. Wir untersuchen die 3 möglichen Fälle.

Wenn $s \cdot s < 2$ wäre, dann ist $2 - s^2 > 0$ und $\frac{2s+1}{2-s^2} \in \mathbb{R}$. Es gibt mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{2s+1}{2-s^2}$, weil $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist (Satz über $\mathbb{N}$). Wir berechnen

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 + 2s\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq s^2 + 2s\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = s^2 + \frac{(2s+1)}{n} < s^2 + (2 - s^2) = 2 \ .$$

Weil auch $0 < s + \frac{1}{n}$ gilt, folgt, dass $s + \frac{1}{n} \in A$ ist. Dann muss $s + \frac{1}{n} \leq s$ gelten, weil $s$ eine obere Schranke für $A$ ist. Aber diese Aussage ist offensichtlich falsch (sie ist äquivalent zu der falschen Aussage $n < 0$). Also kann der Fall $s \cdot s < 2$ nicht vorkommen.

Wenn $2 < s \cdot s$ wäre, dann ist $s^2 - 2 > 0$ und $\frac{2s}{s^2-2} + \frac{1}{s} \in \mathbb{R}$. Es gibt mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{2s}{s^2-2} + \frac{1}{s}$. Dann ist insbesondere

$$n > \frac{1}{s} \text{ und } n > \frac{2s}{s^2 - 2} \ .$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $s - \frac{1}{n} > 0$ und aus der zweiten $-\frac{2s}{n} > -(s^2 - 2)$. Da $s - \frac{1}{n} < s$ ist, kann $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für $A$ sein. Das bedeutet, dass mindestens ein $y \in A$ existiert mit $y \not\leq s - \frac{1}{n}$. Das heißt, dieses $y$ erfüllt $y > s - \frac{1}{n}$. Wir berechnen

$$y^2 > (s - \frac{1}{n})y > (s - \frac{1}{n})^2 = s^2 - 2s\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > s^2 - \frac{2s}{n} > s^2 - (s^2 - 2) = 2$$

Also ist $y^2 \not< 2$ und kann nicht Element von $A$ sein. Das ist ein Widerspruch, weswegen der Fall $2 < s^2$ auch nicht auftreten kann.

Es bleibt nur der Fall $s^2 = 2$ als übrig, und dies wollten wir beweisen. □

**Definition** Die Zahl $\sup\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \ \wedge \ x^2 < 2\}$ werden wir **Wurzel von** 2 nennen und durch $\sqrt{2}$ bezeichnen.

Bemerkungen

- Analoge Situation: In der Menge der Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen gibt es keine Zahl, welche zum Quadrat $0,9$ hat. Beweis: Die Anzahl der Dezimalstellen verdoppelt sich beim Qaudrieren, und $0,9$ hat eine ungerade Anzahl an Nachkommastellen.

- Man kann zeigen (siehe z.B. [Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Paragraph 9]), dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ die Menge $\{y \in \mathbb{R} : y > 0 \wedge y^k \leq x\} \subset \mathbb{R}$ ein Supremum $s \in \mathbb{R}$ besitzt und dass dieses $s$ $s^k = x$ erfüllt. Diese Zahl $s$ wird durch $\sqrt[k]{x}$ bezeichnet und $k$-te Wurzel aus $x$ genannt.

- Notation: für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ sei $\frac{1}{x}$ auch durch $x^{-1}$ bezeichnet, $\sqrt[k]{x}$ für $k \in \mathbb{N}$ auch durch $x^{\frac{1}{k}}$ bezeichnet und $x^0$ sei ein weiteres Symbol für 1. Allgemein sei $(\sqrt[p]{x})^q$ auch durch $x^{\frac{p}{q}}$ bezeichnet. Dann gelten die Rechenregeln für die Potenznotation.

- Wir haben damit für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ die (rationale !) $\frac{p}{q}$-te Potenz von 2, $2^{\frac{p}{q}}$, definiert. Aber wir haben noch nicht die allgemeine (reelle !) Potenz $2^x$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert! Insbesondere auch $e^x$ nicht!

- Man kann die Eulerische Zahl $e$ auch mit Hilfe vom Supremum definieren, und zwar als Supremum der Menge $\{y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}\ x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\}$ (bezüglich $\leq$ auf $\mathbb{R}$). Wir werden aber diese Zahl später (anders) definieren. Die Zahl $\pi$ könnte man mit Hilfe der Wallischen Formel als Infimum einer Menge definieren. Aber das wird für uns nicht praktisch.

- Auch die Menge $\mathbb{Q}$ erfüllt die Axiome (G1+) bis (A2) und $\leq$ ist auch eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$. Die Menge $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 < 2\}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$, sie ist nicht leer und ist nach oben beschränkt (in $\mathbb{Q}$ bezüglich $\leq$). Man kann zeigen, dass sie aber kein Supremum (in $\mathbb{Q}$ bezüglich $\leq$) besitzt. Wir sagen, dass $\mathbb{Q}$ das Axiom (S) nicht erfüllt. Dieses Axiom heißt Axiom über das Supremum, auch **Vollständigkeitsaxiom**.

## 5.5 Ausblicke

Weitere Zahlen in $\mathbb{R}$

Die Zahlen $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ heißen irrationale Zahlen, ein Beispiel ist $\sqrt{2}$. Diejenigen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Längen $|x|$ ausgegangen von der Einheitslänge und mit Hilfe von Lineal und Zirkel konstruiert werden können, heißen **konstruierbare Zahlen**. Man kann zeigen (mit Ähnlichkeit von Dreiecken), dass rationale Zahlen konstruierbar sind. Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass $\sqrt{2}$ konstruierbar ist. Aber zum Beispiel ist $\sqrt[3]{2}$ nicht konstruierbar (hier ohne Beweis).

**Ende 4. Vorlesung, 24.10.2016**

**5. Vorlesung, Freitag den 28.10.2016**

Dass die Zahl $\pi$ (die Länge der Halbkreislinie mit Radius 1) nicht konstruierbar ist, ist äquivalent zu der Aussage über der **Quadratur des Kreises**, welche schon in der Antike formuliert, aber erst im 1882 von Lindemann bewiesen wurde.

## 5.6 Praktische Ungleichungen für reelle Zahlen

**Satz (über den Betrag)** Der Betrag $|.|$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und hat folgende Eigenschaften:

i) $|0| = 0$ und für $u \neq 0$ ist $|u| > 0$, **positive Definitheit**

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathbb{R}: \quad |\lambda u| = |\lambda|\ |u|$, **Homogenität**

iii) $|u + v| \leq |u| + |v|$. **Dreiecksungleichung**

Beweis mit Hilfe von Axiomen der reellen Zahlen und der darausfolgenden Rechenregeln.

i) $|0| = \max\{0, -0\} = \max\{0, 0\} = \max\{0\} = 0$. Für $u > 0$ ist $-u < 0$, also $-u < u$, und folglich $|u| = \max\{u, -u\} = u > 0$. Für $u < 0$ ist $-u > 0$, also $-u > u$, und folglich $|u| = \max\{u, -u\} = -u > 0$.

ii) Mit Fallunterscheidung: ist $u = 0$, dann ist wegen i) $|u| = 0$, außerdem $\lambda u = 0$, $|\lambda u| = 0$, und anderseits $|\lambda|\ |u| = |\lambda| \cdot 0 = 0$. Wenn $u > 0$ ist, dann gibt es drei Möglichkeiten:

- $\lambda = 0$: Hier ist $\lambda u = 0$ und $|\lambda| = 0$, somit gilt die Gleichheit.
- $\lambda > 0$: Hier ist $\lambda u > 0$ und $|\lambda u| = \lambda u = |\lambda|\ |u|$.
- $\lambda < 0$: Hier ist $\lambda u < 0$ und $|\lambda u| = -\lambda u = |\lambda|\ |u|$.

Ist $u < 0$, dann gibt es wieder drei Möglichkeiten, die man untersuchen muss (Übung!).

iii) (Wurde nicht in der Vorlesung bewiesen.) Mit Fallunterscheidung: ist $u = 0$, dann ist $|u + v| = |0 + v| = |v| = 0 + |v| = |0| + |v| = |u| + |v|$. Wenn $v = 0$ ist, dann folgt die Aussage aus der vorherigen Rechnung, weil wir die Rollen von $v$ und $u$ vertauschen können (wegen (K4)). Es bleiben vier Fälle:

- $u > 0 \wedge v > 0$: Dann ist $u + v > 0$ und $|u + v| = u + v = |u| + |v|$.
- $u > 0 \wedge v < 0$: Hier gibt es drei Fälle:

  - $u + v > 0$: Hier gilt $|u + v| = u + v$. Außerdem gilt mit den Rechenregeln $v < 0$, $2v < 0$, $v < -v$, $u + v < u - v$, folglich $|u + v| = u + v < u - v = |u| + |v|$.
  - $u + v < 0$: Hier gilt $|u + v| = -(u + v) = -u - v$. Außerdem gilt mit den Rechenregeln $0 < u$, $0 < 2u$, $-u < u$, $-u - v < u - v$, folglich $|u + v| = -u - v < u - v = |u| + |v|$.
  - $u + v = 0$: $|u + v| = |0| = 0 < |u| + |v|$.

- $u < 0 \wedge v > 0$: In diesem Fall folgt die Aussage aus dem oberen Teil des Beweises, weil wir die Rollen von $u$ und $v$ vertauschen können.

- $u < 0 \wedge v < 0$: Dann ist $u+v < 0$ und $|u+v| = -(u+v) = -u+(-v) = |u| + |v|$.

In jedem Fall gilt $|u + v| \leq |u| + |v|$. $\square$

**Satz** Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \ .$$

Beweis: Übung! Prüfe auch, dass die Ausage ohne der Voraussetzung $a, b > 0$ falsch ist.

**Satz (AG-Ungleichung)** Für beliebige, nichtnegative reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ ;$$

dabei gilt in dieser Aussage Gleichheit genau dann, wenn alle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich sind (und strikte Ungleichheit sonst).

Bemerkungen.

- Die Zahl links heißt **arithmetisches Mittel** der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und die Zahl auf der rechte Seite heißt **geometrisches Mittel** dieser Zahlen. Sie spielen auch in der Statistik eine Rolle.

- Notation für Summe: $a_1+a_2+\cdots+a_n = \sum_{i=1}^n a_i$, Notation für Produkt: $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$.

- Man findet in der Literatur viele Beweise dieses Satzes, elementare und auch mit höherer Mathematik.

**Satz (Bernoullische Ungleichung)** Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ .$$

Beweis mit Fallunterscheidung. Für $x = -1$ und beliebige $n$ ist die Ungleichung offensichtlich war (es gilt sogar Gleichheit). Sei jetzt $x > -1$. Dann ist $x+1 > 0$. Für $n = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich war (es gilt sogar Gleichheit). Wir werden das Beweisprinzip **Mathematische Induktion** nutzen. Dafür beweisen wir die Hilfsaussage: Wenn die Ungleichung für $n = k$, wobei $k \in \mathbb{N}$, war ist, dann ist sie auch für $n = k+1$ war.

Vorassetzung ist $(1+x)^k \geq 1+kx$. Diese Ungleichung mit $1+x$ multipliziert (beachte, dass $1+x > 0$ ist!) impliziert

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx) \cdot (1+x) = 1+(1+k)x+kx^2 \\ &\geq 1+(1+k)x \ .\end{aligned}$$

Folglich gilt $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$, das heißt, die Hilfsaussage ist bewiesen. Laut Induktionsprinzip ist damit der Satz bewiesen. $\square$

Bemerkung: Ein anderer Beweis für den Fall $x \geq 0$ mit Binomischer Formel:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+x^n \geq 1+nx \ .$$

# 6 Grenzwert

## 6.1 Grenzwert einer Zahlenfolge

**Definition** Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $D_f = \mathbb{N}$ werden wir **reelle Folge** nennen.

Wir können eine reelle Folge entweder auf dem Zahlenstrahl als die Menge $W_f$ (Wertebereich von $f$) oder im Kartesischen Koordinatensystem als die Menge $G_f$ (Graph von $f$) veranschaulichen. Die erste Möglichkeit hat den Nachteil, dass man die Reihenfolge der Elementen $f(1), f(2), \ldots$ nicht sieht, obwohl diese entscheidend beim Begriff **Folge** ist.

**Definition** Sei $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik $d$ ausgestattet. Sei $f$ eine reelle Folge und sei $A \in \mathbb{R}$. $A$ heißt **Grenzwert der Folge $f$ (bezüglich der Metrik $d$)**, falls folgende Aussage wahr ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n > n_0 \ \Rightarrow \ d(f(n), A) < \varepsilon \ .$$

**Ende 5. Vorlesung, 28.10.2016**

**6. Vorlesung, Montag 7.11.2016**

Beispiele:

- Sei $f(n) = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f$ eine reelle Folge. 0 ist Grenzwert dieser Folge.

  Beweis.

  Nebenrechnung: Wir wollen erreichen, dass $d(f(n), A) < \varepsilon$ ist, d.h.$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Diese Ungleichung equivalent umgestellt, lautet $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

  Sei $\varepsilon > 0$. Da $\frac{1}{\varepsilon}$ eine reelle Zahl ist, gibt es (mindestens) eine natürliche Zahl, welche größer ist. Nennen wir diese $n_0$, also $n_0 \in \mathbb{N}$ und $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $n > n_0$ ist, dann folgt aus der Transitivität der Relation $<$, dass $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Laut Nebenrechnung ist diese äquivalent zu $d(f(n), 0) < \varepsilon$. Damit haben wir bewiesen, dass 0 Grenzwert von $f$ ist. □

- Sei $g(n) = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $g$ eine reelle Folge. 1 ist nicht Grenzwert dieser Folge.

  Beweis. Zu zeigen ist, dass die Negation der Ausssage in der Definition, d.h.

  $$\neg\ (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \ \Rightarrow\ d(g(n), 1) < \varepsilon\ \ )$$

  wahr ist, welche (mit Rechenregeln der Logik) wie folgt umgeschrieben werden kann:

  $$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ n > n_0\ \wedge\ \ d(g(n), 1) \geq \varepsilon\ \ .$$

  Nebenrechnung: Wir wollen, dass die Ungleichung $d(g(n), 1) \geq \varepsilon$ wahr wird. Für $n$ gerade ist $d(g(n), 1) = |(-1)^n - 1| = |1 - 1| = 0$ und für $n$ ungerade ist $d(g(n), 1) = |(-1)^n - 1| = |-1 - 1| = 2$. Folglich kann die Ungleichung nur für ungerade $n$ erfüllt werden und sie wird erfüllt, sobald $\varepsilon \leq 2$ ist.

  Setze $\varepsilon = 2$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wenn $n_0$ gerade ist dann setze $n = n_0 + 1$ und wenn $n_0$ ungerade ist dann setze $n = n_0 + 2$. Auf jeden Fall gilt $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ und $n$ ist ungerade. Dann gilt $d(g(n), 1) = 2 \geq \varepsilon$. Damit ist bewiesen, dass 1 kein Grenzwert von $g$ ist. □

**Satz** Eine reelle Folge hat entweder keinen Grenzwert oder genau einen Grenzwert.

Beweis. Wenn $A_1 \in \mathbb{R}$ und $A_2 \in \mathbb{R}$ beide Grenzwerte von der Folge $f$ sind, und $A_1 \neq A_2$ gelten würde, dann ist $d(A_1, A_2)$ eine positive reelle Zahl (Eigenschaft der Metrik). Damit ist $\varepsilon = \frac{d(A_1,A_2)}{4} > 0$. Da $A_1$ Grenzwert von $f$ ist, gibt es für dieses $\varepsilon$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $n > n_1$ dann $d(f(n), A_1) < \varepsilon$. Da $A_2$ Grenzwert von $f$ ist, gibt es für dieses $\varepsilon$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $n > n_2$ dann $d(f(n), A_2) < \varepsilon$. $\max\{n_1, n_2\}$ ist eine natürliche Zahl und es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl $n$, welche größer als diese Zahl ist. Dann gilt insbesondere, dass $n > n_1$ und deswegen $d(f(n), A_1) < \varepsilon$. Außerdem gilt auch, dass $n > n_2$ und deswegen $d(f(n), A_2) < \varepsilon$. Wir rechnen mit Hilfe der Dreiecksungleichung und Symmetrie für die Metrik $d$:

$$\begin{aligned} d(A_1, A_2) &\leq d(A_1, f(n)) + d(f(n), A_2) = d(f(n), A_1) + d(f(n), A_2) < \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon = \frac{d(A_1, A_2)}{2} \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt $d(A_1, A_2) < \frac{d(A_1,A_2)}{2}$, was äquivalent zu der falschen Ungleichung $d(A_1, A_2) < 0$ und damit falsch ist. Folglich kann $A_1 \neq A_2$ nicht gelten und damit ist der Satz bewiesen. □

**Notation** Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine reelle Folge. Wenn eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Folge $f$ ist, werden wir schreiben $\lim_n f(n) = A$, sonst werden wir sagen, dass **die Folge $f$ keinen reellen Grenzwert hat**.

Beispiele

- $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.
- Man kann Zeigen, dass für die Folge $g$ auch $-1$ kein Grenzwert ist und dass beliebiges $A \in \mathbb{R}$ kein Grenzwert ist. Die Folge $g(n) = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, hat keinen reellen Grenzwert.

## 6.2 Grenzwert einer Funktion im Unendlichen

**Definition** Sei $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik $d$ ausgestattet. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass $D_f = \mathbb{R}$. Sei $A \in \mathbb{R}$. $A$ heißt **Grenzwert von $f$ im Unendlichen**, falls folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : \ x_0 < x \ \Rightarrow \ d(f(x), A) < \varepsilon.$$

**Satz** Eine Funktion hat entweder keinen Grenzwert im Unendlichen oder genau einen Grenzwert im Unendlichen.

Beweis ähnlich.

**Notation** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Funktion $f$ ist, werden wir schreiben $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, sonst werden wir sagen, dass **die Funktion $f$ keinen reellen Grenzwert im Unendlichen hat**.

Beispiel: 0 ist Grenzwert im Unendlichen der Funktion $f$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Nebenrechnung: Wir wollen, dass $d(\frac{1}{x^2+1}, 0) < \varepsilon$ gilt, was äquivalent zu $x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ ist. Diese Ungleichung ist automatisch erfüllt, wenn $\varepsilon > 1$ ist und sie ist für jedes $x > 0$ erfüllt, wenn $\varepsilon = 1$ ist. Wenn $\varepsilon < 1$ ist, dann ist die Ungleichung äquivalent zu $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wenn $\varepsilon \geq 1$ ist, können wir zum Beispiel $x_0 = 1$ setzen. Wenn $\varepsilon < 1$ ist, setzen wir $x_0 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$. Auf jeden Fall ist $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > x_0$ gilt $x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ und damit (siehe Nebenrechnung) $d(f(x), 0) < \varepsilon$. Folglich ist 0 Gernzwert von $f$ im Unendlichen. $\square$

## 6.3 Grenzwert einer Folge von Punkten in der Ebene

Eine **Folge von Punkten in der Ebene** ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ mit $D_f = \mathbb{N}$. Wir können den Wertebereich $W_f$ im Eukidischen Koordinatensystem veranschaulichen. Die Veranschaulichung von $G_f$ ist nur mit dreidimensionaler Graphik möglich, wir verzichten an dieser Stelle darauf. Beispiel: Spirale aus der Übung.

**Definition** Sei $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik $d$ ausgestattet. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ eine Folge von Punkten in der Ebene und sei $A \in \mathbb{R}^2$. $A$ heißt **Grenzwert von $f$**, falls folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n_0 < n\ \Rightarrow\ d(f(n), A) < \varepsilon.$$

**Ende der 6. Vorlesung am 7.11. 2016**

**7. Vorlesung, Freitag den 11.11.2016**

## 6.4 Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

Ziel: Im Begriff von Grenzwert einer Funktion im Unendlichen ersetzen wir "$x$ groß" (d.h. "in der Nähe von Unendlich") durch "$x$ in der Nähe einer Stelle". Dabei kümmern wir uns nicht um die Stelle selbst.

**Definition** (Wiederholung) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ und sei $a \in D_f$. Dann heißt die Zahl $f(a)$ **Wert von $f$ an der Stelle** $a$.

**Definition** Sei $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik $d$ ausgestattet und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, der Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass $D_f = \mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}$. $A$ heißt **Grenzwert von $f$ an der Stelle** $a$, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : \; x \in B_{\mathbb{R}}(a, \delta) \setminus \{a\} \;\Rightarrow\; d(f(x), A) < \varepsilon.$$

Beispiele:

- Begriff an einer Skizze erklärt, an den Graphen der Funktion $f$, $f(x) = -(x-2)^2 x + 4$ für $x \in \mathbb{R}$, Stelle $a = 2$, Grenzwert $A = 4$.
- Sei die Funktion $f$ definiert durch $f(180) = 28$, $f(x) = 10$ für $x \in [0, 360]$ mit $x \neq 180$. Also ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D_f = [0, 360]$. (Diese Funktion entsteht aus dem Modell eines festen Pendels der Länge 8 cm, aufgehängt auf 18 cm Höhe, die Ausgangposition $x$ ist der orientierte Winkel von der senkrechten Gerade gegen den Uhrzeigersinn in Grad gemessen, der zugeordnete Wert $f(x)$ ist die Höhe der aufgehängten Kugel nach langer Zeit, d.h. in der erreichten Ruheposition.) Dann ist 28 der Wert der Funktion $f$ an der Stelle 180, aber 28 ist nicht Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle 180. 10 ist der Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle 180.

**Satz** Eine reelle Funktion an einer Stelle hat entweder keinen Grenzwert oder genau einen Grenzwert.

Beweisidee: Mit Widerspruch, $A_1, A_2$ß $\in \mathbb{R}$ Grenzwerte, sei $\varepsilon = \frac{1}{4} d(A_1, A_2)$, setze $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, Dreiecksungleichung, $d(A_1, A_2) = 0$ Widerspruch. □

**Notation** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in \mathbb{R}$. Wenn eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle $a$ ist, werden wir schreiben $\lim_{x \to a} f(x) = A$, sonst werden wir sagen, dass **die Funktion $f$ keinen reellen Grenzwert an der Stelle $a$ hat**.

Beispiele:

- Sei $f(x) = 1$, wenn $x$ eine rationale Zahl ist und sei $f(x) = 0$, wenn $x$ eine irrationale Zahl ist. Damit ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D_f = \mathbb{R}$ definiert. 1 ist Wert der Funktion $f$ an der Stelle 1, aber 1 ist nicht Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle 1; 0 auch nicht. $f$ hat keinen Grenzwert an der Stelle 1 (und auch an keiner anderen Stelle). Diese Funktion heißt **Dirichletfunktion**.

- Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ für $x \neq 1$. Damit ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert. Dann ist $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, Beweis aus dem Graphen. Beachte, dass $1 \notin D_f$ und damit hat der Begriff "Wert von $f$ an der Stelle 1" keinen Sinn.

- Sei $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ für $x \neq 1$. Damit ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert. Diese Funktion hat an der Stelle 1 keinen reellen Grenzwert.

## 6.5 "Unendlich" als Grenzwert

**Definition** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass $D_f = \mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{R}$. $+\infty$ heißt **Grenzwert von $f$ an der Stelle** $a$, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\forall r > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} :\ x \in B_{\mathbb{R}}(a, \delta) \setminus \{a\}\ \Rightarrow f(x) > r.$$

Bemerkungen:

- Entsprechender Satz über Eindeutigkeit gilt.

- Notation: $\lim_{x\to a} = +\infty$

- Beispiel $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

  Beweis. Nebenrechnung: die Ungleichung $f(x) > r$ äquivalent umgestellt lautet $|x - 1| < \frac{1}{\sqrt{r}}$. Für $x \geq 1$ lautet sie (aufgelöst nach $x$) $x < \frac{1}{\sqrt{r}} + 1$ und für $x < 1$ lautet sie (aufgelöst nach $x$) $x > 1 - \frac{1}{\sqrt{r}}$.

  Sei jetzt $r > 0$. Setze $\delta = \frac{1}{\sqrt{r}}$. Prüfe nach, dass die Aussage in der Definition mit diesen $\delta$ (für $a = 1$) erfüllt ist!

- Ähnlich mit $-\infty$

- Ähnlich $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

**Ende 7. Vorlesung, 11.11.2016**

**8. Vorlesung, Montag 14.11.2016**

Beachte, dass das Symbol $+\infty$ bis jetzt noch nicht definiert war. Wir haben das Symbol $[0, +\infty)$ (das ist eine Menge) und das Symbol $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (das ist eine Aussage) definiert.

# 7 Folgen

Ziele dieses Kapitels sind:

- praktische Rechenregeln für Grenzwerte lernen,
- ein Gefühl für des Rechnen mit "Unendlich" zu bekommen,
- einen Rückblick auf $\sqrt{2}$ und das Axiom über Supremum werfen,
- einen Blick nach vorne werfen (Exponentialfunktion).

## 7.1 Rechenregln für Grenzwerte, Eigenschaften

**Definition** Sei $M$ eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ mit $D_f = \mathbb{N}$ heißt **Folge aus Elementen von** $M$. Eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt auch **reelle Folge** und eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt **komplexe Folge**.

Wir werden Folgen in einer Menge $M$ untersuchen, wo die Menge eine Struktur hat. Zum Beispiel eine algebraische Struktur (Gruppe, Körper, Vektorraum) und eine Struktur mit Metrik, damit man einen Grenzwert definieren kann. Wir untersuchen, wie verhält sich der Grenzwert im Bezug auf die algebraische Struktur, z.B. Addition.

**Definition** Seien $f, g$ reelle Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann ist die Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(n) = f(n) + g(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ wieder eine reelle Folge. Sie heißt **Summe von** $f$ **und** $g$ und wird durch $h = f + g$ bezeichnet.

Die Abbildung $k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $k(n) = f(n) \cdot g(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt **Produkt von** $f$ **und** $g$, $k = f \cdot g$.

Die Abbildung $l : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $l(n) = \lambda \cdot f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt $\lambda$**-faches von** $f$, $l = \lambda \cdot f$.

Beispiele:

- Sei $f(n) = \frac{1}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda = 5$. Dann ist $(f+g)(n) = f(n)+g(n) = \frac{1}{n^2}+n = \frac{1+n^3}{n^2}$ und $(5\cdot f)(n) = \frac{5}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Wir stellen fest, dass $f + g = g + f$ gilt (Begründung ist die Kommutativität der Addition von reellen Zahlen).
- Für komplexe Folgen hat die Summe auch Sinn, für Folgen in $\mathbb{R}^3$ hat Produkt aber keinen Sinn, ein Vielfaches schon.

Satz Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Folgen und $A, B \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

a) Wenn $A$ Grenzwert der Folge $f$ ist und $B$ Grenzwert der Folge $g$ ist, dann ist $A + B$ Grenzwert der Folge $f + g$.

b) Wenn $+\infty$ Grenzwert der Folge $f$ ist und $B$ Grenzwert der Folge $g$ ist, dann ist $+\infty$ Grenzwert der Folge $f + g$.

c) Wenn $+\infty$ Grenzwert der Folge $f$ ist und $+\infty$ Grenzwert der Folge $g$ ist, dann ist $+\infty$ Grenzwert der Folge $f + g$.

d) Wenn $-\infty$ Grenzwert der Folge $f$ ist und $B$ Grenzwert der Folge $g$ ist, dann ist $-\infty$ Grenzwert der Folge $f + g$.

e) Wenn $-\infty$ Grenzwert der Folge $f$ ist und $-\infty$ Grenzwert der Folge $g$ ist, dann ist $-\infty$ Grenzwert der Folge $f + g$.

f) Wenn $+\infty$ Grenzwert der Folge $f$ ist und $-\infty$ Grenzwert der Folge $g$ ist, dann ist keine allgemeine Aussage über den Grenzwert von $f + g$ möglich.

Beweis von a). Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Da $A$ Grenzwert von $f$ ist, existiert (für diese $\varepsilon_1$) ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_1$ gilt

$$d(f(n), A) < \varepsilon_1 \ .$$

Da $B$ Grenzwert von $g$ ist, existiert (für diese $\varepsilon_1$) ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_1$ gilt

$$d(g(n), B) < \varepsilon_1 \ .$$

Setze $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dann ist $n_0 \in \mathbb{N}$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ gilt: $n > n_1$, weswegen $d(f(n), A) < \varepsilon_1$ und $n > n_2$, weswegen $d(g(n), B) < \varepsilon_1$. Wir berechnen jetzt

$$\begin{aligned} d((f+g)(n), A+B) &= |(f+g)(n) - (A+B)| = |f(n) + g(n) - A - B| \\ &= |(f(n) - A) + (g(n) - B)| \leq |f(n) - A| + |g(n) - B| \\ &= d(f(n), A) + d(g(n), B) < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage, dass $A + B$ Grenzwert von $f + g$ ist, bewiesen.

Beweis von b). Sei $r > 0$. Da $B$ Grenzwert von $g$ ist, existiert für $\varepsilon_1 = 1$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_2$ gilt

$$d(g(n), B) < 1 \ .$$

Da $+\infty$ Grenzwert von $f$ ist, existiert für $r_1 = \max\{r - B + 1, 1\}$ (was eine positive Zahl ist) ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_1$ gilt

$$f(n) > r_1 \ .$$

Setze $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dann ist $n_0 \in \mathbb{N}$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ gilt: $n > n_1$, weswegen $f(n) > r_1$ und $n > n_2$, weswegen $d(g(n), B) < 1$.

Nebenrechnung: die Ungleichung $d(g(n), B) < 1$ äquivalent umgestellt lautet $|g(n) - B| < 1$, und diese (aufgelöst nach $g(n)$) ist äquivalent zu der Aussage $B - 1 < g(n) < B + 1$.

Wir berechnen jetzt

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) > r_1 + B - 1 \geq r - B + 1 + B - 1 = r \ .$$

Damit ist die Aussage, dass $+\infty$ Grenzwert von $f + g$ ist, bewiesen.

Beweis von d). Seien die Voraussetzungen $-\infty$ ist Grenzwert der Folge $f$ und $B$ ist Grenzwert der Folge $g$ erfüllt. Zu beweisen ist die Wahrheit folgender Aussage:

$$\forall r < 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n > n_0 \ \Rightarrow \ (f + g)(n) < r \ .$$

Sei $r < 0$. Da $B$ Grenzwert von $g$ ist, existiert für $\varepsilon_1 = 1$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_2$ gilt

$$d(g(n), B) < 1 \ .$$

Da $-\infty$ Grenzwert von $f$ ist, existiert für $r_1 = \min\{r - B - 1, -1\}$ (was eine negative Zahl ist) ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_1$ gilt

$$f(n) < r_1 \ .$$

Setze $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dann ist $n_0 \in \mathbb{N}$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ gilt: $n > n_1$, weswegen $f(n) < r_1$ und $n > n_2$, weswegen $d(g(n), B) < 1$.

Nebenrechnung: die Ungleichung $d(g(n), B) < 1$ äquivalent umgestellt lautet $|g(n) - B| < 1$, und diese (aufgelöst nach $g(n)$) ist äquivalent zu der Aussage $B - 1 < g(n) < B + 1$.

Wir berechnen jetzt

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) < r_1 + B + 1 \leq r - B - 1 + B + 1 = r \ .$$

Damit ist die Aussage wahr. Das bedeutet, dass $-\infty$ Grenzwert von $f+g$ ist.

Beweis von c) und e) ist Übung.

Beweis von f) Für die Folge $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $g(n) = -n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $(f+g)(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich ist 0 Grenzwert der Folge $f+g$.

Für die Folge $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $g(n) = -n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $(f+g)(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich ist $+\infty$ Grenzwert der Folge $f+g$.

Für die Folge $f(n) = n + 25$, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $g(n) = -n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $(f+g)(n) = 25$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich ist 25 Grenzwert der Folge $f+g$.

Wir können also allgemein den Grenzwert der Folge $f+g$ nicht feststellen.
□

**Ende 8. Vorlesung, 14.11.2016**

**9. Vorlesung, Montag 21.11.2016**

Wir formulieren den entsprechenden Satz für ein Produkt von Folgen und schreiben es diesmal mit Hilfe von Abkürzungen auf.

Satz Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Folgen und $A, B \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

a) Wenn $\lim_n f(n) = A$ und $\lim_n g(n) = B$, dann ist $\lim_n (f \cdot g)(n) = A \cdot B$.

b) Wenn $\lim_n f(n) = +\infty$ und $\lim_n g(n) = B$ und $B > 0$, dann ist $\lim_n (f \cdot g)(n) = +\infty$.

c) Wenn $\lim_n f(n) = +\infty$ und $\lim_n g(n) = B$ und $B < 0$, dann ist $\lim_n (f \cdot g)(n) = -\infty$.

d) Wenn $\lim_n f(n) = +\infty$ und $\lim_n g(n) = +\infty$, dann ist $\lim_n (f \cdot g)(n) = +\infty$.

e) Wenn $\lim_n f(n) = +\infty$ und $\lim_n g(n) = -\infty$, dann ist $\lim_n (f \cdot g)(n) = -\infty$.

f) Wenn $\lim_n f(n) = -\infty$ und $\lim_n g(n) = -\infty$, dann ist $\lim_n (f \cdot g)(n) = +\infty$.

g) Wenn $\lim_n f(n) = +\infty$ und $\lim_n g(n) = 0$, dann ist im allgemeinen keine Aussage für $\lim_n (f \cdot g)$ möglich.

Beweis von b) Sei $r > 0$. Zu zeigen ist, dass (mindestens) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$\forall n \in \mathbb{N}\ n > n_0 \ \Rightarrow (f \cdot g)(n) > r\ .$$

Da $B > 0$ ist, gilt $\frac{B}{2} > 0$. Da $\lim_n g(n) = B$ ist, existiert zu $\varepsilon = \frac{B}{2} > 0$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_2$ gilt $d(g(n), B) < \varepsilon$. Diese letzte Ungleichung äquivalent umgestellt lautet $B - \varepsilon < g(n) < B + \varepsilon$, und mit $\varepsilon = \frac{B}{2}$ eingesetzt impliziert sie $\frac{B}{2} < g(n)$. Setze $r_1 = \frac{2r}{B}$. Es gilt $r_1 > 0$ und da $\lim f(n) = +\infty$, existiert zu diesem $r_1$ ein $n_1$ so, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_1$ $f(n) > r_1$ gilt . Setze $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$, dass $f(n) > r_1 > 0$ und $g(n) > \frac{B}{2} > 0$, weswegen auch

$$(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n) > r_1 \cdot \frac{B}{2} = \frac{2r}{B}\frac{B}{2} = r\ .$$

Damit ist die Aussage $\lim_n (f \cdot g)(n) = +\infty$ bewiesen.

Beweis von a)-f) ähnlich.

Zu der Aussage g) geben wir folgende Beispiele.

Für die Folge $f$ definiert durch $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $g$ definiert durch $g(n) = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $\lim_n f(n) = +\infty$, $\lim_n g(n) = 0$ und $\lim fg = 0$.

Für die Folge $f$ definiert durch $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $g$ definiert durch $g(n) = \frac{70}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $\lim_n f(n) = +\infty$, $\lim_n g(n) = 0$ und $\lim fg = 70$.

Für die Folge $f$ definiert durch $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $g$ definiert durch $g(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $\lim_n f(n) = +\infty$, $\lim_n g(n) = 0$ und $\lim fg = +\infty$.

Für die Folge $f$ definiert durch $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $g$ definiert durch $g(n) = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: $\lim_n f(n) = +\infty$, $\lim_n g(n) = 0$ und die Folge $f \cdot g$ hat keinen Grenzwert, d.h. weder einen reellen Grenzwert noch plus oder minus Unendlich als Grenzwert.

Folglich kann man aus den Kenntnissen $\lim f = +\infty$ und $\lim g = 0$ den Grenzwert $\lim fg$ nicht bestimmen. □

**Satz** Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Folgen und $A, B \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Nehmen wir an, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $g(n) \neq 0$.

a) Die Abbildungen $h, k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(n) = \frac{1}{g(n)}$ und $k(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ sind wieder Folgen.

b) Wenn $\lim_n f(n) = A$ und $\lim_n g(n) = B$ und $B \neq 0$, dann ist $\lim_n \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{A}{B}$.

c) Wenn $\lim_n g(n) = 0$ und es gilt $g(n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\lim_n \frac{1}{g(n)} = +\infty$.

d) Wenn $\lim_n g(n) = 0$ und es gilt $g(n) < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\lim_n \frac{1}{g(n)} = -\infty$.

e) Wenn $\lim_n g(n) = +\infty$, dann ist $\lim_n \frac{1}{g(n)} = 0$. Wenn $\lim_n g(n) = -\infty$, dann ist $\lim_n \frac{1}{g(n)} = 0$.

Beweis mit Hilfe der Definition.

Anwendung. Wir betrachten die Folge $f$ definiert durch $f(n) = \frac{n^3+3n+1}{2n^3-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe von Rechenregeln können wir $\lim_n f(n)$ berechnen.

Auf der Menge $\mathbb{R}$ haben wir die Ordnungsrelation $\leq$, deswegen hat folgende Definition für reelle Folgen Sinn (aber nicht für Folgen von Punkten in der Ebene).

**Definition** Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine reelle (!) Folge. Die Folge $f$ heißt **monoton wachsend**, wenn folgende Aussage wahr ist:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ f(n) \leq f(n+1) \ .$$

Die Folge $f$ heißt **strikt monoton wachsend**, wenn folgende Aussage wahr ist:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ f(n) < f(n+1) \ .$$

Die Folge $f$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn der Wertebereich $W_f$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ bezüglich $\leq$ nach oben beschränkt ist. Ähnlich definiert man **monoton fallend, nach unten beschränkt**.

Wir sagen, dass eine reelle Folge **monoton** ist, falls sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Wir sagen, dass eine reelle Folge **beschränkt** ist, falls sie sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist.

Bemerkung: Diese Begriffe haben für komplexe Folgen keinen Sinn, da wir auf der Menge $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation haben, welche verträglich mit der Operationen $+$ und $\cdot$ ist.

**Satz (Grenzwert einer monotonen Folge)** Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine reelle (!) Folge.

a) Wenn $f$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann besitzt sie einen reellen Grenzwert, und zwar $\sup W_f$.

b) Wenn $f$ monoton wachsend und nicht nach oben beschränkt ist, dann besitzt sie den Grenzwert $+\infty$.

c) Wenn $f$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann besitzt sie einen reellen Grenzwert, und zwar $\inf W_f$.

d) Wenn $f$ monoton fallend und nicht nach unten beschränkt ist, dann besitzt sie den Grenzwert $-\infty$.

Beweis a) Die Menge $W_f = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht leer, sie ist Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$. Da $f$ nach oben beschränkt ist, ist $W_f$ nach oben beschränkt (bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$). Aus dem Axiom über das Supremum folgt, dass $W_f$ ein Supremum besitzt. Sei $s = \sup W_f$, dann ist $s \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n) \leq s$.

Zu zeigen ist, dass $s$ der Grenzwert von $f$ ist. Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt $s - \varepsilon < s$. Da $s$ die kleinste obere Schranke für $W_f$ ist, kann $s - \varepsilon$ keine obere Schranke sein, deswegen gibt es mindestens ein $y \in W_f$ mit $y \not\leq s - \varepsilon$. Dann ist $y > s - \varepsilon$. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y = f(n_0)$.

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ gilt: da $f$ monoton wachsend ist, gilt $f(n) \geq f(n_0)$ und damit

$$s - \varepsilon < y = f(n_0) \leq f(n) \leq s < s + \varepsilon \ .$$

Daraus folgt $s - \varepsilon < f(n) < s + \varepsilon$, was äquivalent zu $d(f(n), s) < \varepsilon$ ist. Damit ist die Aussage, dass $s$ der Grenzwert von $f$ ist, bewiesen.

b) (in der Vorlesung nicht gemacht) Sei $r > 0$. Da $W_f$ nicht nach oben beschränkt ist, ist $r$ keine obere Schranke für $W_f$, folglich existiert mindestens ein $y \in W_f$ mit $y \not\leq r$. Dann ist $y > r$. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y = f(n_0)$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ gilt:

$$f(n) \geq f(n_0) = y > r \ .$$

Damit ist die Aussage, dass $\lim f = +\infty$, bewiesen. □

**Satz** Seien $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Folgen und $A, B \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

a) Nehmen wir an, dass $\lim f = A$ und $\lim g = B$. Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n) \leq g(n)$, dann ist $A \leq B$.

b) Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n) \leq g(n)$ und wenn $\lim f = +\infty$, dann ist $\lim g = +\infty$

c) Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n) \leq g(n)$ und wenn $\lim g = -\infty$, dann ist $\lim f = -\infty$

d) Wenn $\lim_n f(n) = A$ und $\lim_n g(n) = A$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) \leq h(n) \leq g(n)$, dann ist $\lim_n h(n) = A$.

**Ende 9. Vorlesung, 21.11.2016**

**10. Vorlesung, Freitag 25.11.2016**

## 7.2 Anwendungen

### 7.2.1 $\sqrt{2}$

Beispiel. Sei $f(1) = 1$ und $f(n+1) = \frac{1}{2}\left(f(n) + \frac{2}{f(n)}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist eine reelle Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert. Wir sagen, dass sie **rekursiv** definiert ist. Wir zeigen zuerst, dass sie nach unten beschränkt und monoton fallend ist.

Man kann mit Hilfe der vollständigen Induktion leicht zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(n) > 0$ gilt. Also $f$ ist nach unten beschränkt.

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(f(n))^2 - 2 &= \left(\frac{1}{2}\left(f(n-1) + \frac{2}{f(n-1)}\right)\right)^2 - 2 \\
&= \frac{1}{4}\left((f(n-1))^2 + 4 + \frac{4}{(f(n-1))^2}\right) - 2 \\
&= \frac{1}{4}\left((f(n-1))^2 - 4 + \frac{4}{(f(n-1))^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(f(n-1) - \frac{2}{f(n-1)}\right)^2 \geq 0 \ ,
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass $(f(n))^2 \geq 2$ ist. Wir rechnen mit dieser Eigenschaft weiter:

$$\begin{aligned}
f(n) - f(n+1) = f(n) - \frac{1}{2}\left(f(n) + \frac{2}{f(n)}\right) &= \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{f(n)} \\
&= \frac{1}{2f(n)}\left((f(n))^2 - 2\right) \geq 0 \ ,
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass $f(n) \geq f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das bedeutet, dass $f$ monoton fallend ist.

Nach dem Satz über den Grenzwert monotoner Folgen können wir sagen, dass $i = \inf W_f$ Grenzwert der Folge $f$ ist. Es gilt $i \in \mathbb{R}$ und $i \geq 0$.

Die Folge $g$ definiert durch $g(n) = f(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$ hat offensichtlich (prüfe nach mit Hilfe der Definition!) auch den Grenzwert $i$. Die Folge $h$ definiert durch $h(n) = \frac{1}{2}\left(f(n) + \frac{2}{f(n)}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ hat den Grenzwert

$\frac{1}{2}(i+\frac{2}{i})$, dazu haben wir die Rechenregeln für Quotient, Summe und Produkt verwendet. Da aber $g = h$ ist, muss auch $i = \frac{1}{2}(i + \frac{2}{i})$ sein. Diese Gleichung aufgelöst liefert $i = \sqrt{2}$ oder $i = -\sqrt{2}$, da aber $i \geq 0$ ist, ist $i = \sqrt{2}$ die einzige Lösung.

Zusammengefasst gilt $\lim_n f(n) = \sqrt{2}$.

Interpretationen: Die Folge $f$ liefert eine numerische Methode, wie man die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ mit rationale Zahlen annähern kann. Die Folge $f$ liefert eine numerische Methode, wie man eine Nullstelle der Polynomfunktion $F(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$, approximieren kann. Die Folge $f$ liefert eine numerische Methode, wie man eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$, $x \in \mathbb{R}$, approximieren kann. Dies ist ein effizienter Algorithmus.

Bemerkung: Andere Wurzeln kann man auch approximativ mit Hilfe von Folgen berechnen, siehe z.B. [Tretter, Proposition IV.44].

### 7.2.2 Die Zahl $e$

**Satz (über $e$)** Die reelle Folge $f$ gegeben durch $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Sie besitzt einen reellen Grenzwert, welcher durch $e$ bezeichnet wurde. Es gilt $2 < e \leq 3$.

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{f(n)}{f(n-1)} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \\ &= \frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &\geq \left(1 - n\frac{1}{n^2}\right) \frac{n}{n-1} = 1, \end{aligned}$$

wobei wir die Bernoullische Ungleichung benutzt haben. Daraus folgt, dass $f(n) \geq f(n-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die Folge damit monoton wachsend ist.

Mit Hilfe der binomischen Formel berechnen wir weiter und schätzen ab:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\dots\cdot n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} 1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot\dots\cdot(1-\frac{k-1}{n})\frac{1}{k!} \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} \\
&< 1+1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\dots+\frac{1}{n(n-1)} \\
&= 1+1+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\dots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) \\
&= 1+1+1-\frac{1}{n} < 3
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $f(n) < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Also ist die Folge $f$ nach oben beschränkt. Nach dem Satz über Grenzwert monotoner Folgen besitzt $f$ einen reellen Grenzwert, nennen wir diesem $e$. Da $f(n) < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt aus dem Satz über $\leq$ und Grenzwertem, dass $e \leq 3$ sein muss. Da $e = \sup\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ist, gilt $e \geq f(2) = (1+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2$. □

Motivation: Betrachten wir ein Model für Wachstum einer Größe $x$, wo die Änderung der Größe proportional (mit Konstante $c$) zu der Größe und zu der Zeitspanne ist, also das Model

$$\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{t_{i+1}-t_i} = c\cdot x(t_i), \qquad i \in \mathbb{N}\ .$$

Das ist eine Differenzengleichung für die Unbekannte Folge $x(t_i), i \in \mathbb{N}$, da das Modell als

$$x(t_{i+1}) = ((t_{i+1}-t_i)c+1)x(t_i)$$

umgeschrieben werden kann. Angenommen, dass $t_i = i\cdot\frac{T}{n}$ gilt und dass $x(t_0)$ gegeben ist ($T > 0$ gegeben, $n \in \mathbb{N}$ gegeben, es interessiert uns nur $x(t_i)$ für $i = 1,\dots,n$ und insbesondere $x(T)$). Man kann dann die Lösung der Differenzengleichung angeben und insbesondere gilt

$$x(T) = x(t_n) = \left(1+\frac{cT}{n}\right)^n x(t_0)\ .$$

Wenn wir $T$ festhalten und die Zeitspannen $t_{i+1}-t_i$ immer kleiner wählen, also $n$ immer größer betrachten, erkennen wir eine Folge $(1+\frac{1}{cT})^n$, $n \in$

$\mathbb{N}$. Man kann zeigen, dass auch diese Folge einen reellen Grenzwert besitzt. Wenn man die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \lim_n(1 + \frac{x}{n})^n$ definiert, dann kann man zeigen, dass diese Funktion die folgende Eigenschaften hat:

$$f(0) = 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: \; f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \; f(n) = e^n \; .$$

Wir nennen sie deshalb **Exponentialfunktion zur Basis** $e$.

Eine andere Motivation ist Zinseszins: Mit Anfangskapital $k_0$ und Zinssatz $p_0 \in [1, 100]$ und monatlicher (also 12-mal im Jahr) Verzinsung, wird das Kapital nach 100 Jahren berechnet durch

$$(1 + \frac{\frac{p}{12}}{100})^{12 \cdot 100} \; .$$

Wenn man es jedes ein $m$-tel des Jahres auszahlt, wird das Kapital berechnet durch

$$(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100})^{m \cdot 100} \; .$$

Für $p = 1$ erkennen wir eine Teilfolge der Folge $f$.

**Ende 10. Vorlesung, 25.11.2016**

**Merkwürdige Folgen** (In der Vorlesung nicht gemacht)

- Seien $a_1, d \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gegeben. Definiere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) wie folgt: $f(1) = a_1, f(n+1) = f(n) + d$ für $n \in \mathbb{N}$ (also eine rekursiv definierte Folge). Man kann mit Hilfe der vollständigen Induktion zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = a_1 + d \cdot (n-1)$ gilt. Die Folge $f$ heißt **arithmetische Folge**.

- Seien $b_1, q \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gegeben. Definiere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) wie folgt: $f(1) = b_1, f(n+1) = f(n) \cdot q$ für $n \in \mathbb{N}$ (also eine rekursiv definierte Folge). Man kann mit Hilfe der vollständigen Induktion zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = b_1 \cdot q^{n-1}$ gilt. Die Folge $f$ heißt **geometrische Folge**.

- $(a_n)$ mit $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine reelle Folge, die sogenannte **Fibonacci-Folge**

- $(1, 3, 5, 7, 11, ....)$ (Primzahlen) ist eine reelle Folge, obwohl es keine direkte Formel für die $n$-te Primzahl gibt

- Sierpiński Dreieck (ein Fraktal) als eine Folge von Figuren in der Ebene

- Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) eine Folge. Definiere die neue Folge $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) folgenderweise: $s(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt **Partialsummenfolge der Folge** $f$. Definiere die neue Folge $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) folgenderweise: $p(n) = \prod_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt **Partialproduktfolge der Folge** $f$.

**11. Vorlesung, Montag 28.11.2016**

# 8 Reihen

Ziele:

- Interpretation von unendlichen dezimalen Brüchen
- Einführung der Exponentialfunktion, Sinus- und Kosinusfunktion
- Rechenfertigkeit üben
- eine Art von Integration

## 8.1 Definition, Konvergenzkriterien

Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit $+$ und $\cdot$ sind Körper und besitzen die Euklidische Metrik. Deswegen kann man addieren, multiplizieren und Grenzwert berechnen .

**Definition** Wenn eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) gegeben ist, dann heißt die Folge $s$, die durch $s(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$, definiert ist, **reelle (bzw. komplexe) Reihe** . Die Zahl $f(n)$ heißt ihr $n$**-ter Summand** und die Zahl $s(n)$ heißt ihre $n$**-te Partialsumme**.

Falls die Folge $s$ einen reellen (bzw. komplexen) Grenzwert $A$ besitzt, sagen wir, dass die Reihe $s$ **konvergent** ist und ihre **Summe** $A$ ist, abgekürzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = A \ .$$

(Das ist also eine neue Notation für $\lim_n s(n) = A$.)

Falls die Folge $f$ reell ist und die Folge $s$ den Grenzwert $+\infty$ (bzw. $-\infty$) besitzt, sagen wir, dass die Reihe $s$ **uneigentlich konvergent** (oder **bestimmt divergent**) ist und ihre **Summe** $+\infty$ (bzw. $-\infty$) ist, abgekürzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = +\infty \ ( \text{ bzw. } -\infty) \ .$$

Falls die Folge $s$ keinen Grenzwert (also weder einen reellen noch $+\infty$ oder $-\infty$ als Grenzwert) besitzt, dann sagen wir, dass die Reihe $s$ **divergent** ist und wir schreiben abgekürzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ existiert nicht} .$$

Analog gilt oben genanntes für die Partialproduktfolge $p(n) = \prod_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$, welche **unendliches Produkt** heißt. Wenn sie einen reellen (bzw. komplexen) Grenzwert $B$ besitzt, dann sagen wir, dass das unendliche Produkt **konvergent** ist, sein Wert $B$ ist und wir schreiben dies abgekürzt als

$$\prod_{k=1}^{\infty} f(k) = B .$$

**Beispiel** $0,\overline{9}$**.** Wir definieren die Folge $f$ durch $f(n) = \frac{9}{10^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n} .$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung für $x = 9$ folgt, dass

$$\frac{1}{1 + 9n} \geq \frac{1}{(1 + 9)^n}$$

und daraus folgt

$$0 \leq \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{1 + 9n} \leq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_n 0 = 0$ und $\lim_n \frac{1}{9}\frac{1}{n} = 0$, folgt aus dem Satz über zwei Gendarmen, dass $\lim_n \frac{1}{10^n} = 0$ ist und damit $\lim_n s(n) = 1 - 0 = 1$ ist. Das heißt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1 .$$

Wir interpretieren dieses Resultat so, dass die periodische Dezimalzahl $0,\overline{9}$ ist gleich 1.

Für ein $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gegeben heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ **geometrische Reihe**. Ihre Summe kann man mit der gleichen Methode wie oben untersuchen.

**Beispiel** Sei $f(n) = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $f(n) > 0$ ist, ist die Folge der Partialsummen $s$ eine streng monoton wachsende reelle Folge. Wir zeigen, dass sie nich nach oben beschränkt ist. Daraus folgt dann, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ die Summe $+\infty$ hat. Da

$$\begin{aligned} s(2^m) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^m} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \dots 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = 1 + m\frac{1}{2} \end{aligned}$$

für beliebige $m \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Folge $s$ nicht nach oben beschränkt und damit den Grenzwert $+\infty$ hat. Das heißt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \ .$$

Diese Reihe heißt **harmonische Reihe**.

Folgende Aussagen können wir ohne weitere Theorie nicht beweisen. Die notwendige Theorie folgt in dem nächsten Absatz.

**Satz (Konvergenzkriterien, hinreichende Bedingungen)** Für reelle (bzw. komplexe) Reihen gelten folgende Aussagen.

i) **Majorantenkriterium** (In der Vorlesung noch nicht gemacht) Wenn die reelle Reihe $\sum b_n$ konvergent ist, und $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die (reelle bzw. komplexe) Reihe $\sum a_n$ konvergent und für ihre Summe gilt:

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ .$$

ii) **Quotientenkriterium** Betrachte die (reelle oder komplexe) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere die (reelle) Folge $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $q(n) = (\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})$ für $n \in \mathbb{N}$. Falls die Folge $q$ einen reellen Grenzwert $A$ besitzt und $A < 1$ ist, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Falls die Folge $q$ den reellen Grenzwert $A$ mit $A > 1$ oder den Grenzwert $+\infty$ hat, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

iii) **Wurzelkriterium** Betrachte die (reelle oder komplexe) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Definiere die (reelle) Folge $w$ durch $w(n) = \sqrt[n]{|a_n|}$ für $n \in \mathbb{N}$. Falls die Folge $w$ einen reellen Grenzwert $B$ besitzt und $B < 1$ ist, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Falls die Folge $w$ den reellen Grenzwert $B$ mit $B > 1$ oder den Grenzwert $+\infty$ besitzt, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

**Satz (notwendige Bedingung)** Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent ist, dann besitzt die Folge $f$ den Grenzwert 0.
**Ende 11. Vorlesung**

**12. Vorlesung Montag 4.12.2016**

**Definition** Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ eine Folge. Wenn die (reelle) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)|$ konvergent ist, dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ **absolut konvergent**. (Ihre Summe ist i.a. nicht bekannt!)

Folgende Aussagen folgen direkt aus den Rechenregeln für Folgen. Die Beweise sind einfach, zur Übung gelassen.

**Satz (Rechenregeln für + und ·)** Für reelle bzw. komplexe Reihen gelten folgende Aussagen.

a) Falls die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent sind, dann ist die Reihe $\sum(a_n + b_n)$ auch konvergent und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ .$$

b) Falls die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist und $c \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) eine Zahl ist, dann ist die Reihe $\sum(ca_n)$ auch konvergent und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

c) Falls die Produkte $\prod a_n$ und $\prod b_n$ konvergent sind, dann ist das Produkt $\prod(a_n \cdot b_n)$ auch konvergent und es gilt:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n) = \prod_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \prod_{n=1}^{\infty} b_n \ .$$

Bemerkung. a) ist die Verallgemeinerung des Rechenregels

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)$$

auf unendliche Summen. b) ist die Verallgemeinerung der Formel

$$ca_1 + ca_2 = c(a_1 + a_2)$$

und c) ist die Verallgemeinerung von

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot (b_1 \cdot b_2) = (a_1 \cdot b_1) \cdot (a_2 \cdot b_2) \ .$$

Die Formel

$$(a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + \cdots + a_3b_3$$

hat auch eine Verallgemeinerung, aber diese ist komplizierter, siehe später. Erstmal muss man die Reihenfolge der Summanden auf der rechten Seite entscheiden. Außerdem gilt die Kommutativität für unendlich viele Summanden nicht. Beispielweise betrachten wir die Zahlen

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1-, \ldots$$

und diese in zwei Folgen angeordnet: $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1, \ldots$ (jeweil eine $+1$ und eine $-1$ abwechselnd), $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 1, b_4 = 1, b_5 = -1, b_6 = 1, b_7 = 1, \ldots$ (jeweils eine $-1$ abwechselnd mit mehreren 1, die Anzahl van 1 steigt immer um eins). Man kann durch Untersuchung der Partialsummenfolge festellen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ existiert nicht aber $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$. Die Kommutativgesetz gilt für Reihen, welche absolut konvergent sind (hier ohne Beweis).

Folgender Satz ist Verallgemeinerung der Aussage

$$a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2 \Rightarrow (a_1 + a_2) \leq (b_1 + b_2) \ .$$

**Satz (Rechenregeln für $\leq$)** Für reelle Reihen gelten folgende Aussagen.

a) Falls die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent sind und es gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für die Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ .$$

b) Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Summe $+\infty$ hat und es gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Summe $+\infty$.

Beweis Übung.

## 8.2 Exkurz: Kombinatorik

Ziel ist Kombinatorische Begriffe Aufgrund der Mengentheorie zu Einführen. Einführung aus Wahrscheinlichkeitstheorie wird Stoff der Vorlesung Stochastik. Unter anderen wollen wir den binomischen Satz beweisen.

Sei $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine Menge aus $n$ verschiedenen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Betrachte Abbildungen $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to M$ welche bijektiv sind. Wieviele solche gibt es insgesamt ? Antwort: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$. Man nennt diese Zahl $n$ **Fakultät** und bezeichnet durch $n!$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Betrachte Abbildungen $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to M$ welche injektiv sind. Wieviele solche gibt es insgesamt ? Antwort: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1)$.

Diese Abbildungen modellieren Anordnungen von $k$ Stück Elementen gewählt aus $n$ Elementen. Jedes Element kommt höchstens einmal vor. Anordnungen von allen Elementen der Menge heißen **Permutationen**.

Wir gehen wieder davon aus, dass die Menge $M$ und die Zahl $k$ gegeben sind. Betrachte Teilmengen $A \subset M$ welche $k$ Elementen haben. Wieviele solche gibt es insgesamt ? Wir können diese Zahl mit Hilfe von Anordnungen berechnen: $\frac{n!}{k! \cdot (n-1)!}$. Man nennt diese Zahl **Kombinationszahl** und bezeichnet durch $\binom{n}{k}$, lese $n$ **über** $k$. Da 0-Elementige Teilmenge von $M$ gibt es genau eine (die leere Menge), setze $\binom{n}{0} = 1$. Wir definieren zusätzlich noch $0! = 1$. Die Kombinationszahl $\binom{n}{k}$ gibt an, an wieviele weise kann man aus $n$ Elementen $k$ Stück rausnehmen. Jedes Element kommt höchstens einmal vor und die Reihenfolge ist nicht entscheidend.

Mit der obigen Interpretation der Kombinationszahlen können folgende Formel beweisen:

$$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \cdots \cdot (a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Mit der gleichen Interpretation können die Felder für den folgenden Spiel ausgefüllt werden: man darf nur schräg nach rechts nach unten oder gerade nach unten gehen. An wieviele Weise kann man in einem gegebenen Kästchen ankommen ? Schreibe diese Zahl in das Kästchen. Wenn die Zeilen von oben ab 0 und die Spalten von links ab 0 numeriert sind, steht an der Stelle der $n$-ter Zeile und $k$-ter Spalte die Zahl $\binom{n}{k}$. Das ausgefüllte Spielfeld heißt **Pascalsches Dreick**. Wir können noch folgenden Zusammenhang feststellen:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ (wir setzen $\binom{0}{0} = 1$).

Bemerkung: Mit Abbildungen $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to M$ bzw. $f : \mathbb{N} \to M$ sind endliche bzw. unendliche Folgen der Elementen der Menge $M$ modelliert, hier ist die Reihenfolge zu beachten. Teilmengen kann man mit Abbildungen $f : M \to \{0, 1\}$ modellieren (ein Element $a_i \in M$ ist Element der Teilmenge $A$, falls $f(a_i) = 1$ und $a_i \notin A$, falls $f(a_i) = 0$), hier ist die Reihenfolge nicht zu beachten. Wenn wir uns auf Telmengen mit $k$ Elementen einschränken wollen, formulieren wir die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) = k\ .$$

Wenn wir erlauben wollen, dass ein Element "öfter in die Teilmenge gewählt" sein darf, dann kann man diese mit einer Abbildung $f : M \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ modellieren (das Element $a_i$ ist $f(a_i)$-mal gezählt). Wenn wir uns auf insgesamt $k$ Elemente (mit Vielfachheit gewählt) einschränken wollen, nehmen wir die Einschränkung

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) = k$$

auf die Abbildung dazu.
**Ende 12. Vorlesung**

**13. Vorlesung Freitag 9.12.2016**

## 8.3 Cauchy-Folgen, Beweis von Konvergenzkriterien

Ziele:

- entscheiden, ob eine Folge konvergent ist, ohne ihren Grenzwert zu kennen;
- die Konvergenzkriterien zu Beweisen;
- Anwendungen.

**Definition** Sei $M$ eine Menge, $d$ eine Metrik auf $M$ und $f : \mathbb{N} \to M$ eine Folge. Die Folge $f$ heißt **Cauchy-Folge**, falls sie folgende Eigenschaft hat:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \in \mathbb{N} \; : \; n > n_0 \; \wedge \; m > n_0 \; \Rightarrow \; d(f(n), f(m)) < \varepsilon \; .$$

Für reelle Folgen bedeutet die Aussage “die Folge besitzt einen reellen Grenzwert”, dass der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert klein wird. Cauchy-Folge sein bedeutet, dass der Abstand von Folgengliedern zueinander klein wird.

**Satz** Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik und sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine reelle Folge.

i) Wenn die Folge $f$ einen reellen Grenzwert besitzt, dann ist sie eine Cauchy-Folge.

ii) Wenn $f$ eine Cauchy-Folge ist, dann besitzt sie einen reellen Grenzwert.

Beweis von i). Hinweis: Wenn $A$ der Grenzwert ist, gilt

$$d(f(n), f(m)) = d(f(n), A) + d(f(m), A) \; .$$

Beweis von ii). Wir führen den Beweis in mehreren Schritten durch. Nehmen wir an, dass $f$ eine Cauchy-Folge ist.

1.Schritt: Wir zeigen, dass $f$ beschränkt ist. Da, $f$ Chauchy-Folge ist, existiert $n_1 \mathbb{N}$ zu $\varepsilon = 1$. $\max\{f(1), f(2), \ldots, f(n_1+1), f(n_1+1)+1\}$ ist dann eine obere Schranke, und $\min\{f(1), f(2), \ldots, f(n_1+1), f(n_1+1)-1\}$ eine untere Schranke für den Wertebereich $f(\mathbb{N})$).

2. Schritt: Wir definieren zwei neue Folgen $s$ und $i$. Für jede $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \{f(n), f(n+1), \ldots\} = \{f(k) : k \geq n\}$. Es gilt $M_n \subset W_f \subset \mathbb{R}$, also ist die Menge $M_n$ beschränkt. Sie ist offensichtlich nicht leer, folglich besitzt sie sowohl Supremum auch Infimum. Setze $s(n) = \sup M_n$ und $i(n) = \inf M_n$.

3. Schritt: Da $M_{n+1} \subset M_n$ ist, gilt $s(n+1) \leq s(n)$ und $i(n+1) \geq i(n)$. Damit ist die Folge $s$ monoton Fallend und die Folge $i$ monoton wachsend. Da, insbesondere, $s$ nach unten und $i$ nach oben beschränkt sind, besitzen beide Folgen reelle Grenzewerte. Seien $A = \lim s$ und $B = \lim i$. Da $i(n) \leq s(n)$ ist, gilt $B \leq A$. Ausserdem gilt $i(n) \leq B$ und $s(n) \geq A$.

4. Schritt: Wir zeigen, dass $B < A$ nicht möglich ist. Mit Widerspruch, wenn $B < A$ wäre, dann wäre $\frac{A-B}{4}$ eine positive reelle Zahl. Da $f$ eine Cauchy-Folge ist, für $\varepsilon = \frac{A-B}{4}$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ und $m > n_0$ gilt

$$m > n_0 \wedge n > n_0 \; \Rightarrow \; d(f(n), f(m)) < \varepsilon \; .$$

Da $i(n_0+1)$ die größte untere Schranke der Menge $M_{n_0+1}$ ist, kann $i(n_0+1)+\varepsilon$ nicht untere Schranke dieser Menge sein. Folglich existiert ein Element $f(k_1) \in M_{n_0+1}$ (also existiert $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n_0+1$) mit

$$i(n_0+1)+\varepsilon > f(k_1) \ .$$

Da $s(n_0+1)$ die kleinste obere Schranke der Menge $M_{n_0+1}$ ist, kann $s(n_0+1)-\varepsilon$ nicht obere Schranke dieser Menge sein. Folglich existiert ein Element $f(k_2) \in M_{n_0+1}$ (also existiert $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n_0+1$) mit

$$s(n_0+1)-\varepsilon < f(k_2) \ .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(k_2)-f(k_1) &> s(n_0+1)-\varepsilon-(i(n_0+1)+\varepsilon)0 = s(n_0+1)-i(n_0+1)-2\varepsilon \\ &\geq A-B-2\varepsilon = 2\varepsilon > \varepsilon \end{aligned}$$

und damit $d(f(k_1), f(k_2)) > \varepsilon$. Das ist ein Widerspruch.

5. Schritt: Aus 3. und 4. folgt, dass $A = B$ ist. Wir zeigen zunächts, dass diese Zahl $A$ Grenzwert der Folge $f$ ist. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$i(n) \leq f(n) \leq s(n)$$

und die Folgen $s$ und $i$ den gleichen Grenzwert, $A$, haben, hat nach dem Satz über zwei Gendarmen die Folge $f$ auch den Grenzwert $A$.

**Satz (Majorantenkriterium)** Betrachten wir zwei Reihen $\sum a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, wo die Zahlen $a_k, b_k$ folgende Bedingung erfüllen:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \ |a_k| \leq b_k \ .$$

Wenn die Reihe $\sum b_n$ konvergent ist, und $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent.

Beweis. Seien die entsprechende Partialsummenfolgen $s$ und $t$, d.h $s(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t(n) = \sum_{k=1}^{n} b_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $\sum b_k$ eine Konveregnte Reihe ist, hat die Folge $t$ einen reellen Grenzwert, und damit ist sie eine Cauchy-Folge. Wir zeigen nun, dass $t$ eine Cauchy-Folge ist. Dann hat sie einen (reellen oder komplexen) Grenzwert, d.h. $\sum a_k$ ist konvergent.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $s$ eine Cauchy-Folge ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ und $m > n_0$ gilt $d(s(n), s(m)) < \varepsilon$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} d(t(n), t(m)) = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k \\ = s(m)-s(n) = d(s(n), s(m)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für $n < m$, $d(t(n), t(m)) = 0 < \varepsilon$ für $n = m$ und

$$d(t(n), t(m)) = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$
$$= s(n) - s(m) = d(s(n), s(m)) < \varepsilon$$

für $n > m$. Wir haben bewiesen, dass $s$ eine reelle Cauchy-Folge ist. Dann hat sie einen reellen Grenzwert, d.h. die Reihe ist konvergent.

□

**Ende 13. Vorlesung**

**14. Vorlesung Montag 12.12.2016**

**Satz (über komplexen Cauchy-Folgen)** Sei $\mathbb{C}$ mit der Euklidischen Metrik aus $\mathbb{R}$ ausgestattet. Eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ besitzt genau dann einen komplexen Grenzwert, wenn sie Cauchy-Folge ist.

Idee des Beweises: $z \in \mathbb{C} \iff \exists x, y \in \mathbb{R} : \; z = x + \mathrm{i}y$ (mit einem Symbol i welches $\mathrm{i}^2 = -1$ erfüllt). Somit lässt sich jede komplexe Folge $f$ als $f = g + \mathrm{i}h$ mit zwei reelle Folgen $g, h$ schreiben. Da

$$d(f(n), f(m)) = \sqrt{|g(n) - g(m)|^2 + |h(n) - h(m)|^2} \, ,$$

man kann zeigen, dass $f$ genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $g$ und $h$ Cauchy-Folgen sind. Aus dem gleichen Grund hat $f$ genau dann einen komplexen Grenzwert, wenn $g$ und $h$ reelle Grenzwerte besitzen. Aus dem Satz über reellen Cauchy-Folgen fogt dann der Beweis dieses Satzes.

Bemerkung. Analoge Aussage gilt auch für $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik, aber es gibt Mengen und Metriken, wo sie nicht gilt.

**Beispiel** Betrachte die Menge $M_1 = \mathbb{N}$ mit der Metrik $d_1$ definiert mit Hilfe der stereographische Projektion (wie in der Aufgabe ....). Man kann einfach nachprüfen, dass die folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{M}_1$ definiert durch $f(n) = n$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge (bzgl. dieser Metrik!) ist aber keinen Grenzwert in der Menge $M_1$ besitzt.

Betrachte die Menge $M_2 = \mathbb{N} \cup \{\heartsuit\}$ mit der erweiterte Metrik $d_2$ (siehe Aufgabe ...). Man kann einfach nachprüfen, dass die Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{M}_2$ definiert durch $f(n) = n$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge ist und den Grenzwert $\heartsuit \in M_2$ besitzt. Man kann die Menge $M_2$ als **Vervollständigung** der Menge $M_1$ um fehlende Grenzwerte von Cauchy-Folgen sehen. Es ist üblich, das Symbol $\infty$ statt $\heartsuit$ zu benutzen.

In diesem Sinn kann man die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ als Vervollständigung der Menge der rationalen Zahlen um die fehlende Grenzwerte von Cauchy-Folgen (bzgl. der Euklidischen Metrik) sehen.

So kann die Menge $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ als Vervollständigung der Menge $\mathbb{R}$ gesehen werden (Übung: gebe an, welche Metrik man dafür nehmen soll). Auch $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (Übung: gebe wieder eine passende Metrik an).

Das sind mathematische Modelle gewesen. Beachte aber, dass $\infty$ keine natürliche Zahl und $+\infty$ keine reelle Zahl ist!

**Definition** Ist $M$ eine Menge mit einer Metrik $d$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ eine Folge, so heißt $f$ **konvergent (in $M$ bzgl. $d$)**, wenn sie einen Grenzwert in $M$ bezüglich $d$ besitzt.

Beweis des Wurzelkriteriums:

Nehmen wir an, dass $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}$ und $q < 1$ ist. Für $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ gilt $d(\sqrt[n]{|a_n|}, q) < \varepsilon$. Es folgt $|a_n| \leq (q+\varepsilon)^n$ für alle $n > n_0$. Definiere $b_n = a_n$ für $n \leq n_0$ und $b_n = (q+\varepsilon)^n$ für $n > n_0$. Da $0 < q+\varepsilon < 1$ ist, kann man leicht zeigen, dass die Reihe $\sum b_k$ konvergent ist (wie für geometrische Reihe). Nach dem Majorantenkriterium ist deshalb die Reihe $\sum a_k$ auch konvergent. Genaue Überlegung zeigt, dass sie sogar absolut konvergent ist.

Beweis des Quotientenkriteriums: Nehmen wir an, dass $\lim_n \frac{a_{n+1}|}{|a_n|} = q \in \mathbb{R}$ und $q < 1$ ist. Für $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ gilt $d(\frac{|a(n+1)|}{|a_n|}, q) < \varepsilon$. Es folgt für $n > n_0$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q + \varepsilon,$$
$$|a_{n+1}| < (q+\varepsilon)|a_n| < (q+\varepsilon)^2|a_{n-1}| < \cdots < (q+\varepsilon)^n|a_1| \ .$$

Da $0 < q+\varepsilon < 1$, mit $b(n) = |a_n|$ für $n \leq n_0$ und $b(n) = (q+\varepsilon)^{n-1}|a_1|$ für $n > n_0$ und Majorantenkriterium folgt, dass $\sum a_k$ konvergent, sogar dass $\sum a_k$ absolut konvergent ist. $\square$

Anwendung in der Numerik:

**Banachscher Fixpunktsatz** Sei $M$ eine Menge mit einer Metrik $d$ so, dass jede Cauchy-Folge konvergent ist. Sei $f : M \to M$ eine Abbildung und nehmen wir an, dass es eine Zahl $L$ mit $0 < L < 1$ existiert so, dass

$$\forall x, y \in M : \ d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

Sei $x_0 \in M$ und sei die Folge $g : \mathbb{N} \to M$ definiert durch $g(1) = f(x_0)$, $g(n+1) = f(g(n))$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt ist die Folge $g$ konvergent und ihr Grenzwert ist die einzige Lösung der Gleichung $f(x) = x, x \in M$ .

Beweis in Numerik. Interpretation: Die Folge gibt ein iteratives Verfahren für Lösung der Gleichung $f(x) = x$.

**Ende 14. Vorlesung**

**15. Vorlesung Montag 19.12.2016**

## 8.4 Dezimalbruchdarstellung

**Satz**

a) Jede Folge $a_N, a_{N-1}, \dots$ von Ziffern aus $\{0, 1, \dots, 9\}$ zusammen mit der Zahl $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ representiert eine reelle Zahl $x \geq 0$ als die Summe der Reihe
$$\sum_{k=-\infty}^{N} a_k 10^k = \lim_n \sum_{k=-n}^{N} a_k 10^k \ .$$

b) Umgekehrt, zu jede reelle Zahl $x \geq 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und eine Folge von Ziffern $a_N, a_{N-1}, a_{N-2}, \dots$ aus $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ so, dass
$$x = \sum_{k=-\infty}^{N} a_k 10^k \ .$$

c) Die Abbildung $(N, a) \mapsto x$ ist nicht injektiv, die einzige Stellen, welche sich auf die gleiche reelle Zahl abbilden, sind die schließlich periodische Dezimalbrüche mit Periode 9 und die entsprechende Dezimalbrüche "mit Periode 0", z.B.
$$..., ...1000... = ..., ...0999... \ .$$

Beweis a) Sind $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für jede $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq N$ gegeben, dann gilt $|a_k 10^k| \leq 9 \cdot 10^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq N$. Die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{N} 10^k$ ist konvergent, da der reelle Grenzwert $\lim_n \sum_{k=-n}^{N} 10^k$ existiert (diesen kann man berechnen, vergleiche mit der geometrischen Reihe !). Aus dem Majorantenkriterium folgt, dass die Reihe
$$\sum_{k=-\infty}^{N} a_k 10^k$$

(absolut) konvergent ist.

b) Für eine gegebene reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ werden wir ein $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $a_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für jede $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq N$ konstruieren. Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x < 10^{n+1}\}$ ist Teilmenge der Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$, sie ist nicht leer und deswegen besitzt ein Minimum, sei deses Minimum mit $N$ bezeichnet. Setze $a_N = \lfloor \frac{x}{10^N} \rfloor$. Dann ist $a_N \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ und aus der Eigenschaft der Operation $\lfloor . \rfloor$ folgt

$$\left( \frac{x}{10^N} - 1 \right) 10^N < a_N \cdot 10^N \leq x,$$
$$0 \leq \frac{x - a_N 10^N}{10^{N-1}} < 10 \ .$$

Setze $a_{N-1} = \lfloor \frac{x - a_N 10^N}{10^{N-1}} \rfloor$. Dann ist $a_{N-1} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ und

$$\left( \frac{x - a_N 10^N}{10^{N-1}} - 1 \right) 10^{N-1} < a_{N-1} 10^{N-1} \leq x - a_N 10^N,$$
$$0 \leq \frac{x - a_N 10^N - a_{N-1} 10^{N-1}}{10^{N-2}} < 10 \ .$$

Setze $a_{N-2} = \lfloor \frac{x - a_N 10^N - a_{N-1} 10^{N-1}}{10^{N-2}} \rfloor$. Dann ist $a_{N-2} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ und

$$\left( \frac{x - a_N 10^N - a_{N-1} 10^{N-1}}{10^{N-2}} - 1 \right) 10^{N-2} < a_{N-2} 10^{N-2} \leq x - a_N 10^N - a_{N-1} 10^{N-1},$$
$$0 \leq \frac{x - a_N 10^N - a_{N-1} 10^{N-1} - a_{N-2} 10^{N-2}}{10^{N-3}} < 10 \ ,$$

usw. Mit diesem Verfahren erhalten wir eine Folge von Ziffern $a_N, a_{N-1}, a_{N-2}, \ldots$. Die Partialsummenfolge $s$ mit $s(n) = a_N 10^N + a_{N-1} 10^{N-1} + \ldots a_{-n} 10^{-n}$ der Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{N} a_k 10^k$$

erfüllt $0 \leq x - s(n) \leq 10^{-n}$, woraus folgt

$$x - \leq 10^{-n} < s(n) \leq x$$

für alle $n$. Aus dem Satz über zwei Gendarmen folgt dann $\lim_n s(n) = x$.

c) Ohne Beweis. Wir bemerken, dass für die Zahl $x = 1$ diese Konstruktion die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{0} a_k 10^k$ mit $a_0 = 1, a_{-1} = 0, a_{-2} = 0, \ldots$ liefert, wobei auch (geometrische Reihe) $\sum_{k=-\infty}^{-1} 9 \cdot 10^k = 1$ ist. Also hat die Zahl $x = 1$ zwei Darstellungen:

$$1 = 1,000 \cdots = 0,999 \ldots \ .$$

$\square$

**Satz**

a) Es gibt keine bijektive Abbildung aus der Menge $\mathbb{N}$ in die Menge $\mathbb{R}$.

b) Es gibt bijektive Abbildung aus der Menge $\mathbb{N}$ in die Menge $\mathbb{Q}$.

Wir sagen, dass die Menge $\mathbb{Q}$ **abzählbar** und die Menge $\mathbb{R}$ **nicht abzählbar** ist. Als Folgerung bekommen wir, dass die Menge $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ auch nicht abzählbar ist. Es gibt also "viel mehr" irrationale Zahlen als rationale Zahlen, wobei es "genauso viele" rationale Zahlen wie natürliche Zahlen gibt.

Beweis von a) mit Widerspruch. Nehmen wir an, es existiere eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, welche bijektiv ist. Dann ist $f$ surjektiv, also für jede reelle Zahl $x$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = f(n)$. Schreibe jede $f(n)$ in Dezimalbruchdarstellung, und damit die Folge $f$, auf:

$$\begin{aligned}
&f(1) = ..., .....\\
&f(2) = ..., ...\\
&...
\end{aligned}$$

Wir konstruieren jetzt folgende Dezimalzahl $0, b_1b_2\dots$ mit $b_i = 1$ falls in der Zahl $f(i)$ an der $i$-ter Stelle nach der Komma nicht die Ziffer 1 steht und $b_i = 2$ sonst, für $i \in \mathbb{N}$. Diese Darstellung representiert eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, welche keiner der Zahlen $f(i)$ gleich sein kann. Folglich ist $x$ nicht im Wertebereich von $f$, was Widerspruch zu unsere Behauptung ist.

Idee des Beweises von b) Wir konstruieren eine Folge von allen rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $p, q$ teilerfremd, mit Hilfe der Spirale aus der Aufgabe 1.2. Die Anordnung wird nach der Reihenfolge der Punkte $(p, q)$ auf der Spirale, doppelte und nicht definierte Brüche lassen wir aus.

$\square$

## 8.5 Exponentialfunktion

Ziel ist es, die Exponentialfunktion als

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für $x \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu definieren. Beachte, dass wir $0^0 = 1$ und $0! = 1$ definieren.

**Satz**

i) Für jede $x \in \mathbb{R}$ (auch für $x \in \mathbb{C}$) ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergent, und auch absolut konvergent. ihre Summe sei durch $f(x)$ bezeichnet.

ii) $f(0) = 1$, $f(1) = e$.

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$

iv) Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

v) $f(\mathbb{R}) \subset ]0, +\infty[$

vi) Die Funktion $f$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

vii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) = e^n$.

viii) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ und allgemein für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.

ix) Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = +\infty$ und $\lim_{x\to -\infty} f(x)x^n = 0$.

Beweis. i) Für $x = 0$ ist die Partialsummenfolge $s$ mit $s(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, welche den Grenzwert 1 hat. D.h. die Reihe ist für $x = 0$ konvergent (und ihre Summe ist 1). Für $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit $x \neq 0$ können wir den Quotientenkriterium benutzen, da

$$\lim_n \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \ ,$$

weswegen die Reihe konvergent (sogar absolut konvergent) ist. Aber wir kennen ihre Summe nicht.

ii) Wir haben schon bewiesen, dass $f(0) = 1$ ist.

$$\begin{aligned}
f(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}, \\
e &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-k}{n})
\end{aligned}$$

Wir lassen an dieser Stelle ohne Beweis, dass die zwei oben geschriebene Folgen den gleichen Grenzwert besitzen. Für eine Ausführung dieses Argumentes siehe z.B. [Königsberger: Analysis 1].

iii) Für $x \neq 0$ können wir wie folgt rechnen:

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} = 1 + x \lim_n \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!} \ .$$

Da für $x$ mit $|x| \leq 1$ $|\frac{x^{k-2}}{k!}| \leq \frac{1}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt und die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = A$ konvergent ist, folgt, dass $|\lim_n \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!}| \leq A$ ist. Man kann dann aus der Definition beweisen, dass 1 Grenzwert der Funktion $\frac{f(x)-1}{x}$ an der Stelle 0 ist. (Übung!)

**Ende 15. Vorlesung**

iv) (In der Vorlesung nicht gemacht)

$$\begin{aligned}
f(x) \cdot f(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!} \\
&= \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{n} \frac{y^l}{l!} = \lim_n \sum_{h=0}^{2n} \sum_{k,l \in \mathbb{N}\cup\{0\}, k+l=h} \frac{x^k y^l}{k! l!} \\
&= \lim_n \sum_{h=0}^{2n} \sum_{l=0}^{h} \frac{1}{(h-l)! \cdot l!} x^{h-l} y^l \ , \\
f(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \lim_n \sum_{k=0}^{2n} \frac{(x+y)^k}{k!} \\
&= \lim_n \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{(k-l)! \cdot l!} y^l x^{k-l} = \lim_n \sum_{k=0}^{2n} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)! \cdot l!} y^l x^{k-l}
\end{aligned}$$

Diese zwei Grenzwerte sind gleich, da die entsprechende Folgen gleich sind.

**16. Vorlesung Freitag 6.1.2017**

v) Für $x \in \mathbb{R}$ folgt aus iv), dass $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2 \geq 0$ ist. Wenn für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) $f(x_0) = 0$ wäre, dann würde nach ii) und iii) gelten, dass $1 = f(0) = f(x_0 + (-x_0)) = f(x_0) \cdot f(-x_0) = 0 \cdot f(-x_0) = 0$, was ein Widerspruch ist.

vi) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann ist $y - x > 0$ und aus der Definition bekommen wir $f(y-x) > 1$. Ferner ist $f(y) = f(y-x+x) = f(y-x) \cdot f(x) > f(x)$, wobei wir die schon bewiesene Eigenschaften $f(x) \neq 0$ und $f(y-x) > 1$ benutzt haben.

vii) folgt aus ii) und iv).

viii) Der Beweis der erste Aussage ist analog zu dem Beweis von iii). Beweis der zweiter Aussage siehe in der nächsten Kapitel.

ix) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ gilt: da $f(x) \geq \frac{x^{n+1}}{n!}$ ist, gilt auch $\frac{f(x)}{x^n} \geq \frac{x}{n!}$. Weiter ist $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n!} = +\infty$, woraus die erste Aussage folgt. Dann gilt nach dem Satz über Grenzwert von Quotienten von Funktionen, dass $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{f(x)} = 0$. Weiter ist $\frac{1}{f(x)} = f(-x)$. Dann kann man aus der Definition des Grenzwertes die zweite Aussage herleiten.

□

Bemerkungen

- Mit der Eigenschaften $f(0) = 1$, iv) und viii) erfüllt ist eine Funktion $f$ eindeutig gegeben (hier ohne Beweis). Das heißt, dass es möglich ist, alle Eigenschaften aus diesen drei herzuleiten.

- Es gilt auch, dass $f(\mathbb{R}) = ]0, +\infty[$ ist, aber das können wir noch nicht beweisen. Wenn man das beweisen könnte, dann wäre $f : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ eine bijektive Abbildung und folglich ihre Inverse $f_{-1} : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ auch eine Abbildung. Trotzdem führen wir die Definition der Logarithmus an dieser Stelle ein.

**Definition** Die Funktion $f$ aus dem vorherigen Satz heißt **Exponentialfunktion** und ist durch $\exp x = f(x)$ bezeichnet. Die inverse Abbildung zu exp auf $\mathbb{R}$ heißt **natürliche Logarithmusfunktion** und ist durch $\ln x$ bezeichnet. D.h. $\ln = \exp_{-1}$.

**Definition** Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Die Zahl $\exp(y \cdot \ln x)$ werden wir **$y$-te Potenz von** $x$ nennen und durch $x^y$ bezeichnen.

**Satz** Für $y \in \mathbb{Q}$, $y = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ und für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt

$$\exp(\frac{p}{q} \cdot \ln(x)) = \sup\{z \in \mathbb{R} : z \geq 0 \ \wedge \ z^q < x^p\} \ .$$

Das heißt, dass die neue (allgemeine) und die alte (für den speziellen Fall) Definition der Potenz übereinstimmen, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

Ohne Beweis.

Bemerkung. Die Notation $\exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist erlaubt, sowie alle Rechneregeln der Potenznotation. Beispielweise beweisen wir hier eine.

**Satz** Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$x^{y_1+y_2} = x_1^y \cdot x_2^y \ .$$

Beweis

$$\begin{aligned} x^{y_1+y_2} &= \exp((y_1 + y_2) \cdot \ln(x)) = \exp(y_1 \cdot \ln(x) + y_2 \cdot \ln(x)) \\ &= \exp(y_1 \cdot \ln(x)) \cdot \exp(y_2 \cdot \ln(x)) = x^{y_1} \cdot x^{y_2} \end{aligned}$$

□

# 9 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

## 9.1 Definition, Zusammenhang, geometrische Bedeutung

**Definition** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, $a \in D_f$ und $r > 0$ so, dass $[a - r, a + r] \subset D_f$ ist.

a) $f$ heißt **stetig an der Stelle** $a$, falls der reelle Grenzwert

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existiert und ist gleich $f(a)$.

b) $f$ heißt **differenzierbar an der Stelle** $a$, falls der reelle Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Wir nennen diesen Grenzwert **Ableitung der Funktion** $f$ **an der Stelle** $a$ und bezeichnen durch $f'(a)$.

Beispiele

- Jede Polynomfunktion ist stetig und differenzierbar an jeder Stelle. Dies können wir mit unseren Kenntnissen beweisen.
- Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ist stetig an der Stelle 0, da $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ ist. Sie ist differenzierbar an der Stelle 0, das besagt die Aussage iii) in dem Satz über der Exponentialfunktion.

Um zu beweisen, dass die Exponentialfunktion an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist, führen wir zuerst folgende Nebenrechnungen durch:

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(a)) &= |f(x) - f(a)| = |f(x-a+a) - f(a)| \\
&= |f(x-a) \cdot f(a) - f(a)| = |f(a)| \cdot |f(x-a) - 1| \\
&= |f(a)| \cdot d(f(x-a), 1) \ .
\end{aligned}$$

Da $\lim_{z \to 0} f(z) = 1$ ist, man kann mit Hilfe der Definition zeigen, dass $f(a)$ Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle $a$ ist. (Übung!) Folglich ist $f$ stetig an einer beliebigen Stelle $a$.

$\square$

**Satz** Wenn die Funktion $f$ an der Stelle $a$ differenzierbar ist, dann ist $f$ an der Stelle $a$ stetig.

Beweis. Sei $f'(a) = A \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f$ in $a$ differenzierbar ist, zu $\varepsilon_1 = 1$ existiert $\delta_1 > 0$ so, dass für $x \in B(a, \delta_1) \setminus \{a\}$ gilt

$$d(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, A) < \varepsilon_1 \ .$$

Diese Ungleichung umgestellt lautet

$$|f(x) - f(a) - A(x-a)| < \varepsilon_1 |x - a| \ .$$

Setze $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 + |A|}\}$. Dann ist $\delta > 0$ und für $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ gilt

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(a)) &= |f(x) - f(a)| = |f(x) - f(a) - A(x-a) + A(x-a)| \\
&\leq |f(x) - f(a) - A(x-a)| + |A| \cdot |x - a| < (\varepsilon_1 + |A|)|x - a| \\
&< (\varepsilon_1 + |A|)\delta \leq (\varepsilon_1 + |A|)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 + |A|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen, dass $f(a)$ Grenzwert von $f$ an der Stelle $a$ ist. Das heißt, dass $f$ stetig in $a$ ist.

$\square$

Bemerkungen

- Geometrische Interpretation von den Term $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- Nehmen wir an, dass die Funktion $f$ an der Stelle $a$ differenzierbar ist. Definieren wir eine neue Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $g$ eine lineare Funktion (in lineare Algebra: affine Abbildung). Außerdem gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} (\frac{f(x) - g(x)}{x - a} - f'(a)\frac{x - a}{x - a}) = f'(a) - f'(a) = 0 \ .$$

- Geometrische Interpretation von den Term $\frac{d(f(x),g(x))}{d(x,a)}$.

**Ende 16. Vorlesung**

**17. Vorlesung am Montag 11.1.2017**

**Satz** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar, wenn eine lineare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = B + A(x-a)$ für $x \in \mathbb{R}$, existiert so, dass

$$\lim_{x \to a} \frac{d(f(x), g(x))}{d(x, a)} = 0 \ ,$$

wobei $d(.,.)$ die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist $f$ an der Stelle $a$ stetig, differenzierbar und $B = f(a)$ und $A = f'(a)$ und man nennt den Graph von $g$ **Tangente zu den Graph von** $f$ **an der Stelle** $a$.

Ohne Beweis, obwohl nicht schwieriger als die obige Beweise.

Beispiele

- Sei $f$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ und betrachten wir die Stelle $a = 0$. Man kann zeigen, dass die Funktion $g$ definiert durch $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ die einzige lineare Funktion ist, welche die Eigenschaft in dem oberen Satz besitzt. Diese Funktion ist an der Stelle 0 differenzierbar.

- Sei $f$ die Funktion gegeben durch $f(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$ und betrachten wir die Stelle $a = 0$. Man kann zeigen, dass keine lineare Funktion $g$ die Eigenschaft in dem oberen Satz besitzt. Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

- Sei $f$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$, betrachten wir die Stelle $a = 0$. Man kann zeigen, dass die Funktion $g$ definiert durch $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft in dem oberen Satz besitzt. Diese Funktion ist an der Stelle 0 differenzierbar.

## 9.2 Kreisfunktionen

Wir betrachten für $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) folgende Reihen:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \ , \qquad c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ .$$

Wir können beweisen, dass diese Reihen konvergent sind (Quotientenkriterium).

**Satz (über $\pi$)** Die Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

i) $c(0) = 1$

ii) $c$ ist stetig und differenzierbar an jeder Stelle.

iii) Die Menge $P = \{y \in \mathbb{R} : y > 0 \ \wedge \ ( \ \forall x \in [0, y] \ c(x) > 0 \ ) \ \}$ besitzt Supremum. Wir bezeichnen $\pi = 2 \cdot \sup P$.

Beweisidee i) durch Einsetzen, ii) wie für die Exponentialfunktion. Da $c$ stetig in 0 ist und $c(0) > 0$ ist, man kann beweisen, dass die Menge $P$ nicht leer ist. Man kann durch Einsetzen und Abschätzungen beweisen, dass $c(2) < 0$ ist, woraus folgt, dass 2 eine obere Schranke für $P$ ist. Da $P$ nicht leer und nach oben neschränkt ist, besitzt sie Supremum, welche eine reelle Zahl ist. Außerdem ist diese Zahl positiv und kleiner als 4.

$\square$

**Satz (über trigonometrische Funktionen)** Seien die Funktionen $s, c$ und die reelle Zahl $\pi$ wie oben Definiert. Es gelten folgende Eigenschaften:

(S1) $s(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

(S2) $s(0) = 0$

(S3) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $s(x + y) + s(x - y) = 2s(x)s(\frac{\pi}{2} - y)$.

(S4) Die Funktion $s$ is auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend.

(S5) $\lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$.

(SC) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $c(x) = s(\frac{\pi}{2} - x)$.

(C1) $c(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

(C2) $c(\frac{\pi}{2}) = 0$

(C3) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $c(x + y) + c(x - y) = 2c(x)c(y)$.

(C4) Die Funktion $c$ is auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend.

(C5) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{c(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$.

Ohne Beweis, Kommentare. (S1), (S2), (S5), sowie (C1) folgen aus der Darstellung als Summe der Reihe. (C3) kann man aus der Reihendarstellung beweisen, aber der Beweis ist rechentechnisch. (S3) sowie (SC) benutzt die Definition von $\pi$ und wäre auf dieser Stelle sehr kompliziert zu beweisen. Angenommen (SC) gilt, dann folgen (C1)-(C5) direkt aus (S1)-(S5) und umgekehrt. Es gilt auch: es gibt genau ein Paar von einer Funktion und einer reellen Zahl, welche die Eigenschaften (S1)-(S4) erfüllen.

**Definition** Die Funktion $s$ aus dem obigen Satz werden wir **Sinusfunktion** nennen und $c$ die **Kosinusfunktion**. Bezeichnung $\sin(x) = s(x)$ und $\cos(x) = c(x)$.

Wir skizzieren die Graphen von diesen Funktionen auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. Mit weiteren Informationen werden wir die Graphen auf den ganzen $\mathbb{R}$ erweitern.

**Satz (Symmetrie und Periodizität)** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

i) $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$,

ii) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$,

iii) $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. i) folgt aus der Definition als Reihe.

ii) Aus (S3) mit $x = \frac{\pi}{2}$ und $y = 0$ folgt $2\sin(\frac{\pi}{2}) = 2(\sin(\frac{\pi}{2}))^2$, und da nach (S2) und (S4) $\sin(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ gilt, muss $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ sein. Jetzt folgt die erste Aussage aus (S3) mit $x = \frac{\pi}{2}$.

iii) Für $k = 1$ folgt die Aussage aus i) und ii). Für allgemeine $k$ wende die schon bewiesene Aussage $k$-mal an. Übung!

$\square$

**Satz (Additionstheoreme)** Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

i) $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$,

ii) $\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$,

iii) $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$,

iv) $\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)$,

v) $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2}) \cdot \cos(\frac{x-y}{2})$,

vi) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2}) \cdot \cos(\frac{x-y}{2})$,

vii) $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.

Beweis. i) Schreibe (S3) für $x, y$ und dann für $y, x$ auf und addiere diese Gleichungen. Benutze dabei die Symmetrieeigenschaft i) aus dem vorherigen Satz.

ii) folgt aus i) und Symmetrie.

iii), iv) Übung!

vi) Schreibe (C3) und substituiere $x + y = u$, $x - y = v$. Man bekommt die Aussage vi) formuliert mit $u, v$.

v) Übung!

vii) folgt aus iii) mit $y = -x$ und Symmetrieeigenschaften.

□

**Ende 17. Vorlesung**

**18. Vorlesung am Montag 18.1.2017**

Wir können beweisen, dass $\sin[0, \frac{\pi}{2}] \subset [0, 1]$. Es gilt auch $\sin[0, \frac{\pi}{2}] = [0, 1]$, aber dies können wir noch nicht beweisen, dazu ist eine tiefere Theorie der stetigen Funktionen notwendig. Wenn wir dies bewiesen hätten, wäre $f$ definiert durch $f(x) = \sin(x)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ eine bijektive Abbildung zwischen $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $[-1, 1]$ und folglich würde $f$ eine Inverse besitzen. Trotzdem führen wir die Definition der Arkussinusfunktion ein.

**Definition** Die **Tangensfunktion** tan und die Kotangensfunktion cot sind folgenderweise definiert:

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \ , \\
\cot(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \ .
\end{aligned}$$

**Satz**

i) $x \mapsto \sin(x)$ ist eine bijektive Abbildung zwischen $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $[-1, 1]$. Ihre Inverse heißt **Arkussinus**.

ii) $x \mapsto \cos(x)$ ist eine bijektive Abbildung zwischen $[0, \pi]$ und $[-1, 1]$. Ihre Inverse heißt **Arkuskosinus**.

iii) $x \mapsto \tan(x)$ ist eine bijektive Abbildung zwischen $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $\mathbb{R}$ und sie ist streng mnoton wachsend. Ihre Inverse heißt **Arkustangens**.

iv) $x \mapsto \cot(x)$ ist eine bijektive Abbildung zwischen $[0, \pi]$ und $\mathbb{R}$ und sie ist streng monoton fallend. Ihre Inverse heißt **Arkuskotangens**.

Zur Erinnerung. Diese Kosinusfunktion ist genau diejenige, welche wir in analytischen Geometrie zur Messung der Winkelgröße zwischen zwei Vektoren $x, y \in V$ in einem Vektorraum $V$ mit Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ benutzt haben. Jetzt können wir die fehlende Aussage der analytischen Geometrie formulieren (und könnten sie beweisen, wenn wir wüssten, dass das Bild des Intervalles $[0, \pi]$ unter der Funktion Kosinus das ganze Intervall $[-1, 1]$ ist); dafür ist aber eine tiefere Theorie der stetigen Funktionen nötig, siehe übernächste Kapitel).

**Satz (über Winkel von zwei Vektoren)** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ und seien $u, v \in V$ Vektoren mit $u \neq 0_V$ und $v \neq 0_V$. Dann existiert genau eine reelle Zahl $\alpha \in [0, \pi]$ so, dass

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \ ,$$

d.h.

$$\alpha := \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \ .$$

Insbesondere, wenn $u = v$, dann ist $\alpha = 0$, wennn $u = -v$ dann ist $\alpha = \pi$, wenn $u \perp v$ dann ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wenn $\langle u, v \rangle > 0$, dann $\alpha < \frac{\pi}{2}$ und wenn $\langle u, v \rangle < 0$, dann $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

Diese Zahl $\alpha$ ist die **Winkelgröße** des Winkels zwischen den zwei Vektoren $u, v$ (Reihenfolge nicht beachtet) in "Bogenlänge" gemessen und entspricht der Vorstellungen aus der Schule. Erst in der Intergralrechnung können wir sehen, dass dies tatsächlich **Bogenlänge** ist.

# 10 Differentiation und Integration

**Definition** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D_f$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall so, dass $I \subset D_f$ ist.

a) Nehmen wir an, dass an jeder Stelle $x \in I$ die Funktion $f$ differenzierbar ist. Dann heißt die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = f'(x)$ für $x \in I$ **die Ableitung von $f$ auf $I$**.

b) Nehmen wir an, dass eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D_F = I$ existiert so, dass für jede $x \in I$ gilt $F'(x) = f(x)$. Dann heißt die Funktion $F$ **eine Stammfunktion von $f$ auf $I$**.

Ziel der Differential- und Integralrechnung ist, die Ableitung bzw. eine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion zu berechnen und/oder zu untersuchen. Mit dieser Information dann Aussagen über der gegebenen Funktion zu treffen.

## 10.1 Rechenregeln der Differentialrechnung

**Satz (Ableitung und Stammfunktion für Summe, Vielfaches)** Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall so, dass $I \subset D_{f_1}, I \subset D_{f_2}$ ist, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Wenn $g_1$ bzw. $g_2$ Ableitungen von $f_1$ bzw. $f_2$ auf $I$ sind, dann ist die Funktion $g_1 + g_2$ die Ableitung von $f_1 + f_2$ auf $I$ und die Funktion $\lambda g_1$ die Ableitung von $\lambda f_1$ auf $I$.

b) Wenn $G_1$ bzw. $G_2$ Stammfunktionen von $f_1$ bzw. $f_2$ auf $I$ sind, dann ist die Funktion $G_1 + G_2$ eine Stammfunktion von $f_1 + f_2$ auf $I$ und die Funktion $\lambda G_1$ eine Stammfunktion von $\lambda f_1$ auf $I$.

Beweis. Wir führen folgende Umformung für ein $a \in I$ durch:

$$\frac{(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(a)}{x - a} = \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} + \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} \ .$$

Aus dieser Formel folgt mit dem Satz über den Grenzwert von Summe von Funktionen, dass $f_1 + f_2$ an der Stelle $a$ differenzierbar ist und $(f_1 + f_2)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a)$.

Das gleiche Argument für $G_1$ statt $f_1$ und $G_2$ statt $f_2$ liefert $(G_1 + G_2)'(a) = G_1'(a) + G_2'(a) = f_1(a) + f_2(a)$. Da $a \in I$ beliebig war, folgen daraus die Aussagen für Summe. Der Beweis der Aussagen für Vielfaches ist zur Übung gelassen.

□

**Satz (Ableitung von Produkt)** Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen welche an der Stelle $a$ differenzierbar sind. Dann ist die Funktion $f_1 \cdot f_2$ an der Stelle $a$ differenzierbar und

$$(f_1 \cdot f_2)'(a) = f_1'(a) \cdot f_2(a) + f_1(a) f_2'(a) \ .$$

Beweis. Aus der Umformung

$$\frac{(f_1 \cdot f_2)(x) - (f_1 \cdot f_2)(a)}{x - a} = f_1(x)\frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} + \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} f_2(a)$$

mit Sätzen über den Grenzwert von Produkt, Vielfaches und Summe von Funktionen folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{(f_1 \cdot f_2)(x) - (f_1 \cdot f_2)(a)}{x - a}$$

existiert und ist gleich

$$\lim_{x \to a} f_1(x) \lim_{x \to a} \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} f_2(a) = f_1(a) \cdot f_2'(a) + f_1'(a) \cdot f_2(a) ,$$

wobei die Voraussetzungen sowie die Folgerung, dass $f_1$ stetig an der Stelle $a$ ist, benutzt sind.

$\square$

**Satz (Ableitung von $\frac{1}{f}$)** Wenn $f$ an der Stelle $a$ differenzierbar ist und $f(a) \neq 0$ ist, dann ist die Funktion $\frac{1}{f}$ definiert mindestens in einer kreisförmiger Umgebung von $a$ und ist an der Stelle $a$ differnzierbar mit

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2} .$$

Für ein Beweis siehe z.B. [Lasser, Hofmaier: Anlysis 1+2, S. 99].

Als Folgerung von den beiden letzten Sätzen bekommen wir eine Rechenregel für die Ableitung von Quotient von Funktionen: wenn $f$ und $g$ an der Stelle $a$ differenzierbar sind und $g(a) \neq 0$ ist, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ an der Stelle $a$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\ &= f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\right) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2} .\end{aligned}$$

**Satz (Ableitung von Komposition - Kettenregel)** Ist $f$ an der Stelle $a$ differenzierbar und $g$ an der Stelle $f(a)$ differenzierbar, dann ist $g \circ f$ an der Stelle $a$ differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) .$$

Ohne Beweis. Siehe z.B. [Lasser, Hofmaier: Anlysis 1+2, S. 99-100].

**Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)** Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to J$ eine bijektive Abbildung welche an der Stelle $a \in I$ differenzierbar ist mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist die inverse Funktion $f_{-1} : J \to I$ differenzierbar an der Stelle $b \in J$ mit $b = f(a)$ und

$$(f_{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f_{-1}(b))} \ .$$

Der Beweis wird in der nächsten Kapitel präsentiert.

**Ende 18. Vorlesung**

**19. Vorlesung am Freitag 20.1.2017**

Wir fassen die Rechenregeln für Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung und Stammfunktion für (möglicherweise) Summe, Vielfaches, Produkt und Quotient von Funktionen, für Komposition von Funktionen und für die inverse Funktion in einer Tabelle zusammen. Einige Beweise sind schon gemacht, einige sind einfach und zu Übung gelassen, aber einige brauchen tiefere Theorie der Funktionen, und deshalb können wir diese noch nicht beweisen. Wir werden die Rechenregeln im folgenden benutzen.

| von Funktionen | Grenzwert | Stetigkeit | Ableitung | Stammfunktiom |
|---|---|---|---|---|
| Summe | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Vielfaches | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Produkt | ✓ | ✓ | ✓Formel! | – |
| $\frac{1}{f}$ | ✓Voraussetzung! | ✓Voraussetzung! | ✓Formel! | – |
| Komposition | ✓Voraussetzung! | ✓ | ✓Formel! | – |
| Inverse | ✓Voraussetzung! | ✓Voraussetzung! | ✓Formel! | – |

Beispiele

- Die Funktion $f$ definiert durch $f(x) = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ist an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(a) = f(a)$ für $a \in \mathbb{R}$. Beweis mit Eigenschaften der Exponentialfunktion.
- Die Funktion $g$ definiert durch $g(x) = \ln(x)$ für $x \in ]0, +\infty[$ ist differenzierbar an jeder Stelle und es gilt $g'(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in ]0, +\infty[$. Beweis mit dem Satz über Ableitung der inversen Funktion.
- $\sin'(x) = \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweis mit Eigenschaften der Sinusfunktion.

- $\cos'(x) = -\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Ohne Beweis, Idee ähnlich wie für Sinus.
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in ]-1,1[$. Beweis mit dem Satz über Ableitung der inversen Funktion.
- $\tan'(x) = -\frac{1}{(\cos(x))^2}$ für $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Beweis mit Rechenregel für Quotient.
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweis mit dem Satz über Ableitung der inversen Funktion und Formeln für Kreisfunktionen.

**Ende 19. Vorlesung**

**20. Vorlesung am Montag 23.1.2017**

## 10.2 Einige Anwendungen

### 10.2.1 Auf Kurvenverlauf

**Satz (hinreichende Bedingung für Monotonie)** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $I \subset D_f$. Nehmen wir an, dass $f$ an jeder Stelle $a \in I$ differenzierbar ist. Es gelten folgende Aussagen.

i) Wenn für alle $x \in I$ $f'(x) > 0$ gilt, dann ist $f$ streng monotone wachsend auf $I$.

ii) Wenn für alle $x \in I$ $f'(x) < 0$ gilt, dann ist $f$ streng monotone fallend auf $I$.

iii) Wenn für alle $x \in I$ $f'(x) \geq 0$ gilt, dann ist $f$ monotone wachsend auf $I$.

iv) Wenn für alle $x \in I$ $f'(x) \leq 0$ gilt, dann ist $f$ monotone fallend auf $I$.

An dieser Stelle können wir nur eine heuristische Begründung geben. Der komplette Beweis wird später präsentiert.

**Satz (notwendige Bedingung für Extremalstelle)** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $I \subset D_f$ und $x_0 \in I$. Wenn $x_0$ die Eigenschaft

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in I\}$$

hat, dann gilt eine von den folgenden Aussagen:

- entweder ist $x_0$ Randpunkt des Intervalles $I$,

- oder $x_0$ ist innere Punkt des Intervalles $I$ und $f$ ist an der Stelle $x_0$ nicht differenzierbar,
- oder $x_0$ ist innere Punkt des Intervalles $I$ und $f$ ist an der Stelle $x_0$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$.

Die gleiche Aussage gilt wenn $x_0$ die Bedingung

$$f(x_0) = \min\{f(x) : x \in I\}$$

erfüllt.

Bemerkungen: Erklärung von inneren Punkt, Randpunkt eines Intervalles. $x_0$ heißt **eine Maximalstelle von $f$ auf $I$** und $f(x_0)$ heißt **der Maximalwert von $f$ auf $I$**.

Beweis. Fallunterscheidung. Die einzige Fälle zu untersuchen sind wenn $f'(x_0) > 0$ bzw. wenn $f'(x_0) < 0$, aber beide diese Fälle führen zu Widerspruch mit der Definition von $x_0$.

□

### 10.2.2 Auf physikalische Größen

**Satz** Wenn $f$ auf dem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ eine Stammfunktion $F$ besitzt und

$$\lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

existiert, dann hat diese Zahl die Bedeutung des Flächeninhaltes unter den Graphen von $f$ auf $I$. (Die Fläche unter der $x$-Achse zählt mit negativen Vorzeichen.)

Heuristische Einführung des Flächeninhaltes und Begründung der Aussage:

Zerlege $I = (a, b)$ in Teile $[x_i, x_{i+1}]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und approximiere die Fläche durch der Summe der Flächen der Rechtecke, welche aus analytischen Geometrie berechnet sind:

$$F \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \ .$$

Laut Definitionen der Analysis gilt für jede $c \in I$, dass $F'(c) = f(c)$, d.h.

$$\lim_{y \to c} \frac{F(y) - F(c)}{y - c} = f(c) \ .$$

Insbesondere gilt dies für $c = x_i$, und wenn $x_{i+1}$ in der Nähe von $x_i$ liegt, dann

$$\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \approx f(x_i) \ .$$

Dies eingesetzt in die approximative Flächeninhaltformel gibt

$$F \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \approx \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = F(b) - F(a) \ .$$

□

**Satz** Wenn $f$ an jeder Stelle des Intervalles $(a, b) \subset \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Funktion $g$ definiert durch $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ für $x \in I$ eine Stammfunktion $G$ auf $(a, b)$ besitzt und

$$\lim_{x \to b-} G(x) - \lim_{x \to a+} G(x)$$

existiert, dann hat diese Zahl die Bedeutung der Länge der Kurve $\{(x, f(x)) : x \in (a, b)\}$.

Heuristische Einführung der Kurvenlänge und Begründung der Aussage:

Zerlege $I = (a, b)$ in Teile $[x_i, x_{i+1}]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und approximiere die Kurve durch der Vereiningung von Strecken. Die Längen dieser Strecken werden aus der analytischen Geometrie mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet und addiert:

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(x_{i+1} - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

Laut Definitionen der Analysis gilt für jede $c \in I$, dass $F'(c) = f(c)$, d.h.

$$\lim_{y \to c} \frac{f(y) - f(c)}{y - c} = f'(c) \ .$$

Insbesondere gilt dies für $c = x_i$, und wenn $x_{i+1}$ in der Nähe von $x_i$ liegt, dann

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \approx f'(x_i) \ .$$

Dies eingesetzt in die approximative Flächeninhaltformel gibt

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \sqrt{(f'(x_i))^2 + 1} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) g(x_i) \approx G(b) - G(a) \ ,$$

wobei wir im letzten Schritt die Formel aus dem vorherigen Beweis für $g$ statt $f$ benutzt haben.

□

### 10.2.3 Auf Bedeutung von $\pi$

**Beispiele** Wir wollen den Flächeninhalt des Kreises und die Länge der Kreislinie bestimmen. Damit werden wir den Bezug zwischen unserem $\pi$ (definiert als die kleinste positive Nullstelle der Funktion Kosinus, welche als Summe einer Reihe definiert ist) und der Bedeutung von $\pi$ aus der Schule (wievielmal ist die Halbkreislinie länger als der Radius des Kreises) feststellen. Die Einheitskreislinie (bezüglich Euklidischer Metrik) mit Mittelpunkt $(0,0)$ ist eine Quadrik gegeben mit der Gleichung $x^2+y^2=1$, d.h. die Menge $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$, und der Kreis ist dann die Menge $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.

- Die Funktion $f$ definiert $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$, besitzt auf dem Intervall $I=(-1,1)$ eine Stammfunktion, nämlich $F$ mit $F(x)=\frac{1}{2}\arcsin(x)+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$, ist eine Stammfunktion von $f$ auf $I$ (prüfe nach!). Da
$$\lim_{x\to 1-}F(x)-\lim_{x\to -1+}F(x)=(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+0)-(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+0)=\frac{\pi}{2}\ ,$$
ist diese Zahl der Flächeninhalt unter dem Graphen von $f$, d.h. des Halbkreises.

- Die Funktion $f$ ist differenzierbar auf $I$ und $f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ für $x\in I$. Die Funktion $g$ definiert durch $g(x)=\sqrt{(f'(x))^2+1}$ für $x\in I$ kann man umschreiben als $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (rechne nach!), deswegen besitzt sie eine Stammfunktion auf $I$, und zwar die $G=\arcsin$. Da
$$\lim_{x\to 1-}G(x)-\lim_{x\to -1+}G(x)=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi\ ,$$
ist diese Zahl die Länge der Kurve $G_f$, d.h. der Halbkreislinie.

**Ende 20. Vorlesung**

**21. Vorlesung am Montag 30.1.2017**

# 11 Tiefere Sätze über stetigen und differenzierbaren Funktionen

## 11.1 Zwischenwertsätze und Folgerungen

**Satz 1. (Nullstellensatz; Bolzano, 1817)** Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $[a,b]\subset D_f$. Wenn $f$ auf dem Intervall $[a,b]$

stetig ist (d.h. an jeder Stelle $x \in (a,b)$ stetig, an der Stelle $a$ stetig von rechts und an der Stelle $b$ stetig von links) und $f(a) \cdot f(b) < 0$ gilt, dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a,b)$ so, dass

$$f(x_0) = 0 \; .$$

Beweis. Wir betrachten den Fall wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ und führen folgendes Verfahren durch. Setze $a_1 = a$, $b_1 = b$ und betrachte die Stelle $\frac{a_1+b_1}{2} \in [a,b]$. Wenn $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, dann setze $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ und $b_2 = b_1$, wenn $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, dann setze $a_2 = a_1$ und $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, und wenn $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, dann setze $x_0 = \frac{a_1+b_1}{2}$ und beende das Verfahren. In dem nächsten Schritt betrachte die Stelle $\frac{a_2+b_2}{2} \in [a_2,b_2] \subset [a,b]$. Wenn $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) > 0$, dann setze $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ und $b_3 = b_2$, wenn $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) < 0$, dann setze $a_3 = a_2$ und $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$, und wenn $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = 0$, dann setze $x_0 = \frac{a_2+b_2}{2}$ und beende das Verfahren. Falls dieses Verfahren weitergeführt einmal beendet wird, dann haben wir die gesuchte Stelle $x_0$ gefunden und falls es nie beendet wird, dann haben wir zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert. Diese haben, laut Konstruktion, folgende Eigenschaften: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Folglich (hier ist das Axiom über Supremem benutzt !) besitzen diese Folgen reelle Grenzwerte, sei $A = \lim_n a_n$ und $B = \lim_n b_n$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n < b_n$ gilt, gilt für die Grenzwerte $A \leq B$. Außerdem ist laut Konstruktion

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte bekommen wir

$$B - A = \lim_n b_n - \lim_n a_n = \lim_n (b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^{n-1}} = (b-a) \lim_n \frac{1}{2^{n-1}} = 0 \; .$$

Folglich ist $B = A$. Außerdem gilt $A \in [a,b]$. Da $f$ an der Stelle $A$ stetig ist und $\lim_n a_n = A$ ist, gilt $\lim_n f(a_n) = f(A)$. Da $f(a_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt dass $f(A) \geq 0$ ist. Die entsprechende Überlegung mit der Folge $(b_n)$ liefert $f(B) \leq 0$. Da aber $A = B$ ist, muss $f(A) = f(B) = 0$ sein. Schliesslich setzen wir $x_0 = A$ und damit haben wir die gesuchte Stelle auch in diesem Fall gefunden.

Ähnliche Überlegungen führen im dem Fall, wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist, zu Beweis.

$\square$

Bemerkungen. Die drei Voraussetzungen ($[a,b]$ ist ein Intervall, $f$ ist stetig, $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen) im Satz sind wichtig und man findet jeweils Beispiele, wo eine von den drei Voraussetzungen nicht erfüllt ist und die Aussage nicht gilt. Übung: finde solche Beispiele!

Anwendung: Jedes Polynom dritten Grades besitzt mindestens eine (reelle) Nullstelle.

**Satz 2.** **(Zwischenwertsatz)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subset D_f$. Nehmen wir an, dass $f$ in $[a, b]$ stetig ist. Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt (bzgl. $\leq$), dann existiert mindestens ein $x_\lambda \in [a, b]$ so, dass

$$f(x_\lambda) = \lambda \ .$$

Beweis. Fallunterscheidung, mit Anwendung des Satzes 1 auf die Funktion $g$ definiert durch $g(x) = f(x) - \lambda$.

□

**Satz 3.** **(Erhaltung der "Zusammenhang")** Bild eines Intervalles unter einer stetigen Funktion ist entweder wieder ein Intervall oder eine einelementige Menge.

Beweis: Das ist eine Folgerung aus dem Satz 2.

□

Ausblicke. Intervalle haben zwei Eigenschaften, welche man verallgemeinern kann: Konvexität und Zusammenhang. Es gilt allgemein, dass bei einer stetigen Abbildung die Eigenschaft "zusammenhängend" erhalten bleibt (ohne Beweis). Konvexität in allgemeinen nicht.

## 11.2 Sätze über der inversen Funktion

**Satz 1.** **(über Stetigkeit der inversen Funktion)** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei die Funktion $f$ stetig auf $I$ (einseitig in eventuellen Endpunkten) und strikt monoton wachsend auf $I$. Dann gelten folgende Aussagen.

i) $f(I)$ ist ein Intervall, wir bezeichnen es mit $J$.

ii) $f$ ist eine bijektive Abbildung von $I$ nach $J$.

iii) Die Abbildung $f_{-1} : J \to I$ (inverse Abbildung) ist strikt monoton wachsend.

iv) $f_{-1}$ ist stetig auf $J$.

Beweis. i) ist eine Folgerung aus dem Nullstellensatz. Die Aussage ii) ist dann wahr und iii) ist nicht schwer zu beweisen (sie folgt aus der Definition der Monotonie). Die nichttriviale Aussage des Satzes ist die Stetigkeit der inversen Funktion.

Sei $b \in J$ welche nicht Endpunkt des Intervalles $J$ ist. Wir zeigen, dass $f_{-1}$ an der Stelle $b$ von rechts stetig ist. Bezeichne $a = f_{-1}(b) \in I$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir nehmen ein kleineres $\varepsilon'$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, sodass $b + \varepsilon' \in J$. Setze $\delta = f(a + \varepsilon') - f(a)$. Es gilt $\delta > 0$, da $f$ streng monoton wachsend ist. Wenn $y \in (b, b + \delta)$ ist, dann exsitiert ein einziges $x \in I$ mit $f(x) = y$. Die Ungleichung $b < y < b + \delta$ geschrieben mit der neuen Notation lautet $f(a) < f(x) < f(a) + \delta = f(a + \varepsilon')$. Daraus folgt wegen der Monotonie, dass $a < x < a + \varepsilon'$. Daraus folgt, dass $x \in B(a, \varepsilon')$. Weil $x = f_{-1}(y)$ und $B(a, \varepsilon') \subset B(a, \varepsilon)$, bekommen wir $f_{-1}(y) \in B(a, \varepsilon)$. Damit haben wir bewiesen, dass $\lim_{y \to b+} f_{-1}(y) = a$ ist. Da aber $f_{-1}(b) = a$, ist die Funtion $f_{-1}$ an der Stelle $b$ von rechts stetig.

Mit ähnlichen Überlegungen kann man zeigen, dass $f_{-1}$ an jeder Stelle $b \in J$, welche nicht Anfangspunkt des Intervalles $J$ ist, stetig von links ist.

$\square$

Bemerkung: Folgendes ist eine memotechnische Hilfe, aber kein Beweis des Satzes über der Ableitung der inversen Fuktion.

$$
\begin{aligned}
&f(f_{-1}(t)) = t = g(t), \quad t \in (a, b) \\
&(f \circ f_{-1})'(t) = g'(t), \quad t \in (a, b) \\
&f'(f_{-1}(t)) \cdot f'_{-1}(t) = g'(t) = 1, \quad t \in (a.b) \\
&f'_{-1}(t) = \frac{1}{f'(f_{-1}(t))}, \quad t \in (a, b)
\end{aligned}
$$

Hier benutzt man nämlich den Kettenregel, welcher voraussetzt, dass beide Funktionen differenzierbar sind. Wir sollen aber die Differnzierbarkeit der Funktion $f_{-1}$ beweisen, und deshalb können wir dies nicht voraussetzen !

**Ende 21. Vorlesung**

**22. Vorlesung am Freitag 3.2.2017**

**Satz 2. (über Differenzierbarkeit der inversen Funktion)** Nehmen wir an, dass die Funktion $f$ auf dem Intervall $(a, b)$ stetig und streng monoton wachsend ist. Nehmen wir weiter an, dass $f$ an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die inverse Funktion $f_{-1}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und für ihre Ableitung an der Stelle $y_0$ gilt

$$
f'_{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f_{-1}(y_0))} \ .
$$

Beweis. Wir definieren eine Hilfsfunktion $g$ durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ für } x \in (a,b) \text{ mit } x \neq x_0 \ , \\ f'(x_0) \text{ für } x = x_0 \ . \end{cases}$$

Dann ist $g$ stetig in $(a,b)$. Für $t \in f((a,b))$ mit $t \neq y_0$ können wir wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \frac{f_{-1}(t) - f_{-1}(y_0)}{t - y_0} &= \frac{f_{-1}(t) - f_{-1}(y_0)}{f(f_{-1}(t)) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(f_{-1}(t))-f(x_0)}{f_{-1}(t)-x_0}} = \frac{1}{g(f_{-1}(t))} \ . \end{aligned}$$

Da $f_{-1}$ an der Stelle $y_0$ stetig ist, $g$ an der Stelle $x_0 = f_{-1}(y_0)$ stetig ist und $g(x_0) \neq 0$ gilt, folgt aus dem Satz über Stetigkeit der Komposition und Quotient, dass der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{t \to y_0} \frac{1}{g(f_{-1}(t))} = \frac{1}{g(f_{-1}(y_0))} = \frac{1}{g(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \ .$$

Zusammengefasst,

$$\lim_{t \to y_0} \frac{f_{-1}(t) - f_{-1}(y_0)}{t - y_0} = \lim_{t \to y_0} \frac{1}{g(f_{-1}(t))} = \frac{1}{f'(x_0)} \ .$$

Damit ist $f_{-1}$ an der Stelle $y_0$ differenzierbar und ihre Ableitung ist $\frac{1}{f'(x_0)}$. $\square$

## 11.3 Erhaltungssätze und Folgerung

Wir haben schon bewiesen, dass das Bild eines Intervalles unter einer stetigen Abbildung wieder ein Intervall ist. Die erhaltene Eigenschaft ist eigentlich der "Zusammenhang". Zusammenhängende Teilmengen der $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle. Es gilt allgemein, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung wieder eine zusammenhängende Menge ist (ohne Beweis).

(In der Vorlesung nicht gemacht) Eine andere erhaltene Eigenschaft ist "Folgenkompaktheit". In einem metrischen Raum (Menge $P$ mit metrik $d$) heißt eine Teilmenge $A \subset M$ **folgenkompakt**, falls für jede Folge $f : \mathbb{N} \to A$ mindestens ein Element $z \in A$ und mindestens eine Teilfolge $g$ von $f$ existieren so, dass $z$ Grenzwert der Folge $g$ ist. Folgenkompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich Euklidischer Metrik sind genau die abgeschlossene beschränkte

Teilmengen. Es gilt allgemein, dass das Bild einer folgenkompakten Menge unter einer stetigen Abbildung wieder eine folgenkompakte Menge ist (ohne Beweis).

Folgender Satz ist dann eine Folgerung der zweiten Erhaltungseigenschaft. Wir werden den Beweis direkt führen. Aus ihren Ideen kann man herleiten, dass das Bild einer abgeschlossenen beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}$ unter einer Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $M \subset I \subset D_f$ welche stetig auf einem Intervall $I$ ist, wieder eine abgeschlossene beschränkte Menge ist.

**Satz (über Existenz von Minima und Maxima; Weierstraß, 1861)** Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, welche stetig auf dem abgeschlossenem beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist, dann existieren $x_{min} \in [a, b]$ und $x_{max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{min}) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ und } f(x_{max}) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

(alles bezüglich der Euklidischen Metrik).

Wir sagen, dass $x_{min}$ **eine** Minimalstelle der Funktion $f$ auf der Menge $[a, b]$ ist und $f(x_{min})$ **der** Minimalwert der Funktion $f$ auf der Menge $[a, b]$ ist.

Für den Beweis dieses Satzes wird folgendes Resultat benutzt. Ist $f : \mathbb{N} \to P$ eine Folge in der Menge $P$ und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung, dann heißt die Folge $g$ definiert durch $g(n) = f(k(n))$ für $n \in \mathbb{N}$ eine **Teilfolge von** $f$. Wir werden eine neue, kürzere Notation für Folgen benutzen: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bedeutet die Folge $f$ definiert durch $f(n) = x_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

**Lemma** Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge ist, dann existiert mindestes eine reelle Zahl $\widetilde{x}$ und eine Teilfolge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\widetilde{x}$ Grenzwert der Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Beweis. Die Idee dieses Beweises heißt Intervallhalbierung. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existieren $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ gilt. Wir führen folgendes Verfahren durch. Setze $a_1 = a, b_1 = b, k_1 = 1$, $x'_1 = x_1$. Halbiere den Intervall $[a_1, b_1]$. Wenn in dem Intervall $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ unendlich viele Elemente $x_n$ mit $n > k_1$ liegen, sei $x_{k_2}$ eins davon, setze $x'_2 = x_{k_2}$ und $a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Wenn in dem Intervall $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ unendlich viele Elemente $x_n$ mit $n > k_1$ liegen, sei $x_{k_2}$ eins davon und setze $x'_2 = x_{k_2}$, $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$.

Halbiere den Intervall $[a_2, b_2]$. Wenn in dem Intervall $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ unendlich viele Elemente $x_n$ mit $n > k_2$ liegen, sei $x_{k_3}$ eins davon, setze $x'_3 = x_{k_3}$

und $a_3 = a_2, b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$. Wenn in dem Intervall $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$ unendlich viele Elemente $x_n$ mit $n > k_2$ liegen, sei $x_{k_3}$ eins davon und setze $x'_3 = x_{k_3}$, $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$, $b_3 = b_2$.

Wir wiederholen immer wieder diese Konstruktion auf dem kleineren Intervall. Damit bekommen wir eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche eine Cauchy-Folge ist, weil $\lim_n(b_n - a_n) = \lim_n \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$. Nach dem Satz über Cauchy-Folgen (und hier ist das Axiom über Supremum benutzt) besitzt diese Folge einen reellen Grenzwert. Außerdem folg aus der Konstruktion, dass $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

□

Beweis des Satzes von Weierstraß:

Mit der Bezeichnung $M = [a, b]$ suchen wir eigentlich $\max f(M)$ bzw. $\min f(M)$.

Schritt 1. Wir zeigen zuerst, dass $f(M)$ nach oben beschränkt ist. Wenn $f(M)$ nicht nach oben beschränkt wäre, dann existiert eine Folge $(y_n)$ mit $y_n \in f(M)$ für alle $n \in \mathbb{R}$ und $\lim_n y_n = +\infty$. Dann existiert für jede $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $f(x_n) = y_n$. Die Folge $(x_n)$ ist beschränkt, folglich existiert eine Teilfolge $(x'_n)$ welche einen reellen Grenzwert $\widetilde{x}$ besitzt. Da $x'_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt, dass $\widetilde{x} \leq b$. Da $x'_n \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt, dass $\widetilde{x} \geq a$. Also ist $\widetilde{x} \in [a, b]$. Da $f$ stetig an der Stelle $\widetilde{x}$ ist, gilt $\lim_n f(x'_n) = f(\widetilde{x}) \in \mathbb{R}$. Aber $\lim_n f(x'_n) = +\infty$ wegen der Wahl von $(y_n)$. Wir haben ein Widerspruch bekommen. Folglich muss $f(M)$ nach oben beschränkt sein.

Schritt 2. Da $f(M)$ nach oben beschränkt ist und $M$ nicht leer ist, existiert $\sup f(M) = s \in \mathbb{R}$. Ähnlich wie in dem Schritt 1 kann man eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(M)$ finden, für welche $\lim_n y_n = s$ gilt, und damit eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $f(x_n) = y_n$ und $x_n \in M$) in $M$ welche einen Grenzwert $\widetilde{x} \in [a, b]$ besitzt. Aus der Stetigkeit von $f$ an der Stelle $\widetilde{x}$ folgt $\lim_n f(x'_n) = f(\widetilde{x})$ und aus der Konstruktion folgt $\lim f(x'_n) = s$. Deshalb ist $f(\widetilde{x}) = s$ und damit $s$ das Maximum der Menge $f(M)$. Wir können $x_{max} = \widetilde{x}$ setzen.

Den Beweis für Minimum kann man entsprechend mit Beschränktheit nach unten und Infimum durchführen.

□

## 11.4 Mittelwertsätze und Folgerungen

**Satz (Rolle, 1691)** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $[a, b] \subset D_f$. Nehmen wir an, dass $f$ in $[a, b]$ stetig ist, dass $f$ in $(a, b)$ differenzierbar ist und dass $f(a) = f(b)$ gilt. Dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Da die Funktion $f$ stetig in dem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[a, b]$ ist, besitzt sie nach dem Satz über Existenz von Extrema Maximum auf $[a, b]$ und Minimum auf $[a, b]$. Fallunterscheidung:

Wenn $f$ konstant ist, ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ und wir können ein beliebiges $x_0 \in (a, b)$ wählen.

Wenn $f$ nicht konstant ist, dann existiert entweder ein $x_1 \in (a, b)$ mit $f(x_1) > f(a)$ oder ein $x_2 \in (a, b)$ mit $f(x_2) > f(a)$. In dem ersten Fall sei $x_0 \in [a, b]$ eine Maximalstelle von $f$ auf $[a, b]$. $x_0 \neq a$, da $f(x_1) > f(a)$ und $x_0 \neq b$, da $f(x_1) > f(a) = f(b)$. Also ist $x_0 \in (a, b)$. Da $f$ differenzierbar in $x_0$ ist, muss nach dem Satz über der notwendigen Bedingungen für Extrema $f'(x_0) = 0$ sein.

In dem zweiten Fall sei $x_0 \in [a, b]$ eine Minimalstelle von $f$ auf $[a, b]$. $x_0 \neq a$, da $f(x_2) < f(a)$ und $x_0 \neq b$, da $f(x_2) < f(a) = f(b)$. Also ist $x_0 \in (a, b)$. Da $f$ differenzierbar in $x_0$ ist, muss nach dem Satz über der notwendigen Bedingungen für Extrema $f'(x_0) = 0$ sein.

□

Dieser Satz hat eine Verallgemeinerung auf dem Fall wenn $f(a) \neq f(b)$ ist, mit der Aussage dass es dann ein $x_0 \in (a, b)$ gibt mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Aus dieser Aussage kann man den Satz über hinreichende Bedingungen für Monotonie beweisen.

Wir haben alle Aussagen der Vorlesung bewiesen, oder zumindest gezeigt, dass der Beweis durchführbar ist. Die Aussagen sind auf den Axiomen über reelle Zahlen begründet. Die Theorie ist ein kräftiges Werkzeug zur Untersuchung von Funktionen.
**Ende 22. Vorlesung**

**Ende des Semesters**

**Sommersemester**

**1. Vorlesung am Donnerstag 6.4.2017**

Bemerkungen zur Klausur, Untersuchung der Funktion $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$.

# 12 Ergänzungen zur Differentialrechnung

## 12.1 Zusammenfassung der tieferen Sätze

- ☑ Zwischenwertsätze
  - ☑ Nullstellensatz (Bolzano)
  - ☑ Zwischenwertsatz
- ☑ Sätze über die inversen Funktion
  - ☑ Stetigkeit
  - ☑ Differenzierbarkeit
- ☐ Erhaltungssätze
  - ☑ Erhaltung des Zusammenhangs (Folgerung aus dem Zwischenwertsatz)
  - ☐ Erhaltung der Kompaktheit (Folgerung aus dem Satz von Weierstraß)
- ☐ Mittelwertsätze
  - ☑ Rolle
  - ☐ Lagrange

Jetzt formulieren wir die fehlende Aussagen und Beweise.

**Satz (Erhaltung der Kompaktheit).** Wenn $I$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall ist und $f$ eine Funktion welche stetig auf $I$ ist, dann ist $f(I)$ eine abgeschlossene, beschränkte Menge (und Intervall).

Wir werden diesen Satz nicht beweisen, obwohl er aus dem Satz über die Existenz von Minima und Maxima und aus den Definitionen folgt. Wir zeigen anhand von Beispielen, dass die Aussage falsch sein kann, wenn man eine von den drei Voraussetzungen weglässt. Vergleiche mit der Übungsaufgabe 9.3.

**Satz (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, Lagrange 1797).** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f, g$ Funktionen, welche auf $[a, b]$ definiert sind. Wenn $f$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $(a, b)$ ist, dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Beweis. Diese Aussage folgt aus dem Satz von Rolle für die Funktion $h$ definiert durch $h(x) = (f(b) - f(a))\,(x - a) - \ (b - a)\,(f(x) - f(a))$ für $x \in [a, b]$.

□

**Ende 1. Vorlesung**

**2. Vorlesung am Montag 10.4.2017**

Wir fassen Anwendungen zusammen und ergänzen diese um zwei Sätze.

- □ Hinreichende Bedingung für Monotonie
- ☑ Notwendige Bedingung für Extremalstelle
- □ Hinreichende Bedingung für Extremalstelle I
- □ Hinreichende Bedingung für Extremalstelle II

Zuerst beweisen wir die hinreichende Bedingung für Monotonie.

Voraussetzungen: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $I \subset D_f$, $f$ differenzierbar auf $I$, $\forall x \in I : \ f'(x) > 0$.

Behauptung: $f$ ist streng monoton wachsend auf $I$.

Beweis: Mit Widerspruch, nehmen wir an, dass die Funktion $f$ auf dem Intervall $I$ nicht strikt monoton wachsend ist. Dann existieren $x_1, y_1 \in I$ mit $x_1 < y_1$ und $f(x_1) \geq f(y_1)$. Auf dem Intervall $[x_1,\, y_1]$ ist, laut Voraussetzungen des Satzes, die Funktion $f$ stetig, auf dem Intervall $(a, b)$ ist $f$ differenzierbar. Folglich existiert nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x_1,\, y_1)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1}$. Die Zahl auf der linken Seite dieser Gleichheit ist laut Voraussetzung positiv, und die Zahl auf der rechten Seite ist wegen der Konstruktion negativ oder 0. Das ist ein Widerspruch. (Wenn $f(x_1) = f(y_1)$, dann liefert uns der Satz von Rolle, angewendet auf dem Intervall $[x_1,\, y_1]$, den Widerspruch.)

□

**Satz (Hinreichende Bedingung für Extremalstelle I).** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $(a, b) \subset D_f$ und $x_0 \in (a, b)$ eine

Stelle. Wenn die Funktion $f$ auf dem Intervall $(a, x_0)$ monoton wachsend und auf dem Intervall $(x_0, b)$ monoton fallend ist und stetig an der Stelle $x_0$ ist, dann ist $x_0$ Maximalstelle von $f$ auf $(a, b)$.

Beweis. Sei $y \in (a, b)$. Zu beweisen ist, dass $f(y) \leq f(x_0)$ gilt. Fälle: $y \in (a, x_0)$, $y \in (x_0, b)$, $y = x_0$.

In dem ersten Fall gilt für jedes $\varepsilon > 0$, da $f$ stetig in $x_0$ ist, dass ein $\delta > 0$ existiert, mit $x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Wir können auch ein solches $\delta$ mit $\delta < x_0 - y$ finden und dann gilt insbesondere für $x = x_0 - \frac{\delta}{2}$, dass $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Es gilt $y < x$, demzufolge $f(y) \leq f(x)$ und es folgt $f(y) < f(x_0) + \varepsilon$. Da $\varepsilon$ positiv aber beliebig war, muss $f(y) \leq f(x_0)$ gelten.

In dem zweiten Fall gilt für jedes $\varepsilon > 0$, da $f$ stetig in $x_0$ ist, dass ein $\delta > 0$ existiert, mit $x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Wir können auch ein solches $\delta$ mit $\delta < y - x_0$ finden und dann gilt insbesondere für $x = x_0 + \frac{\delta}{2}$, dass $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Es gilt $x < y$, demzufolge $f(x) \geq f(y)$ und es folgt $f(y) < f(x_0) + \varepsilon$. Da $\varepsilon$ positiv aber beliebig war, muss $f(y) \leq f(x_0)$ gelten.

In dem drittem Fall ist offensichtlich $f(y) \leq f(x_0)$.

□

**Satz (Hinreichende Bedingung für Extremalstelle II).** Nehmen wir an, dass die Funktion $f$ auf dem Intervall $(a, b)$ zweimal differnzierbar ist und sei $x_0 \in (a, b)$ eine Stelle.

a) Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann existieren $a', b' \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \in (a', b') \subset (a, b)$ so, dass $x_0$ eine Maximalstelle der Funktion $f$ auf dem Intervall $(a', b')$ ist. (Wir sagen, dass $x_0$ eine **lokale** Maximalstelle der Funktion $f$ ist.)

b) Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann existieren $a', b' \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \in (a', b') \subset (a, b)$ so, dass $x_0$ eine Minimalstelle der Funktion $f$ auf dem Intervall $(a', b')$ ist.

c) Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann ist keine allgemeine Aussage über die Stelle $x_0$ möglich.

d) Wenn $f'(x_0) \neq 0$, dann ist $x_0$ keine lokale Extremalstelle der Funktion $f$.

Beweis. a)

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

weshalb $\delta_1 > 0$ so existiert, dass für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ $f'(x) > 0$. Mit der hinreichenden Bedingung für Monotonie ist dann $f$ auf $(x_0, x_0 + \delta_1)$ streng monoton wachsend. Mit dem Grenzwert von links können wir beweisen, dass $f$ auf einem Intervall $(x_0 - \delta_2, x_0)$ strikt monoton fallend ist. Da $f$ in $x_0$ differenzierbar ist, ist $f$ an der Stelle $x_0$ stetig. Wir können den Satz über hinreichende Bedingung für Extrema I anwenden und bekommen, dass $f$ an der Stelle $x_0$ eine Maximalstelle auf $(x_0 - \delta_2,\ x_0 + \delta_1)$ hat.

b) Ähnlich, Übung!

c) Die drei Funktionen $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = -x^4$, $f_3(x) = x^3$ für $x \in \mathbb{R}$ zeigen, dass unter der Voraussetzung jeweils alle drei Fälle möglich sind: $f_1$ hat eine Minimalstelle in 0, $f_2$ hat Maximalstelle in 0, $f_3$ hat keine Extremalstelle in 0.

d) Das ist die eigentliche Aussage des Satzes über notwendige Bedingungen für Extremalstellen.

□

**Definition.** Sei $M$ eine nichtleere Menge, $d$ eine Metrik auf $M$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $D_f = M$ und $x_0 \in M$. $x_0$ heißt **lokale Minimalstelle von** $f$, falls eine kreisförmige Umgebung $B_M(x_0, r)$ von $x_0$ derart existiert, dass

$$f(x_0) = \min\{f(x) :\ x \in B_M(x_0, r)\}\ .$$

Ähnlich definiert man eine **lokale Maximalstelle**.

**Definition.** Ableitung der Funktion $f$ an der Stelle $a$ von links bzw. von rechts:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\ .$$

**Satz.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ eine Stelle so, dass $(a - r, a] \subset D_f$ für ein $r > 0$ ist. Nehmen wir an, dass

i) $f$ stetig von links an der Stelle $a$ ist,

ii) $f$ differenzierbar an jeder Stelle in $(a - \delta, a)$ ist und

iii) der Grenzwert $\lim_{x \to a-} f'(x) = A$ existiert in dem Sinne, dass $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ zulässig ist.

Dann existiert $f'_-(a)$ und ist gleich $A$. Insbesondere wenn $A \in \mathbb{R}$ ist, dann hat $f$ an der Stelle $a$ eine Ableitung von links und diese ist gleich $A$.

Beweis. Zu beweisen ist, dass der Grenzwert

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert und gleich $A$ ist. Sei $V$ eine kreisförmige Umgebung von $A$. Weil $\lim_{x\to a-} f'(x) = A$ ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \in (a-\delta, a) \ \Rightarrow \ f'(x) \in V \ .$$

Wenn $x \in (a-\delta, a)$, dann existiert $f'(x)$ und folglich ist $f$ stetig in $x$. Nach Voraussetzung ist $f$ von links stetig in $a$. Wenn also $y \in (a-\delta, a)$ festgewählt ist, ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $[y, a]$ stetig, auf dem Intervall $(y, a)$ differenzierbar und erfüllt damit die Bedingungen des Satzes von Lagrange. Folglich existiert $\xi_y \in (y, a)$ mit $f'(\xi_y) = \frac{f(a)-f(y)}{a-y}$. Damit gilt

$$y \in (a-\delta, a) \Rightarrow \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(\xi_y) \in V \ ,$$

weil insbesondere $\xi_y \in (a-\delta, a)$ ist. Wir haben bewiesen, dass $A$ der Grenzwert von $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ in $a$ von links ist.

□

**Ende 2. Vorlesung**

**3. Vorlesung am Donnerstag 13.4.2017**

Ergänzungen zu der Tabelle.

**Satz (Stetigkeit der Komposition).** Ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $a \in D_g$ stetig und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $b = g(a) \in D_f$ stetig, dann ist die Funktion $f \circ g$ an der Stelle $a$ stetig.

Beweis. Entweder stellen wir fest, dass $(f \circ g)(a) = (f(g(a))$ (das ist die Definition der Komposition) und dass $\lim_{x\to a}(f \circ g)(x)$ existiert und gleich $f(g(a))$ ist (das folgt aus dem Satz über dem Grenzwert von Komposition von Funktionen, siehe Übung), oder wir nutzen die äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit mit $\varepsilon$-$\delta$-Umgebungen. Die zweite Möglichkeit ist einfacher.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f$ an der Stelle $b$ stetig ist, existiert $\delta_1 > 0$ so, dass folgende Aussage wahr ist:

$$y \in B(b, \delta_1) \ \Rightarrow \ f(y) \in B(f(b), \varepsilon) \ .$$

Da $g$ an der Stelle $a$ stetig ist, existiert zu diesem $\delta_1 > 0$ ein $\delta_2 > 0$ so, dass folgende Aussage wahr ist:

$$x \in B(a, \delta_2) \ \Rightarrow \ g(x) \in B(g(a), \delta_1) \ .$$

Wenn jetzt $x \in B(a, \delta_2)$ ist, dann ist $y = g(x) \in B(b, \delta_1)$ (weil $b = g(a)$) und folglich $f(y) \in B(f(b), \varepsilon)$. Aber $f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ und $f(b) = (f \circ g)(a)$. Damit ist bewiesen, dass folgende Aussage wahr ist:

$$x \in B(a, \delta_2) \;\Rightarrow\; (f \circ g)(x) \in B((f \circ g)(a), \varepsilon) \ .$$

□

## 12.2 Konvexität

**Definition.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall so, dass $I \subset D_f$ ist. $f$ heißt **konvex auf** $I$, falls für jede $a, b \in I$ mit $a < b$ gilt, dass die (lineare) Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \ x \in \mathbb{R}$$

die Eigenschaft

$$\forall x \in (a, b) : \ f(x) \le g(x)$$

erfüllt. Die Funktion $f$ heißt **konkav auf** $I$, falls für jede $a, b \in I$ mit $a < b$ die oben definierte lineare Funktion $g$ die Eigenschaft

$$\forall x \in (a, b) : \ f(x) \ge g(x)$$

erfüllt. Die Funktion heißt **strikt konvex** bzw. **strikt konkav auf** $I$, falls die Eigenschaften mit $<$ statt $\le$ bzw. mit $>$ statt $\ge$ gelten.

**Beispiele.**

- Lineare Funktionen sind konvex und auch konkav auf $\mathbb{R}$, aber nicht strikt konvex.

- Die Funktion $f$ definiert durch $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ konvex, sogar strikt konvex, weil die Ungleichung

  $$g(x) = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) + a^2 > x^2 = f(x)$$

  äquivalent zu

  $$(b + a)(x - a) > (x + a)(x - a)$$

  ist und diese stets wahr für $x \in (a, b)$ ist.

- Die Funktion $f$, definiert durch $f(x) = -x^2$ für $x \in \mathbb{R}$, ist auf $\mathbb{R}$ konkav. Dies kann man entweder direkt nachprüfen, oder es folgt aus der Konvexität der Funktion $-f$ auf $\mathbb{R}$.

**Satz (hinreichende Bedingung für Konvexität).** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $I \subset D_f$. Nehmen wir an, dass $f$ auf $I$ zweimal differenzierbar ist.

i) Wenn für jedes $x \in I$ gilt, dass $f''(x) \geq 0$ ist, dann ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $I$ konvex.

ii) Wenn für jedes $x \in I$ gilt, dass $f''(x) \leq 0$ ist, dann ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $I$ konkav.

iii) Wenn für jedes $x \in I$ gilt, dass $f''(x) > 0$ ist, dann ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $I$ strikt konvex.

iv) Wenn für jedes $x \in I$ gilt, dass $f''(x) < 0$ ist, dann ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $I$ strikt konkav.

Beweis von i). Seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $x \in (a, b)$. Die Funktion $f$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Lagrange auf $[a, x]$ und daher existiert $\xi_a \in (a, x)$ mit $f'(\xi_a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Die Funktion $f$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Lagrange auf $[x, b]$ und daher existiert $\xi_b \in (x, b)$ mit $f'(\xi_b) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. Da für alle $x \in (a, b)$ $(f')'(x) > 0$ ist, ist die Funktion $f'$ auf dem Intervall $(a, b)$ monoton wachsend. Da nach Wahl $\xi_a < \xi_b$ ist, gilt folglich $f'(\xi_a) \leq f'(\xi_b)$. Zusammengefasst bekommen wir

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} .$$

Diese Ungleichung äquivalent umgestellt liefert die gewünschte Aussage.

□

Für zweimal differenzierbare Funktionen können wir feststellen, dass Konvexität bedeutet, dass die Ableitung monoton wachsend ist, und Konkavität bedeutet, dass die Ableitung monoton fallend ist.

**Definition.** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $K \subset V$ eine Teilmenge. $K$ heißt **konvex**, falls für jede zwei Elemente $u, v \in K$ die Menge $\{u + t(v - u) : t \in [0, 1]\}$ stets Teilmenge von $K$ ist.

In der Übung werden Zusammenhänge zwischen konvexen Funktionen und konvexen Mengen untersucht. Folgendes Resultat können wir schon mit unseren Kenntnissen beweisen. Vergleiche diese Aussage mit dem Satz über das Lot von einem Punkt auf eine Gerade oder auf eine Ebene aus der analytischen Geometrie!

**Satz (Projektion auf konvexe Menge).** Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$, ausgestattet mit der Euklidischen Metrik $d$. Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge und $P \in \mathbb{R}^2$ ein Element mit $P \notin g$. Dann existiert genau ein Element $P_g \in \mathbb{R}^2$ welches folgende Eigenschaften hat:

i) $P_g \in g$,

ii) für alle $Q \in g$ gilt $d(P_g, P) \leq d(Q, P)$, und wenn zusätzlich $Q \neq P_g$ ist, dann gilt sogar $d(P_g, P) < d(Q, P)$.

**Ende 3. Vorlesung**

**4. Vorlesung am Donnerstag 20.4.2017**

# 13 Integrationsmethoden

Wiederholung: Stammfunktion zu einer Funktion auf einem offenen Intervall

**Definition.** Eine Stammfunktion $F$ zu einer Funktion $f$ auf einem offenem Intervall $I$ heißt auch **unbestimmtes Integral von $f$ auf $I$**. Notation: $F = \int f$ auf $I$ (diese Notation ist problematisch, da das unbestimmte Integral nicht eindeutig ist).

**Satz (nicht-Eindeutigkeit).** Sind $F$ und $G$ beide Stammfunktionen zu $f$ auf dem Intervall $I$, dann existiert eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\forall x \in I : F(x) = G(x) + c \; .$$

Beweis. Für alle $x \in I$ gilt $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Wenn die Funktion $h$ definiert durch $h(x) = F(x) - G(x)$ für $x \in I$ nicht konstant wäre, dann existieren $a, b \in I$ mit $h(a) \neq h(b)$. Nach dem Satz von Lagrange existiert ein $\xi$ zwischen $a$ und $b$ mit $h'(\xi) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}$. Da hier die linke Seite gleich 0 (wegen Voraussetzung) und die rechte Seite ungleich 0 (wegen Wahl von $a, b$) ist, ist dies ein Widerspruch. Deswegen muss die Funktion $h$ konstant auf $I$ sein.

$\square$

**Definition.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $I \subset D_f$. Wir können schreiben $I = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a < b$. Nehmen wir an, dass $F$ eine Stammfunktion zu $f$ auf $(a, b)$ ist und dass die Grenzwerte $\lim_{x \to a+} F(x)$ und $\lim_{x \to b-} F(x)$ existieren (als reelle Zahlen oder als Symbole $+\infty, -\infty$) und dass ihre Differenz existiert (Bedeutung siehe später). Dann heißt die (reelle Zahl oder Symbol)

$$\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

**(das) bestimmte Integral von** $f$ **von** $a$ **bis** $b$ und wird durch $\int_a^b f$ bezeichnet.

**Satz (Eindeutigkeit).** Sind $F_1$ und $F_2$ beide Stammfunktionen zu $f$ auf dem Intervall $I$, und die Voraussetzungen des oberen Satzes für $F_1$ sind erfüllt, dann sind diese Voraussetzungen auch für $F_2$ erfüllt und es gilt

$$\lim_{x\to b-} F_1(x) - \lim_{x\to a+} F_1(x) = \lim_{x\to b-} F_2(x) - \lim_{x\to a+} F_2(x) \ .$$

Das bedeutet, dass die Definition von dem bestimmten Integral unabhängig von der Wahr der Stammfunktion ist.

Beweis. Wir wissen schon, dass sich zwei Stammfunktionen zu einer Funktion auf einem Intervall nur um eine additive Konstante unterscheiden, d.h. $F_1 = F_2 + c$. Daraus folgt die ganze Aussage.

$\square$

**Beispiele.**

- $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Die Funktion $F_1$ definiert durch $F_1(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ hat die Ableitung $F_1'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$ für $x \in (0, +\infty)$, folglich ist $F_1$ eine Stammfunktion zu $f$ auf $(0, +\infty)$. Auch $F_1 + 13$ ist eine Stammfunktion zu $f$ auf $(0, +\infty)$. Die Funktion $F_2$ definiert durch $F_2(x) = \ln(-x)$ für $x < 0$ hat Ableitung $F_2'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$ für $x \in (-\infty, 0)$, folglich ist $F_2$ eine Stammfunktion zu $f$ auf $(-\infty, 0)$. Wir können sagen, dass für die Funktion $F$ definiert durch $F(x) = \ln(|x|)$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $F' = f$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt, aber wir werden nicht sagen, dass "$F$ Stammfunktion zu $f$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist", weil $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kein Intervall ist. Außerdem gilt auch für die Funktion $G$ definiert durch $G(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ und $G(x) = \ln(-x) + 13$, dass $G' = f$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber $F - G$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht konstant. Deswegen ist es wichtig, Stammfunktionen auf einem (offenen) Intervall zu definieren.
- $$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{wenn } x \geq 0, \\ \sin(x), & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Die Funktion $F_1$, $F_1(x) = \frac{x^4}{4}$ für $x > 0$, ist eine Stammfunktion zu $f$ auf $(0, +\infty)$. Die Funktion $F_2$, $F_2(x) = -\cos(x)$ für $x < 0$, ist eine Stammfunktion zu $f$ auf $(-\infty, 0)$. Wir definieren die Funktion $H$ und prüfen nach, dass sie Stammfunktion zu $f$ auf $\mathbb{R}$ ist.

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} - 1, \text{ wenn } x > 0, \\ -\cos(x), \text{ wenn } x < 0, \\ -1, \text{ wenn } x = 0. \end{cases}$$

Für $x > 0$ gilt $H'(x) = x^3 = f(x)$, für $x < 0$ gilt $H'(x) = \sin(x) = f(x)$. Weiter berechnen wir mit Hilfe der Definition

$$\begin{aligned} H'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^4}{4} - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^3}{4} = 0\ , \\ H'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\cos(x) - (-1)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1 - \cos(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} = 0\ , \end{aligned}$$

woraus folgt, dass $H$ an der Stelle 0 differenzierbar ist und $H'(0) = 0 = f(0)$. Damit ist nachgeprüft, dass $H$ eine Stammfunktion zu $f$ auf dem Intervall $\mathbb{R}$ ist.

- Die Funktion $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Auf dem Intervall $(0, +\infty)$ ist $F_1(x) = x$ eine Stammfunktion von $f$, und auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ ist $F_2(x) = -x$ eine Stammfunktion von $f$. Wir zeigen, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ keine Stammfunktion besitzt. Wenn $F$ eine Stammfunktion von $f$ auf $\mathbb{R}$ wäre, dann ist $F$ stetig, weil sie differenzierbar ist. Insbesondere ist $F$ stetig in 0 von rechts. Außerdem gilt, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0+} F'(x)$ existiert, weil dieser gleich $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$ ist. Nach dem Satz über Stetigkeit der Ableitung gilt, dass $F$ in 0 von rechts differenzierbar ist mit $F'_+(0) = 1$. Mit ähnlicher Überlegung bekommen wir, dass $F$ in 0 von links differenzierbar ist mit $F'_-(0) = -1$. Da $-1 \neq 1$ ist, ist $F$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Das ist aber ein Widerspruch mit der Tatsache, dass $F'(0) = f(0)$ ist.

- $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. $f$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, deswegen besitzt sie eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}$ (ohne Beweis), aber es ist nicht möglich, diese Stammfunktion mit Hilfe der Rechenregeln der (eindimensionalen) Integralrechnung als Summe, Produkt und Komposition von elementaren Funktionen aufzuschreiben.

**Ende 4. Vorlesung**

**5. Vorlesung am Montag 24.4.2017**

## 13.1 Exkurs: Symbole $+\infty, -\infty$

$\mathbb{R}$ ist eine Menge, wir führen zwei neue Symbolen ein: $+\infty \notin \mathbb{R}$ und $-\infty \notin \mathbb{R}$ mit $+\infty \neq -\infty$. Dann ist $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ eine Menge, wir werden sie mit $\mathbb{R}^*$ abkürzen. Auf $\mathbb{R}^*$ führen wir die Relation $<$ ein: wenn $x, y \in \mathbb{R}$, dann habe $x < y$ die übliche Bedeutung, sei weiter $-\infty < +\infty$ wahr und für alle $x \in \mathbb{R}$ seien $-\infty < x$ und $x < +\infty$ wahr. Dann ist die entsprechende $\leq$ eine Ordnungsrelation auf der Menge $\mathbb{R}^*$. Wir definieren die (nicht im strengen Sinne) binären Operationen $+, \cdot$ auf jeweils geeigneten Teilmengen von $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$:

$$\begin{gathered}
\text{für } x, y \in \mathbb{R} \text{ habe } x + y \text{ die übliche Bedeutung von Summe,} \\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \\
\text{für } x \in \mathbb{R} \text{ sei } x + (+\infty) = +\infty, x + (-\infty) = -\infty
\end{gathered}$$

und kommutativ erweitert (aber wir definieren nicht (!) "$(+\infty) + (-\infty)$"),

$$\begin{gathered}
\text{für } x, y \in \mathbb{R} \text{ habe } x \cdot y \text{ die übliche Bedeutung von Produkt,} \\
(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,\ (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \\
\text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0 \text{ seien } x \cdot (+\infty) = +\infty,\ x \cdot (-\infty) = -\infty, \\
\text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x < 0 \text{ seien } x \cdot (+\infty) = -\infty,\ x \cdot (-\infty) = +\infty
\end{gathered}$$

und kommutativ erweitert, aber wir definieren nicht (!) "$0 \cdot (+\infty)$" und "$0 \cdot (-\infty)$" . Differenz ist definiert als + mit der Entgegengesetzten (Entgegengesetzte zu $x$ ist $(-1) \cdot x$), und weiter definieren wir folgende Quotienten

$$\frac{1}{+\infty} = 0 \quad \frac{1}{-\infty} = 0 \ ,$$

aber wir definieren nicht $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{1}{0}$ !

Wir haben diese Ausdrücke deswegen so definiert, weil z.B. folgender Satz über Grenzwerte gilt.

**Satz.** Wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $a$ einen Grenzwert (als reelle Zahl oder als plus Unendlich oder als minus Unendlich) besitzt und die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $a$ einen Grenzwert (als reelle Zahl oder als plus Unendlich oder als minus Unendlich) besitzt und das Element $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ definiert ist (im Sinne von $\mathbb{R}^*$), dann besitzt die Funktion $f+g$ an der Stelle $a$ einen Grenzwert, und zwar den $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

Beweis folgt mit Fallunterscheidung aus der Definition.

$\square$

Vergleiche diese Aussage mit dem Satz über den Grenzwert von Summen von Folgen, welcher in sechs einzelnen Aussagen formuliert war. Mit der Einführung von dem Modell $\mathbb{R}^*$ können wir die einzelnen Aussagen eleganter als eine Aussage formulieren. Wir könnten auch die Definition von bestimmten Integral mit Hilfe von $\mathbb{R}^*$ eleganter aufschreiben.

## 13.2 Rechenregeln der Integralrechnung

**Satz (über Vielfaches und Summe).** Seien $a, b \in \mathbb{R}^*$ mit $a < b$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $(a, b) \subset D_f, D_g$.

i) Wenn $f$ bestimmtes Integral von $a$ bis $b$ besitzt und $\lambda \in \mathbb{R}$ und der Term $\lambda \cdot \int_a^b f$ existiert, dann besitzt die Funktion $\lambda \cdot f$ bestimmtes Integral von $a$ bis $b$ und es gilt

$$\int_a^b (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \left( \int_a^b f \right) .$$

ii) Wenn $f$ und $g$ bestimmte Integrale von $a$ bis $b$ besitzen und der Term $\int_a^b f + \int_a^b g$ existiert, dann besitzt die Funktion $f+g$ bestimmtes Integral von $a$ bis $b$ und es gilt

$$\int_a^b (f+g) = \left( \int_a^b f \right) + \left( \int_a^b g \right) .$$

Beweis folgt direkt aus der Definition. Wir werden dies nicht aufschreiben.

$\square$

**Satz (Integration per partes).** Seien $a, b \in \mathbb{R}^*$ mit $a < b$, bezeichne $I = (a, b)$ das offene Intervall.

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen so, dass $I \subset D_f$, $I \subset D_g$ und nehmen wir an, dass $f, g$ Stammfunktionen auf $I$ besitzen, nennen wir diese $F$ bzw. $G$.

Äquivalent gesagt, seien $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen so, dass $I \subset D_F$, $I \subset D_G$ und nehmen wir an, dass $F, G$ differenzierbar auf $I$ sind, nennen wir die Ableitungen $f$ bzw. $g$.

a) (unbestimmtes Integral) Wenn $f \cdot G$ auf $I$ eine Stammfunktion besitzt, nennen wir diese $H$, dann besitzt $F \cdot g$ eine Stammfunktion auf $I$, und zwar $F \cdot G - H$. Mit Symbolen geschrieben:

$$\int (F \cdot g) = F \cdot G - \int (f \cdot G)$$

bzw. (Klammer, Multiplikationssymbol weggelassen)

$$\int FG' = FG - \int F'G \ .$$

b) (bestimmtes Integral) Wenn $\int_a^b fG$ existiert und $\lim_{x \to b-}(F(x) \cdot G(x))$, $\lim_{x \to a+}(F(x) \cdot G(x))$, und sowohl $\lim_{x \to b-}(F(x) \cdot G(x)) - \lim_{x \to a+}(F(x) \cdot G(x))$ auch $\lim_{x \to b-}(F(x) \cdot G(x)) - \lim_{x \to a+}(F(x) \cdot G(x)) - \int_a^b fG$ existieren, dann existiert auch $\int_a^b Fg$ und

$$\int_a^b Fg = \lim_{x \to b-}(F(x) \cdot G(x)) - \lim_{x \to a+}(F(x) \cdot G(x)) - \int_a^b fG \ .$$

Mit Symbolen geschrieben:

$$\int_a^b FG' = FG|_a^b - \int_a^b F'G \ .$$

Beweis. a) Die Funktion $F \cdot G - H$ ist differenzierbar als Produkt und Summe von differenzierbaren Funktionen und mit Rechenregeln der Differentialrechnung und unter Benutzung der Voraussetzungen können wir für $x \in I$ berechnen:

$$\begin{aligned}(F \cdot G - H)'(x) &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - H'(x) \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) = (F \cdot g)(x) \ .\end{aligned}$$

b) folgt aus a) dank der Voraussetzungen.

□

Notation: wenn die Variable der Funktion $f$ $x$ genannt ist, schreibe $\int f$ auch als $\int f(x)dx$. So ist z.B. $\int xdx = \frac{x^2}{2}$, $\int ydx = yx$, $\int xdy = xy$. Diese Notation ist nicht ganz korrekt, wird aber benutzt.

**Beispiele.**

- Ist $p$ eine Polynomfunktion, kann man $\int p(x)e^x dx$ mit endlich vielen Schritten mit Hilfe der Integration per partes berechnen ($p$ wird differenziert und $e^x$ integriert).
- Auch $\int p(x)\cos(x)dx$ und $\int p(x)\sin(x)dx$, für $p$ Polynom.
- Oft wird der Trick benutzt, dass man den künstlichen Faktor 1 integriert:

$$\int \log(x)dx = \int 1\cdot\log(x)dx = x\cdot\log(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\log(x) - x \text{ auf } \mathbb{R}\,.$$

**Satz (Substitution I).** Seien $a, b \in \mathbb{R}^*$ mit $a < b$ und bezeichne $I = (a, b)$ (offenes Intervall). Seien $f, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen so, dass $I \subset D_\varphi$ und $\varphi(I) \subset D_f$ und dass $\varphi$ auf $I$ differenzierbar ist. (Beachte, dass dann $\varphi$ stetig und folglich $\varphi(I)$ wieder ein Intervall ist!)

a) (unbestimmtes Integral) Wenn $f$ auf $\varphi(I)$ eine Stammfunktion besitzt, nennen wir sie $F$, dann besitzt $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ eine Stammfunktion auf $I$, nämlich $F \circ \varphi$. Mit Symbolen geschrieben:

$$\int (f \circ \varphi \cdot \varphi') = \left(\int f\right) \circ \varphi \text{ auf } I\ .$$

Beweis. a) Aufgrund der Voraussetzungen und mit den Rechenregeln der Differentialrechnung wir können für $x \in I$ berechnen:

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ .$$

**Ende 5. Vorlesung**

**6. Vorlesung am Donnerstag 27.4.2017**

Bemerkung: Es ist praktisch, $\int_b^a f = -\int_a^b$ für $a < b$ und $\int_a^a f = 0$ zu schreiben.

b) (bestimmtes Integral) Wenn $\lim_{x\to a+}\varphi(x)$ und $\lim_{x\to b-}\varphi(x)$ als Elemente von $\mathbb{R}^*$ existieren und wenn $\int_{\lim_{x\to a+}\varphi(x)}^{\lim_{x\to b-}\varphi(x)} f$ existiert, dann existiert auch $\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ und

$$\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\lim_{x\to a+}\varphi(x)}^{\lim_{x\to b-}\varphi(x)} f\ .$$

Beweis. b) folgt aus a) dank der Voraussetzungen von dem Satz über den Grenzwert der Komposition.

□

**Satz (Substitution II).** Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $J \subset D_\psi$ welche monoton auf $J$ ist, eine bijektive Abbildung zwischen $J$ und $I$ ist und differenzierbar auf $J$ ist mit $\psi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. (Beachte, dass dann $\psi$ injektiv auf $J$ ist, folglich die inverse Abbildung $\psi_{-1} : I \to J$ existiert und sogar differenzierbar auf $I$ ist !)

a) (unbestimmtes Integral) Wenn die Funktion $(f \circ \psi) \cdot \psi'$ auf $J$ eine Stammfunktion besitzt, nennen wir diese $H$, dann besitzt $f$ auf $I$ eine Stammfunktion, nämlich $H \circ \psi_{-1}$ als eine Stammfunktion zu $f$ auf $I$. Mit Symbolen geschrieben:

$$\int f = \left( \int f \circ \psi \cdot \psi' \right) \circ \psi_{-1} \text{ auf } I \ .$$

b) (bestimmtes Integral) Bezeichne $I = (a, b)$, $\alpha = \lim_{x \to a+} \psi_{-1}(x)$ und $\beta = \lim_{x \to b-} \psi_{-1}(x)$ (beachte, dass diese Grenzwerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ existieren, da $\psi$ und damit auch $\psi_{-1}$ monoton ist). Wenn $\int_\alpha^\beta (f \circ \psi) \cdot \psi'$ existiert, dann existiert auch $\int_a^b f$ und

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \psi) \cdot \psi' \ .$$

(Beachte, dass $J = (\alpha, \beta)$ falls $\psi$ monoton wachsend ist und $J = (\beta, \alpha)$ falls $\psi$ monoton fallend auf $J$ ist.)

Ohne Beweis, obwohl er nicht viel schwieriger als der erste ist. Aber dieser zweite Satz ist wichtiger als der erste und wir werden diesen Satz benutzen.

**Beispiele.**

- $\int e^{\sin(x)} \cos(x) dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$ mit Substitution I
- $\int (\sin(x))^5 dx$ mit Umstellung $(\sin(x))^5 = ((\sin(x))^2)^2 \sin(x) = (1 - (\cos(x))^2)^2 \sin(x)$ und Substitution I
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$. Bezeichne $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, dann ist $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Hinweis: Substitution II, $\psi(t) = -\frac{1+t^2}{2t}$. Nebenrechnung: Kurvenverlauf von $\psi$. Nehme $I_1 = (-\infty, -1)$ und z.B. $J_1 = (0, 1)$,

dann sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Wir berechnen $(f \circ \psi) \cdot \psi'$ und bekommen $\frac{1}{t}$. Diese Funktion besitzt eine Stammfunktion, nämlich $\ln(t)$ auf $(0,1)$. Berechne die Inverse zu $\psi$, und damit ist $\ln(-x-\sqrt{x^2-1})$ eine Stammfunktion zu $f$ auf $I_1$. Mit dem gleichen Hinweis berechnet man eine Stammfunktion zu $f$ auf $I_2 = (1, +\infty)$.

- $\int \frac{1}{1+\sin(x)} dx$. Bezeichne $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$, dann ist $D_f = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$. Insbesondere ist $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \subset D_f$ ein Intervall. Hinweis: mit Substitution II, $\psi(t) = 2\arctan(t)$. Nebenrechnung: Kurvenverlauf von $\psi$; nehme $I_1 = (-\frac{\pi}{2}, \pi)$ und $J_1 = (-1, +\infty)$. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

  Berechne $(f \circ \psi) \cdot \psi'$ mit Trick. Man kann schreiben $\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2}) = 2\tan(\frac{x}{2})\left(\cos(\frac{x}{2})\right)^2$ für $x \in I_1$. Für $x \in I_1$ ist $\psi(t) = x$ äquivalent zu $t = \tan(\frac{x}{2})$ und es folgen $t^2 = \frac{1-(\cos(\frac{x}{2}))^2}{(\cos(\frac{x}{2}))^2}$, $\left(\cos(\frac{x}{2})\right)^2 = \frac{1}{1+t^2}$. Damit ist $\sin(x) = 2 \cdot t \cdot \frac{1}{1+t^2}$ und wir können berechnen

  $$((f \circ \psi) \cdot \psi')(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = \frac{1}{1+2t \cdot \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} = ... = \frac{2}{(1+t)^2}$$

  für $t \in J_1$. Eine Stammfunktion zu $\frac{2}{(1+t)^2}$ auf $J_1$ ist $-\frac{2}{1+t}$. Laut Substitution II ist dann $F_1(x) = -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})}$ eine Stammfunktion zu $f$ auf $I_1$.

  Um eine Stammfunktion zu $f$ auf $I_2 = (\pi, \frac{3\pi}{2})$ zu bestimmen, nehme $\psi(t) = 2\arctan(t) + 2\pi$, $J_2 = (-\infty, -1)$. Mit analogen Nebenrechnungen bekommen wir eine Funktion $F_2(x) = -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})}$, welche Stammfunktion zu $f$ auf $I_2$ ist. Berechne $\lim_{x\to\pi-} F_1(x) = 0$ und $\lim_{x\to\pi+} F_2(x) = 0$ und definiere

  $$F(x) = \begin{cases} F_1(x), \text{ wenn } x \in I_1 = (-\frac{\pi}{2}, \pi), \\ 0, \text{ wenn } x = \pi, \\ F_2(x), \text{ wenn } x \in I_2 = (\pi, \frac{3\pi}{2}) \ . \end{cases}$$

  Wir prüfen jetzt nach, dass $F$ tatsächlich eine Stammfunktion zu $f$ auf $I$ ist: für $x \in I_1$ gilt mit den Rechenregeln für Ableitung

  $$F'(x) = F_1'(x) = \left(-\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})}\right)' = ... = \frac{1}{1+\sin(x)} \ ,$$

  für $x \in I_2$ gilt mit den Rechenregeln für Ableitung

  $$F'(x) = F_2'(x) = \left(-\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})}\right)' = ... = \frac{1}{1+\sin(x)} \ .$$

Es bleibt die Ableitung an der Stelle $x = \pi$ zu bestimmen. Dazu werden wir den Satz über der Berechnung der Ableitung an der Stelle von links bzw. rechts durch den Grenzwert der Ableitung benutzen, da die Voraussetzung, dass $F$ stetig in $\pi$ von links bzw. von rechts ist, erfüllt ist. Weil

$$F'_-(\pi) = \lim_{x\to\pi-} F'(x) = \lim_{x\to\pi-} \frac{1}{1+\sin(x)} = 1 \text{ und}$$
$$F'_+(\pi) = \lim_{x\to\pi+} F'(x) = \lim_{x\to\pi+} \frac{1}{1+\sin(x)} = 1$$

existieren und gleich sind, ist $F$ an der Stelle $\pi$ differenzierbar und $F'(\pi) = 1$. Außerdem ist $f(\pi) = 1$, also $F'(\pi) = f(\pi)$. Wir haben bewiesen, dass $F$ Stammfunktion zu $f$ auf $I$ ist.

Es bleibt übrig, Stammfunktionen zu $f$ auf den anderen Intervallen des Definitionsbereiches zu finden.

Antwort: Für beliebige $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist die Funktion $F$ definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + c, \text{ wenn } x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ c, \text{ wenn } x = 2k\pi, \\ -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + c, \text{ wenn } x \in (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \end{cases}$$

Stammfunktion zu $\frac{1}{1+\sin(x)}$ auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$. Damit sind alle Stammfunktionen in allen (großmöglichsten) Intervallen gegeben.

**Ende 6. Vorlesung**

**7. Vorlesung am Donnerstag 4.5.2017**

Wir beenden die Rechnungen der letzten Aufgabe.

## 13.3 Integration rationalen Funktionen

Sind $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen, heißt die Funktion $f = \frac{p}{q}$ eine **rationale Funktion**. Ihr natürlicher Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus N$, wobei $N$ die Menge aller reellen Nullstellen von $q$ ist. Wir können eventuell den Term $\frac{p(x)}{q(x)}$ vereinfachen, wenn wir die Polynome faktorisieren und den Bruch kürzen. Wir wissen schon, dass rationale Funktionen an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig sind. Wir können die einseitigen Grenzwerte an Randpunkten des Definitionsbereiches (also in $-\infty, +\infty$ und an Elementen von $N$) berechnen. Wir wissen, dass $f$ differenzierbar ist und wir können ihre Ableitung berechnen. Ziel der Übung ist zu zeigen, dass die Integration von solchen Funktionen immer möglich ist (oft aber lang und technisch).

# 14 Differentialgleichungen

## 14.1 Modellbeispiele

Wir wenden uns an Aufgaben, wo die Unbekannte eine Funktion ist (oder mehrere Funktionen) und die Aufgabe mit Hilfe einer (oder mehreren) Gleichung geschrieben ist, wobei die Ableitung (bzw. Ableitungen) der gesuchten Funktion auftauchen.

**Beispiele.**

- Finde die Stammfunktion zu einer Funktion $f$ auf einem Intervall $I$! Zum Beispiel, für $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = I$ haben wir die Aufgabe, alle Funktionen $F : I \to \mathbb{R}$ mit $D_F = I$ zu bestimmen, für welche
$$\forall x \in I : F'(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$$
gilt. Wir wissen schon, dass die Lösungsmenge
$$\{F+c : c \in \mathbb{R}\}, \text{ wobei } F(x) = \begin{cases} \frac{-2}{1+\tan(\frac{x}{2})}, \text{ wenn } x \in (-\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}) \setminus \{\pi\}, \\ 0, \text{ wenn } x = \pi, \end{cases}$$
ist.

- Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für welche
$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2f(x)$$
gilt! Diese Gleichung beschreibt ein Modell der Populationsdynamik, welches der britische Ökonom Malthus im 18. Jahrhundert vorgeschlagen hat. Wir werden lernen, wie man die Menge aller Lösungen bestimmen kann. Die Lösungsmenge ist
$$\{c \cdot F : c \in \mathbb{R}\}, \text{ wobei } F(x) = e^{2x} \text{ für } x \in \mathbb{R} .$$

- Gegeben sind die positiven Zahlen $m, l \in \mathbb{R}$, bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für welche
$$\forall x \in \mathbb{R} : m \cdot l \cdot f''(x) = -m \cdot g \cdot \sin(f(x))$$
gilt ($g$ ist die bekannte Beschleunigungskonstante) ! Diese Gleichung beschreibt das einfache Pendel und ist nicht explizit lösbar. Die vereinfachte Version, wo man für kleine $f(x)$ den Term $\sin(f(x))$ durch $f(x)$ ersetzt, d.h.
$$\forall x \in \mathbb{R} : m \cdot l \cdot f''(x) = -m \cdot g \cdot f(x)$$

werden wir zu lösen lernen. Die Lösungsmenge ist

$$\{c \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}x + d\right) : c, d \in \mathbb{R}\} .$$

**Ende 7. Vorlesung**

**8. Vorlesung am Montag 8.5.2017**

Wir lösen jetzt einige der Modellprobleme.

• Die Aufgabe eine Stammfunktion zu finden formulieren wir um: gegeben ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein offenes Intervall $I \subset D_g$, finde alle Funktionen $f$ mit

$$f' = g \text{ auf } I .$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\exists c \in \mathbb{R} : f = \int g + c \text{ auf } I .$$

• Wir lösen die Aufgabe: finde $f$ mit

$$f' = 2 \cdot f \text{ auf } \mathbb{R} .$$

Wenn $I_0 \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I_0$, dann ist die Teilaufgabe

$$f' = 2f \text{ auf } I_0$$

äquivalent zu

$$\frac{f'}{f} = 2 \text{ auf } I_0,$$

$$\exists c \in \mathbb{R} : \int \frac{f'}{f} = \int 2 + c \text{ auf } I_0 .$$

Eine Stammfunktion zu $g(y) = \frac{1}{y}$ auf $(0, +\infty)$ ist $G(y) = \ln(y)$, und eine Stammfunktion zu $g(y) = \frac{1}{y}$ auf $(-\infty, 0)$ ist $G(y)) = \ln(-y)$. Folglich, nach dem Satz Substitution I ist auf einem Intervall $I$ mit $f(x) > 0$ für $x \in I$ die Funktion $\ln(f)$ eine Stammfunktion zu $\frac{f'}{f}$ auf $I$, und auf einem Intervall $I$ mit $f(x) < 0$ für $x \in I$ die Funktion $\ln(-f)$ eine Stammfunktion zu $\frac{f'}{f}$ auf $I$. Außerdem ist $2x$ eine Stammfunktion zu 2 auf $\mathbb{R}$, insbesondere dann auch auf einem Intervall $I$. Folglich ist unsere Teilaufgabe äquivalent umgestellt

$$\exists c \in \mathbb{R} : \ln(f(x)) = 2x + c,\ x \in I_0$$

in dem ersten Fall, d.h. wenn $f(x) > 0$ für $x \in I_0$, und

$$\exists c \in \mathbb{R} : \ln(-f(x)) = 2x + c,\ x \in I_0$$

in dem zweiten Fall, d.h. wenn $f(x) < 0$ für $x \in I_0$. Diese Aussagen sind weiter äquivalent umformuliert als

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = \exp(2x + c), x \in I_0 ,$$

bzw.

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = -\exp(2x + c), x \in I_0 .$$

In beiden Fällen ist damit die Funktion $f$ bestimmt. Wir führen die Probe durch, dass $\exp(2x + c) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, damit ist das Intervall $I_0$ auch bestimmt, man kann in beiden Fällen $I_0 = \mathbb{R}$ nehmen. Somit haben wir Lösungen $f(x) = \exp(2x + c) = \exp(2x) \cdot \exp(c) = d \exp(2x)$, $x \in \mathbb{R}$, für beliebige $d > 0$, und $f(x) = -\exp(2x + c) = -\exp(2x) \cdot \exp(c) = d \exp(2x)$, $x \in \mathbb{R}$, für beliebige $d < 0$ gefunden.

Es bleibt der Fall, dass $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist, zu untersuchen. Da alle Lösungen, für welche $f(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, zumindest auf einer Umgebung von $x_0$ schon in ersten Teil gefunden wurden, bleibt nur die Nullfunktion, $f_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, zu untersuchen. Diese erfüllt offensichtlich unsere Gleichung.

Zusammengefasst ist die Lösungsmenge $\{d \cdot e^{2x} : d \in \mathbb{R}\}$.

- Wir lösen die Aufgabe: finde alle Funktionen $f$ mit

$$f'' = -g \sin(f) \text{ auf } \mathbb{R} .$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $f'$ (das ist ein Trick) und schreiben Schritt für Schritt um:

$$\begin{aligned} f''f' &= -g \sin(f) f', \\ \left(\frac{1}{2}(f')^2\right)' &= (g \cos(f))', \\ \frac{1}{2}(f')^2 &= g \cos(f) + c, \\ \frac{f'}{\sqrt{2g \cos(f) + 2c}} = 1 \text{ bzw. } &\frac{f'}{-\sqrt{2g \cos(f) + 2c}} = 1 . \end{aligned}$$

Da wir die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2g \cos(y) + 2c}}$ (als Funktion der Variable $y$) nicht elementar integrieren können, können wir an dieser Stelle nicht weiterrechnen.

- Wir lösen mit der gleichen Methode die linearisierte Gleichung:

$$\begin{aligned} f'' &= -gf, \\ f''f' &= -gff', \\ \left(\frac{1}{2}(f')^2\right)' &= (g\frac{1}{2}f^2)', \\ \frac{1}{2}(f')^2 &= g\frac{1}{2}f^2 + c, \\ \frac{f'}{\sqrt{gf^2+2c}} &= 1 \text{ bzw. } \frac{f'}{-\sqrt{gf^2+2c}} = 1 \ . \end{aligned}$$

Da man die Stammfunktion zu $\frac{1}{\sqrt{gy^2+2c}}$ (als Funktion der Variable $y$) mit den bisher gelernten Methoden bestimmen kann, würde man die entsprechenden Lösungen bekommen. Wir werden diese hier nicht berechnen, sondern die Aufgabe mit einer anderen Methode lösen.

Setze $u_1 = f$ und $u_2 = f'$. Statt eine Funktion $f$ werden wir zwei Funktionen $u_1, u_2$ suchen (eine scheinbar kompliziertere Aufgabe). Es gilt $u_1' = u_2$, $u_2' = f'' = -\frac{f}{g} = -\frac{1}{g}u_1$, und damit ist die Gleichung

$$f'' = -gf$$

mit $u = (u_1, u_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ äquivalent aufgeschrieben als

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} ,$$

d.h. in der Form $u' = Au$ mit einer bekannten Matrix $A$. Diese Form erinnert an lineare Differenzengleichungssysteme, und wir werden unser lineares Differentialgleichungssystem mit der aus der linearen Algebra gelernten Methode lösen.

## 14.2 Lineare Differentialgleichungssysteme (mit konstanten Koeffizienten)

### 14.2.1 Lösungsmethode

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ eine Matrix. Wenn $A$ diagonalisierbar ist, sei $C \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ eine invertierbare und $D \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ die diagonale Matrix so, dass $A = CDC^{-1}$. Substituiere $v(t) = C^{-1}u(t)$ in der Gleichung $u' = Au$ und bekomme

$$v' = Dv \ .$$

Dieses System besteht aus $n$ Stück separaten Gleichungen

$$v_1' = \lambda_1 v, \ \dots \ , v_n' = \lambda_n v_n \text{ auf } \mathbb{R} \ ,$$

für welche die Lösungen bekannt sind ($v_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, t \in \mathbb{R}$). Mit Rücksubstitution $u(t) = Cv(t)$ bekommen wir die gesuchte Lösung $u$.

Wenn die Matrix nicht diagonalisierbar ist, man kann die Theorie über Jordan-Form einer Matrix aus linearen Algebra verwenden. Das Problem $u'(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ist immer lösbar.

### 14.2.2 Theorie

**Definition.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfunktion** und kann als $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ (im folgenden als Spaltenvektor) mit $n$ Stück Funktionen $u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \dots, \ u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aufgeschrieben werden.

**Definition.** Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ eine gegebene Matrix. Die Gleichung

$$u'(t) = A \cdot u(t), \quad t \in \mathbb{R} \ ,$$

für die unbekannte Vektorfunktion $u$ werden wir **homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten** nennen.

Sei noch $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $I \subset D_b$ gegeben. Die Gleichung

$$u'(t) = A \cdot u(t) + b(t), \quad t \in I$$

für die Unbekannte $u$ werden wir **inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten** nennen.

Notation. Wir werden die Menge aller Vektorfunktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $D_u = \mathbb{R}$ als $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ bezeichnen. Diese Menge bildet mit der Operation $+$ (Komponentenweise Addition von Funktionen) und Multiplikation mit einem Skalar aus $\mathbb{R}$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

**Satz (über die Struktur der Lösungsmenge).**

a) (homogenes Problem) Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Differentialgleichungssystemes mit konstanten Koeffizienten ist, als Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, ein Vektorraum. Dieser Vektorraum hat die Dimension $n$.

b) (inhomogenes Problem) Sei $u_p$ eine Lösung des inhomogenen Problemes. Dann ist die Lösungsmenge dieses inhomogenen linearen Differentialgleichungssystemes mit konstanten Koeffizienten

$$\{y_p + y : y \text{ ist Lösung des zugehörigen homogenen Problemes }\}$$

(also ein affiner Raum).

Ziel ist also $n$ Stück linear unabhängige Lösungen (eine Basis des Vektorraumes) des homogenen Problemes und eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problemes zu bestimmen.

**Definition.** Eine Lösung $u$ mit $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Trajektorie mit Anfangswert** $u_0$. Für $n = 2$ heißt die Veranschaulichung von allen Trajektorien als Teilmengen der Euklidischen Ebene mit der Angabe des Verhaltens der Lösungen als $t \to +\infty$ durch Pfeile ein **Phasenporträt**.

**Beispiel.** Das Problem des Pendels $f'' = -gf$ umgeschrieben als System für $(u_1, u_2) = (f, f')$ hat die Lösungen $f(t) = c\sin(gt + d)$, $t \in \mathbb{R}$, (für beliebige $c, d \in \mathbb{R}$). Somit ist $f'(t) = cg\cos(gt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ und mit Formel für die Kreisfunktionen bekommen wir, dass die Punkte $(f(t), f'(t))$ auf der Ellipse

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \left(\frac{y}{g}\right)^2 = c^2\}$$

liegen. Die Lösungen sind periodische Funktionen.
**Ende 8. Vorlesung**

**9. Vorlesung am Donnerstag 11.5.2017**

## 14.3 Lineare Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Notation: Die $n$-te Ableitung der Funktion $f$ bezeichnen wir als $f^{(n)}$ (z.B. ist dann $f^{(3)} = f'''$) und sei $f^{(0)} = f$ .

**Definition.** Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und die reelle Zahlen $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ gegeben. Die Gleichung

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = 0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

heißt **homogene lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** für die unbekannte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei zusätzlich die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und das Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $I \subset D_g$ gegeben. Die Gleichung

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = g \text{ auf } I$$

heißt **inhomogene lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Die Lösungsmenge sei mit $\mathrm{Los}(a_n, \ldots, a_0; g)$ (für die inhomogene Gleichung) bzw. mit $\mathrm{Los}(a_n, \ldots, a_0; 0)$ (für die homogene Gleichung) bezeichnet.

### 14.3.1 Theorie

**Satz (über die Struktur der Lösungsmenge)**

a) $\mathrm{Los}(a_n, \ldots, a_0; 0)$ ist, als Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und hat die Dimension $n$.

b) Wenn $f_p$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, dann ist

$$\mathrm{Los}(a_n, \ldots, a_0; g) = \{f_p + f : f \in \mathrm{Los}(a_n, \ldots, a_0; 0)\}$$

(also ein affiner Raum).

Es reicht also eine Lösung der inhomogenen Gleichung ($f_p$, heißt **partikuläre** Lösung) und $n$ Stück linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung ($f_1, f_2, \ldots, f_n$, heißt **Fundamentalsystem**) zu finden. Dann hat eine allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung die Form

$$f_p + c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

mit $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$, und eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung die Form

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

mit $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$. Wenn man eine Lösung mit einer zusätzlichen Bedingung sucht, setzt man diese Form in die Bedingung ein und berechnet daraus die Zahlen $c_1, \ldots, c_n$.

Vergleiche diese Theorie mit der Theorie für lineare Gleichungssysteme (für Zahlen), lineare Differenzengleichungssysteme (für Folgen), lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten (für Funktionen).

### 14.3.2 Lösungsmethode

**Definition** Für die Gleichung

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = 0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

heißt

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

das zugehörige **charakteristische Polynom**.

**Satz (über Konstruktion der Lösungen der homogene Gleichung)**

a) Wenn $\lambda$ eine reelle Nullstelle des charakteristischen Polynomes ist, dann ist $f(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$. Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ eine $m$-fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynomes ist, dann sind die Funktionen

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda x},\ x \in \mathbb{R}\ ,$$

Lösungen der homogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$.

b) Wenn $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynomes ist, dann sind $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ und $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$. Wenn dieses $\lambda$ eine $m$-fache Nullstelle des charakteristischen Polynomes ist, dann sind

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x),\\ &e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{aligned}$$

Lösungen der homogenen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$.

c) Die in a) bis b) aufgelisteten Funktionen bilden ein Fundamentalsystem.

Beweisideen. a), b) Einsetzen.

c) Wegen der Fundamentalsatz der Algebra (Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten besitzt, mit Vielfachheit gerechnet, genau $n$ (i.a. komplexe) Nullstellen. Dieser Satz ist noch nicht bewiesen!) sind in a) bis b) genau $n$ Stück Funktionen aufgelistet. Man kann nachprüfen, dass sie linear unabhängig sind. Weil die Lösungsmenge die Dimension $n$ hat, bilden diese Funktionen eine Basis.

□

Beispiele mit Nachweis, dass die gefundene Funktion eine Lösung ist und dass zwei Funktionen linear unabhängig sind.

Wir haben das Problem "Differentialgleichung lösen" (Analysis) auf das Problem "Nullstellen von Polynom finden" (Algebra) zurückgeführt. Dieses Problem ist nicht immer explizit lösbar. In solchen Fällen kann Numerik zumindest eine approximative Lösung liefern.
**Ende 9. Vorlesung**

**10. Vorlesung am Donnerstag 18.5.2017**

Beispiel: Wir sollen ein Polynom bestimmen, welches 2 als dreifache Nulsstelle und 3 als einfache Nullstelle hat und Grad 4 hat. Zum Beispiel, $(x-2)^2(x-3) = ..$ ausmultipliziert.

Memotechnische Hilfe: für $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x + \mathrm{i}\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\mathrm{i}\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x) + \mathrm{i}\sin(\beta x)) \ .$$

Die hier angewendete Beziehung

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

heißt **Eulersche Formel** und man kann sie aus der Definition der Exponentialfunktion und der Kreisfunktionen als Reihen direkt herleiten.

## 14.4 Differentialgleichungen erster Ordnung

Es geht um eine Gleichung, erste Ableitung und meistens nicht lineares Problem, es ist also keine Vektorraumstruktur vorhanden.

**Definition.** Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Die Gleichung

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)), \quad x \in I$$

heißt **Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen** für die unbekannte Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und (eventuell unbekanntes) Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $I \subset D_y$.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine gegebene Abbildung (wir sagen **Funktion von zwei Variablen**). Die Gleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I$$

heißt **Differentialgleichung erster Ordnung (aufgelöst für $y'$)** für die unbekannte Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $I \subset D_y$.

Bemerkung: Getrennte Variablen sind ein Spezialfall mit $f(x, y) = g(x)h(y)$. Abgekürzt, aber inkorrekt schreiben wir in der Gleichung $y'$ statt $y'(x)$.

**Beispiele.**

- $y' = x \cdot y$ ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
- $y' = x + y$ ist keine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
- $y' = 1 + x$, $y' = 1 + y$ sind Differentialgleichungen mit getrennten Variablen
- $y' = (y')^2 + 1$ ist keine Differentialgleichung mit getrennten Variablen (weil nicht nach $y'$ aufgelöst).
- $y' = y^2 \cdot x$ im strengen Sinne nicht, aber äquivalent umgeschrieben ist $y' = x \cdot y^2$ eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
- $\frac{y'}{x} = y$ im strengen Sinne nicht, aber auf bestimmten Intervallen äquivalent umgeschrieben $y' = x \cdot y$ schon.
- $(y')^2 = \frac{1}{1-y^2}$ nicht (weil nicht aufgelöst nach $y'$), aber auf bestimmten Mengen äquivalent umgeschrieben $y' = \frac{1}{1-y^2}$ bzw. $y' = -\frac{1}{1-y^2}$ ist es eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

### 14.4.1 Lösungsmethode für getrennte Variablen

Man hat zwei Möglichkeiten:

1. Integrieren mit Beachtung der rigorosen Anwendung von Sätzen;
2. Integrieren ohne Beachtung der rigorosen Anwendung von Sätzen und mit rigoroser Durchführung einer Probe und mit Anwendung der Theorie.

Notation: Für die 2. Möglichkeit ist es praktisch, eine kurze (aber nicht korrekte) Notation zu benutzen: ist $f$ eine Funktion der Variable $x$, wird $f'$ als $\frac{df}{dx}$ geschrieben. Beachte, dass eine Stammfunktion zu $f$ auf einem Intervall als $\int f(x)dx$. Dafür gibt es historische und physikalische Gründe.

**Beispiel.** Wir suchen ein Intervall (möglichst groß) und eine Funktion $y$ mit $I = D_y$ so, dass

$$y'(x) = 2 \cdot y(x), \quad x \in I \ .$$

Wir haben dieses Problem bereits mit der 1. Methode gelöst. Wir lösen jetzt diese Gleichung mit der 2. Methode.

1. Schritt (nicht korrekt): Wir schreiben formal:

$$\begin{aligned}
y' &= 2 \cdot y \\
\frac{dy}{dx} &= 2 \cdot y \\
\frac{1}{y} dy &= 2 \cdot dx \\
\int \frac{1}{y} dy &= \int 2 \; dx \\
\log(|y|) &= 2x + c \\
|y| &= \exp(2x + c) \\
y &= \pm \exp(c) \exp(2x) \\
y &= de^{2x}
\end{aligned}$$

2. Schritt (korrekt): Wir prüfen nach, dass für beliebige $d \in \mathbb{R}$ die Funktion $y$ definiert durch $y(x) = d \cdot e^{2x}$ die Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ erfüllt. Die Funktion $y$ ist differenzierbar und $y'(x) = de^{2x} \cdot 2 = 2de^{2x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $2 \cdot y(x) = 2 \cdot d \cdot e^{2x} = 2de^{2x}$ für $x \in \mathbb{R}$, folglich ist diese $y$ Lösung des Problemes auf beliebigem Intervall $I$.

3. Schritt (korrekt): Die Theorie (siehe später) sagt, dass keine anderen Lösungen existieren.

4. Schritt (korrekt), Antwort: Die Lösungsmenge ist $\{de^{2x} : d \in \mathbb{R}\}$ mit $I = \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Differentialgleichung mit einer zusätzlichen Bedingung (Anfangsbedingung):

$$y'(x) = 2 \cdot y(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } y(0) = 7$$

und lösen dieses Problem mit der 2. Methode.

1. Schritt (inkorrekt): Wie oben schreiben wir die Differentialgleichung um und schließen $y = de^{2x}$ aus.

2. Schritt (korrekt): Wir setzen die Funktion $y(x) = de^{2x}$ in die zusätzliche Bedingung ein:

$$7 = y(0) = de^{2 \cdot 0} = d \cdot 1 = d \; .$$

3. Schritt (korrekt): Wir prüfen nach, dass die Funktion $y(x) = 7e^{2x}$ die Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ erfüllt.

4. Schritt (korrekt): Mit der Anwendung der Theorie schließen wir, dass genau eine Lösung existiert.

5. Schritt (korrekt), Antwort: Die Lösung ist die Funktion $7e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Wenn wir die Aufgabe
$$y' = 1 + \sin(y)$$
lösen, muss man beachten, welche Stammfunktion zu $\frac{1}{1+\sin(y)}$ man nehmen soll, insbesondere auf welchem Intervall.

**Ende 10. Vorlesung**

**11. Vorlesung am Montag 22.5.2017**

Zusammenfassung der Methode **Trennung der Variablen**: wenn $g(y(x)) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist, wobei $I$ ein Intervall ist, dann
$$y'(x) = h(x)g(y(x)) \text{ für } x \in I \;\Leftrightarrow\; \left(\int \frac{y'}{g(y)} dy\right) \circ y = \int h(x)dx \text{ auf } I\ .$$

**Beispiel.** Gegeben ist die Differentialgleichung
$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}\ .$$
Wir lösen sie mit der Methode Trennung der Variablen.

Sei $I_1$ ein Intervall mit $y(x) > 0$ für alle $x \in I_1$. Dann ist die Differentialgleichung auf $I_1$ schrittweise äquivalent umgeschrieben als
$$\begin{aligned} y' &= 3y^{\frac{2}{3}} \text{ auf } I_1\ ; \\ \frac{y'}{3y^{\frac{2}{3}}} &= 1 \text{ auf } I_1\ ; \\ \int \frac{y'}{3y^{\frac{2}{3}}} &= \int 1 \text{ auf } I_1\ ; \\ \exists c \in \mathbb{R} : (y(x))^{\frac{1}{3}} &= x + c,\ x \in I_1\ ; \\ \exists c \in \mathbb{R} : y(x) &= (x+c)^3,\ x \in I_1\ . \end{aligned}$$
Wir prüfen nach, ob die Voraussetzung $y(x) > 0$ erfüllt ist:
$$(x+c)^3 > 0 \;\Leftrightarrow\; x + c > 0 \;\Leftrightarrow\; x > -c\ .$$
Folglich ist für jedes $c_1 \in \mathbb{R}$ die Funktion $y_1$ definiert durch $y_1(x) = (x+c_1)^3$, $x \in (-c_1, +\infty)$, Lösung der Differentialgleichung auf $I_1 = (-c_1, +\infty)$.

Sei $I_2$ ein Intervall mit $y(x) < 0$ für alle $x \in I_2$. Wie vorher bekommt man, dass für jedes $c_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion $y_2$ definiert durch $y_2(x) = (x+c_2)^3$ für $x \in (-\infty, -c_2)$ Lösung der Differentialgleichung auf $I_2 = (-\infty, -c_2)$ ist.

Wir können noch direkt nachprüfen, dass die Funktion $y_0(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ ist. Damit haben wir alle Lösungen, welche das Vorzeichen nicht wechseln, gefunden. Es bleibt übrig, Lösungen welche das Vorzeichen wechseln (falls es solche gibt), zu bestimmen.

Sei $c \in \mathbb{R}$ und definiere die Funktion $y$ mit

$$y(x) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x \leq -c \ , \\ (x+c)^3, \text{ wenn } x > -c \ . \end{cases}$$

Durch Berechnung der Ableitung der Funktion $y$ (an der Stelle $x$ mit $x < -c$, an der Stelle $x$ mit $x > -c$, an der Stelle $c$ mit Hilfe von $y'_+(-c)$ und $y'_-(-c)$) stellt man fest, dass $y$ Lösung der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}$ ist. Ähnlich kann man feststellen, dass für belibige $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} (x+c)^3, \text{ wenn } x < -c \ , \\ 0, \text{ wenn } x \geq -c \end{cases}$$

und für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 \leq c_2$ die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} (x+c_2)^3, \text{ wenn } x < -c_2 \ , \\ 0, \text{ wenn } -c_2 \leq x \leq -c_1 \ , \\ (x+c_1)^3, \text{ wenn } x > -c_1 \end{cases}$$

Lösungen auf $\mathbb{R}$ sind. Somit sind alle Lösungen (auf möglichst großen Intervallen) bestimmt.

Wenn wir die Graphen aller Lösungen einer Differentialgleichung in der Euklidischen Ebene veranschaulichen, heißt das Bild **Lösungskurven**. Wenn wir zu der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ in der Euklidischen Ebene in jedem Punkt $P = (x_0, y_0) \in D_f$ Pfeile mit dem Anstieg $f(x_0, y_0)$ malen, heißt das Bild **Richtungsfeld**. Die Lösungskurven zu einer Differentialgleichung zu finden bedeutet, dass wir Kurven suchen, welche diese Pfeile als Tangenten besitzen.

**Bemerkung.** Seien Kurven in der Ebene, zum Beispiel die Kreislinien (Quadriken) mit der Gleichungen $x^2 + y^2 = r^2$ für alle $r \geq 0$, gegeben. Wir wollen eine Differentialgleichung aufstellen, welche diese Kurven als Lösungskurven hat. Wenn die Funktion $y$ auf einem Intervall $I$ differenzierbar ist und die Gleichung $x^2 + (y(x))^2 = r^2$, $x \in I$, erfüllt, dann ergibt die Ableitung $2x + 2y(x)y'(x) = 0$, $x \in I$, und die gesuchte Differentialgleichung lautet

$$y' = -\frac{x}{y} \ .$$

### 14.4.2 Theorie

Mit dem Beispiel $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ haben wir gesehen, dass durch einen Punkt, z.B. $(0,1)$, mehrere Lösungskurven gehen können. Das heißt, dass das Problem

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \text{ auf } \mathbb{R} \text{ und } y(1) = 0$$

mehrere Lösungen (in unserem Beispiel unendlich viele) besitzt. Im Folgenden formulieren wir Bedingungen, unter welchen mindestens eine Lösung existiert und Bedingungen, unter welchen genau eine Lösung existiert.

**Satz (über lokale Existenz der Lösung, Peano, 1886).** Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge (bezüglich der Euklidischen Metrik), sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $G \subset D_f$ und sei $(x_0, y_0) \in G$. Wenn $f$ stetig in $G$ ist, dann exitiert (mindestens) ein $\varepsilon > 0$ und (mindestens) eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset D_y$ so, dass

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \text{ und } y(x_0) = y_0 \ .$$

Beweisidee. Da $G$ offen ist, gibt es (mindestens) ein $r > 0$ mit $B((x_0, y_0), r) \subset G$ und wir können ein Intervall $I$ um $x_0$ festlegen. Für $x_i \in I$ ist laut Definition

$$y'(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{y(x) - y(x_i)}{x - x_i} \ ,$$

und wenn $x$ in der Nähe von $x_i$ ist, approximieren wir

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x) - y(x_i)}{x - x_i} \ .$$

Für ein $n \in \mathbb{N}$ zerlegen wir das Intervall $I$ mit Hilfe der Punkte $x_{-n}, \dots, x_{-1}$, $x_0, x_1, \dots, x_n$ und aus der Gleichheit

$$\frac{y_n(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, y_n(x_{i+1}))$$

bestimmen wir zuerst $y_n(x_1)$ (setze $i = 0$ und nutze $y_n(x_0) = y_0$), dann $y_n(x_2)$ (setze $i = 1$ und nutze das schon bekannte $y_n(x_1)$)), usw. Ähnlich bestimmen wir die Werte $y_n(x_{-1})$, $y_n(x_{-2}), \dots, y_n(x_{-n})$. Wir verbinden diese Punkte $(x_i, y_n(x_i))$ mit geraden Strecken und bekommen dadurch eine Funktion $y_n$ definiert auf $I$.

Wenn wir jetzt $n \in \mathbb{N}$ immer erhöhen, bekommen wir eine Folge von Funktionen. Von dieser Folge nimmt man eine Teilfolge und ihren Grenzwert (die passende Menge von Funktionen und eine Metrik auf dieser Menge sind festzulegen, siehe später). Der Grenzwert wird die Lösung. Die Funktionen $y_n$ sind **approximative Lösungen** und spielen eine wichtige Rolle in der Numerik. Strikt gesehen sind aber $y_n$ keine Lösungen der Differentialgleichung, weil sie an der Stellen $x_i$ nicht differenzierbar sind!

$\square$

**Exkurz.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und das Intervall $[a, b]$ festgelegt. Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche $[a, b]$ als Definitionsbereich haben und stetig in $[a, b]$ sind, sei durch $\mathcal{C}([a, b])$ bezeichnet. (Wir wissen schon, dass diese Menge einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet. Übung!) Für $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ definiere

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} .$$

Man kann beweisen, dass $d$ eine Metrik auf $\mathcal{C}([a, b])$ ist (Übung!). Außerdem kann man beweisen, dass jede Cauchy-Folge von stetigen Funktionen auf $[a, b]$ bezüglich dieser Metrik einen Grenzwert (ein Element von $\mathcal{C}([a, b])$) besitzt (zu glauben).

Es ist möglich, eine andere Menge von Funktionen, oder eine andere Metrik zu nehmen, aber diese passt gut zu unserem Kontext.

**Satz (über lokale Existenz und Eindeutigkeit; Picard in 1890, Lindelöf in 1894).** Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge (bezüglich der Euklidischen Metrik), sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $G \subset D_f$ und sei $(x_0, y_0) \in G$. Wenn die Funktion $f$ stetig in $G$ ist und die Bedingung (LL)

(LL) für jede $P \in G$ existiert eine kreisförmige Umgebung $B(P, r)$ und eine Zahl $L \geq 0$ so, dass für alle $x, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\ (x, y) \in B(P, r)\ \wedge\ (x, \tilde{y}) \in B(P, r)\ )\ \Rightarrow d(f(x, y), f(x, \tilde{y})) \leq L d(y, \tilde{y})$$

erfüllt, dann existiert (mindestens) ein $\varepsilon > 0$ und genau eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D_y = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, welche das Problem

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \text{ und } y(x_0) = y_0$$

löst.

Beweisidee. Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ist äquivalent zu der Aussage, dass $y$ Stammfunktion zu der Funktion $x \mapsto f(x, y(x))$ ist. Wir wissen schon, dass eine Stammfunktion, falls sie existiert, bis auf additive Konstante eindeutig ist. Deswegen formulieren wir das Problem um:

$$y = \int f(x, y(x)) dx + c ,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass die Stammfunktion auf der rechten Seite an der Stelle $x_0$ den Wert $y_0$ hat. Das Prinzip besteht darin, dass wir eine beliebige Funktion $y_1$ in die rechte Seite (für $y$) einsetzen und die Stammfunktion bestimmen, diese nennen wir $y_2$. Dann setzen wir $y_2$ in die rechte Seite (für $y$) ein und bestimmen wieder die Stammfunktion, nennen wir sie $y_3$, usw. Wir bekommen eine Folge von Funktionen. Diese wird eine Cauchy-Folge sein und einen Grenzwert besitzen (Menge, Metrik sind festzulegen!), welcher dann die Lösung ist.

Den kompletten Beweis könnten wir an dieser Stelle noch nicht durchführen, da wir noch keine Aussage über die Existenz einer Stammfunktion bewiesen haben.

□

**Bemerkungen.**

- Die Methode des Beweises heißt die Methode der **sukzessiven Approximationen** und wird auch in der Vorlesung "Elementare Numerik" eine wichtige Rolle spielen. Sie heißt dort **iteratives Verfahren** und wird auch auf andere Probleme, wie z.B. Nullstellen von Polynomen, Lösungen von nichtlinearen Gleichungen, angewendet. Wir haben diese Methode in einem einfachen Kontext auch schon gesehen. Bei der Berechnung von $\sqrt{2}$ mit Folgen haben wir sukzessiv Zahlen definiert, welche (als beschränkte, monotone Zahlenfolge) gegen die Zahl $\sqrt{2}$ konvergieren.

**Ende 11. Vorlesung**

**12. Vorlesung am Donnerstag 1.6.2017**

- Die Bedingung (LL) heißt **lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich der Variable** $y$. Vergleiche diese mit der Bedingung im Banachschen Fixpunktsatz. Den Zusammenhang von diesen zwei Sätzen kann man mit der Hilfe der Abbildung $\Phi$, welche zu einer Funktion $y$ die Stammfunktion $\int f(x, y(x))dx + c$ zuordnet, sehen. Tatsächlich ist das Problem der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung äquivalent umformuliert als $\Phi(y) = y$, also ein Fixpunkt von $\Phi$ zu finden. Tatsächlich ist die Beweisidee des Banachschen Fixpunktsatz (Banach, 1920) auch die sukzessive Approximation.

**Beispiele.**

- Betrachte das Problem

$$y' = 2x - 2\sqrt{\max\{y, 0\}} \text{ und } y(0) = 0 \ ,$$

aus technischen Gründen nehmen wir als Intervall $I = (0, \varepsilon)$ und fordern, dass die gesuchte Funktion $y$ stetig in $[0, \varepsilon)$ ist.

Die Methode der sukzessiven Approximationen mit Startfunktion $y_1(x) = 0, x \in [0, \varepsilon)$, liefert $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = 0$, $y_4(x) = x^2$, $y_5 = 0$, usw. Analytisch gesagt, diese Folge von Funktionen besitzt keinen Grenzwert, numerisch gesagt, $y_n$ ist als approximative Lösung nicht geeignet. Außerdem kann man direkt nachprüfen, dass weder 0 noch $x^2$ Lösungen des Poblemes sind. Mit dieser Methode bekommen wir keine Lösung des Problemes, weil die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf ( (LL) für $f(x, y) = 2x - 2\sqrt{\max\{y, 0\}}$ und $P = (0, 0)$) nicht erfüllt sind.

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Betrachte das Problem

  $$y' = ay, \quad y(0) = b \ .$$

  Wir wissen, dass $y(x) = b \cdot e^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$, eine Lösung auf $\mathbb{R}$ ist. Es ist einfach zu überprüfen, dass die Funktion $f(x, y) = ay$ die Bedingung (LL) auf $\mathbb{R}^2$ erfüllt (nehme $L = |a|$):

  $$d(f(x, y), f(x, \tilde{y})) = |ay - a\tilde{y}| = |a| \cdot |y - \tilde{y}| = L \cdot d(y, \tilde{y}) \ .$$

  Folglich hat das Problem auf $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ eine einzige Lösung. Folglich ist $b \cdot e^{ax}$ die einzige Lösung auf einem (kleinem) Intervall $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$. Wenn wir den Satz von Picard-Lindelöf mit $x_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ und $y_0 = be^{ax_0}$ anwenden (die Voraussetzungen sind erfüllt!), bekommen wir, dass $be^{ax}$ die einzige Lösung auf einem kleinem Interval um $x_0$ ist, folglich ist $be^{ax}$ die einzige Lösung auf einem größeren Intervall um 0. Diese Idee weitergeführt besagt, dass $be^{ax}$ die einzige Lösung auf $\mathbb{R}$ ist.

- Problem

  $$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \text{ und } y(0) = 0 \ .$$

  Wir haben schon gesehen, dass zum Beispiel die beiden Funktionen $y_0(x) = 0$ und $y_1(x) = x^3$ Lösungen auf $\mathbb{R}$ sind. Folglich, für die Funktion $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ und Punkt $P = (0, 0)$, kann die Bedingung (LL) nicht erfüllt sein. Tatsächlich kann man dieses auch direkt nachprüfen.

## 14.5 Ansatzmethoden

Man versucht, die Lösung eines Problemes in einer oder anderer bestimmten Form zu finden. Wenn man die richtige Form versucht hat und die Theorie der Eindeutigkeit verwendet, hat man damit das Problem gelöst.

Für homogene lineare Gleichungen $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist die richtige Ansatzform $e^{\lambda x}$, $\lambda$ ist aus der Gleichung durch einsetzen zu bestimmen.

Für inhomogene lineare Gleichungen erster Ordnung, auch mit nichtkonstanten Koeffizienten, ist die richtige Ansatzform $c(x)y_0(x)$, wobei $y_0$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist. Die Funktion $c$ ist aus der Gleichung durch einsetzen zu bestimmen. Allgemeiner, für inhomogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ist eine richtige Ansatzform $c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$, wobei $y_1, \ldots, y_n$ ein zugehöriges Fundamentalsystem (also Basis der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystemes) ist. Diese Methode heißt **Variation der Konstanten**.

Eine allgemeine Ansatzform für lineare Gleichungen ist eine Potenzreihe, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, und die Zahlen $a_n$ sind durch Einsetzen zu bestimmen. Wenn man Glück hat, findet man eine Lösung in Form eines Polynomes.

In spezifischen Problemen der mathematischen Physik spielen andere Funktionen als Monome $x^n$, zum Beispiel die Funktionen $\sin(nx)$ für Schwingungen, eine wichtige Rolle. Dementsprechend ist die Form für eine Ansatzmethode gewählt.

**Beispiele.**

- $y'(x) + 2y(x) = e^x$, $x \in I$: Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung (1. Ordnung) mit konstanten Koeffizienten. Die zugehörige homoge Gleichung ist $y' + 2y = 0$.

**Ende 12. Vorlesung**

  Lösung der homogenen Gleichung: Diese äquivalent umgeschrieben $y' = -2y$, ist eine Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen. Formaler Lösungsweg: $\int \frac{y'}{y} dy = \int (-2) dx$, $\ln|y| = -2x + c$, $y = e^{-2x+c}$, $y = -e^{-2x+c}$, und die Nullfunktion auf $I = \mathbb{R}$; eine Probe zeigt, dass diese Lösungen sind. Anderer Lösungsweg: zu der homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $y' + 2y = 0$ ist das zugehörige charakteristische Polynom $X + 2 = 0$, welche die Nullstelle $-2$ hat, also ist $e^{-2x}$ eine Lösung auf $\mathbb{R}$. Noch anderer Lösungsweg: die Ansatzform $y(x) = e^{\lambda x}$ mit unbekannter Zahl $\lambda$ setzen wir in die Gleichung ein und bekommen $\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0$, diese ist erfüllt für $\lambda = -2$, folglich ist $y(x) = e^{-2x}$ eine Lösung auf $\mathbb{R}$.

  Lösung der inhomogenen Gleichung: die Ansatzform $y(x) = c(x)e^{-2x}$ mit unbekannter Funktion $c$ setzen wir in die Gleichung ein und bekommen $c'(x)e^{-2x} + c(x)e^{-2x} \cdot (-2) + 2c(x)e^{-2x} = e^x$, diese ist äquivalent umgeschrieben als $c'(x) = e^{3x}$, und ist erfüllt sobald $c$ eine Stammfunktion zu $e^{3x}$ ist. Diese können wir berechnen, z.B. $c(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist $y(x) = \frac{1}{3}e^{3x}e^{-2x} = \frac{1}{3}e^{x}$ eine Lösung der Gleichung $y' + 2y = e^x$ auf $\mathbb{R}$. Wir nennen diese Funktion $y_p$, partikuläre Lösung.

Antwort: Die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung auf $I = \mathbb{R}$ ist

$$\{\frac{1}{3}e^x + de^{-2x} : d \in \mathbb{R}\} .$$

- $y'(x) - 2xy(x) = x,\ x \in I$: Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung (1. Ordnung) mit nicht-konstanten Koeffizienten. Die zugehörige homoge Gleichung ist $y' - 2xy = 0$.

  Lösung der homogenen Gleichung: Diese äquivalent umgeschrieben $y' = 2xy$, ist eine Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen. Als Lösung auf $\mathbb{R}$ bekommen wir $y(x) = d \cdot e^{x^2}$ für beliebige $d \in \mathbb{R}$.

  Lösung der inhomogenen Gleichung: die Ansatzform $y(x) = c(x)e^{x^2}$ mit unbekannter Funktion $c$ setzen wir in die Gleichung ein und bekommen $c'(x)e^{x^2} + c(x)e^{-x^2} \cdot (2x) - 2xc(x)e^{x^2} = x$, welche äquivalent zu $c'(x) = xe^{-x^2}$ ist, und ist erfüllt sobald $c$ eine Stammfunktion zu $xe^{-x^2}$ ist. Diese können wir berechnen, z.B. $c(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2} = -\frac{1}{2}$ eine Lösung der Gleichung $y' - 2xy = x$. Wir nennen diese Funktion $y_p$, partikuläre Lösung.

  Antwort: Die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung auf $I = \mathbb{R}$ ist

$$\{-\frac{1}{2} + de^{x^2} : d \in \mathbb{R}\} .$$

- $y'(x) - 2xy(x) = 2,\ x \in I$: Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung (1. Ordnung) mit nicht-konstanten Koeffizienten. Die zugehörige homogene Gleichung ist $y' - 2xy = 0$.

  Lösung der homogenen Gleichung: wie oben $y(x) = d \cdot e^{x^2}$ für beliebige $d \in \mathbb{R}$ ist Lösung auf $\mathbb{R}$.

  Lösung der inhomogenen Gleichung: die Ansatzform $y(x) = c(x)e^{x^2}$ mit unbekannter Funktion $c$ setzen wir in die Gleichung ein und bekommen $c'(x)e^{x^2} + c(x)e^{x^2} \cdot (2x) - 2xc(x)e^{x^2} = 2$, welche äquivalent zu $c'(x) = 2e^{-x^2}$ ist. Da wir die rechte Seite nicht elementar integrieren können, können wir mit dieser Methode nicht weiterrechnen.

Anderer Lösungsweg: die Ansatzform $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ setzen wir formal (d.h. dieser Rechenweg ist nicht korrekt!) in die Gleichung ein und schreiben

$$\begin{aligned} y' - 2xy &= 2 \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)' - 2x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^{k+1} &= 2 \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2a_{k-1}x^k &= 2 \\ a_1 + (a_2 \cdot 2 - 2a_0)x + (a_3 \cdot 3 - 2a_1)x^2 + \cdots + (a_k \cdot k - 2a_{k-2})x^{k-1} + \cdots &= 2\ . \end{aligned}$$

Wenn wir die Koeffizienten der zwei Potenzreihen vergleichen, bekommen wir die Gleichungen

$$a_1 = 2,\ 2a_2 - 2a_0 = 0,\ 3a_3 - 2a_1 = 0,\ \ldots,\ ka_k - 2a_{k-2} = 0,\ \ldots\ .$$

Diese aufgelöst geben $a_0$ beliebig, $a_1 = 2$ und für $l \in \mathbb{N}$

$$a_{2l} = \frac{2}{2l} \cdot \frac{2}{2(l-1)} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{2 \cdot 1} \cdot a_0, \quad a_{2l+1} = \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{2}{2(l-1)+1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{2 \cdot 1 + 1} \cdot 2\ .$$

Die Reihe umgeschrieben lautet

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l} x^{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1} x^{2l+1} \\ &= a_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^l}{2^l \cdot l!} (x^2)^l + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^l \cdot x^{2l+1} \cdot 2}{(2l+1) \cdot (2(l-1)+1) \ldots (2 \cdot 1 + 1)} \\ &= a_0 e^{x^2} + y_p(x)\ . \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass die Reihe konvergent ist, dass die so definierte Funktion $y_p$ stetig und differenzierbar ist und dass sie die Gleichung erfüllt. Wir werden das nicht tun, obwohl es nötig wäre, diese Probe durchzuführen, da die obigen Rechnungen nicht mathematisch begründet waren. An der angegebenen Form der allgemeiner Lösung $a_0 e^{x^2} + y_p(x)$, $a_0 \in \mathbb{R}$, erkennt man die Struktur eines affinen Raumes.

# 15 Jordan-Inhalt in $\mathbb{R}^2$

Wir werden einen Inhaltsbegriff einführen. Der Einfachheit halber werden wir hauptsächlich die Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten, allgemeiner wäre $\mathbb{R}^n$. $d$ bezeichnet die Euklidische Metrik. In linearen Algebra haben wir den Flächeninhalt von Rechtecken definiert und Anforderungen für Flächeninhalt allgemeineren Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^2$ formuliert. Diese Anforderungen sind (wir schreiben $|A|$ für den Flächeninhalt von $A$):

(I1) Positivität: $|A| \geq 0$;

(I2) Bewegungsinvarianz: $|f(A)| = |A|$ für Bewegungen $f$;

(I3) Normierung: $|[0,1] \times [0,1]| = 1$;

(I4) Additivität: $|A \cup B| = |A| + |B|$ für disjunkte Mengen $A, B$.

(Wiederholung aus der Geometrie: Bewegungen sind bijektive Abbildungen $f$ von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ für welche $d(f(u), f(v)) = d(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt.)

**Definition.** Für ein achsenparalleles Rechteck $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b, c \leq d$) definieren wir

$$|I| = (b - a) \cdot (d - c) \ .$$

Zwei Rechtecke $I_1, I_2$ heißen **nicht-überlappend**, wenn sie keine gemeinsamen inneren Punkte haben (d.h. $I_1 \cap I_2$ enthält keine kreisförmige Umgebung). Für eine Menge $A = \cup_{i=1}^n I_i$, welche Vereinigung von endlich vielen, paarweise nicht-überlappenden achsenparallelen Rechtecken $I_i$ ist, definieren wir

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} |I_i| \ .$$

Für eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$\begin{aligned} |M|_i = \sup\{|A| : &\ A \text{ ist endliche Vereinigung von paarweise nicht-} \\ &\text{überlappenden achsenparallelen Rechtecken und } A \subset M\}, \\ |M|_a = \inf\{|A| : &\ A \text{ ist endliche Vereinigung von paarweise nicht-} \\ &\text{überlappenden achsenparallelen Rechtecken und } M \subset A\} \ . \end{aligned}$$

$|M|_i$ heißt **inneres Maß von** $M$ und $|M|_a$ heißt **äußeres Maß von** $M$.

Folgende elementare Eigenschaften kann man einsehen.

**Satz.**

a) Für achsenparallele Rechtecke $I$ und für Mengen $A$, welche Vereinigung von endlich vielen achsenparallelen Rechtecken sind, gilt

$$|I|_i = |I| = |I|_a, \quad |A|_i = |A| = |A|_a \; .$$

b) Für beliebige beschränkte Mengen gilt

$$|M|_i \leq |M|_a \; .$$

c) (**Monotonie**) Für beliebige beschränkte Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^2$ mit $M \subset N$ gilt

$$|M|_i \leq |N|_i, \quad |M|_a \leq |N|_a \; .$$

Alternativ kann man den Inhaltsbegriff mit Hilfe von dyadischen Quadraten (statt allgemeinen achsenparallelen Rechtecken) wie folgt einführen.

**Definition.** Man zerschneide die Ebene $\mathbb{R}^2$ in einer $k$-ten Stufe durch die Geraden $g_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2^{-k}p\}$, $p \in \mathbb{Z}$, und $h_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2^{-k}p\}$, $p \in \mathbb{Z}$. Die dadurch erhaltenen Quadrate nennen wir **Quadrate der $k$-ten Stufe**. Für ein Quadrat $Q$ $k$-ter Stufe definiere $|Q| = 2^{-2k}$ und für eine beliebige beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ sei $M_k$ die Vereinigung allen Quadraten k-ter Stufe, welche in $M$ erhalten sind und $M^k$ die Vereinigung allen Quadraten k-ter Stufe, welche nichtleeren Durchschnitt mit $M$ haben.

Folgende elementare Eigenschaften kann man einsehen.

**Satz.**

a) Für beliebige beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$M_k \subset M_{k+1} \subset M \subset M^{k+1} \subset M^k \; .$$

b) Die Zahlenfolge $|M_k|$, $k \in \mathbb{N}$, ist monoton wachsend und die Zahlenfolge $|M^k|$, $k \in \mathbb{N}$, ist monoton fallend.

c) $0 \leq |M_k| \leq |M^k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Folgen $|M_k|$, $|M^k|$, $k \in \mathbb{N}$, sind nach oben beschränkt.

d) $\lim |M_k|$ und $\lim |M^k|$ existieren als reelle Zahlen.

Der Beweis von dem folgenden Satz ist technisch und wir werden es nicht präsentieren (siehe [Walter: Analysis 2, Seite 225]). Er besagt, dass die zwei alternativen Zugänge das gleiche Resultat liefern.

**Satz.** Für beschränkte Mengen $M$ gilt $|M|_i = \lim |M_k|$ und $|M|_a = \lim |M^k|$.

**Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge. Sie heißt **meßbar im Jordanschen Sinn**, falls $|M|_i = |M|_a$ und in diesem Fall setzen wir $|M| = |M|_i = \lim |M_k| = \lim |M^k| = |M|_a$ und nennen diese nichtnegative reelle Zahl **Jordan-Maß** von $M$. $M$ heißt **Nullmenge im Jordanschen Sinn**, falls $|M|_a = 0$.

**Beispiele.**

- Die Strecke $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$: Da $M$ nur entartete Rechtecke mit Maß 0 enthält, ist $|M|_i = 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann man eine Überdeckung von $M$ von Rechtecken finden, $\cup_{i=1}^n R_i$, mit Maß $\frac{1}{n}$. Folglich ist nach Definition $0 \leq |M|_a \leq \frac{1}{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und deswegen muß die Zahl $|M|_a$ gleich 0 sein. Da $|M|_i = |M|_a$, ist $M$ meßbar und $|M| = 0$.

  Allgemeiner, Nullmengen sind immer meßbar mit Maß gleich 0.

- Rechtecke $[a, b] \times [c, d]$ sind meßbar und ihr Jordan-Maß stimmt mit dem vorher definierten Maß (Produkt von Seitenlängen) überein.

- Die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$.

  Wir stellen folgende Frage: gewählt sei ein zufälliges Element von $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Element in der Menge $M$ enthalten ist und was ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in der Menge $M$ nicht enthalten ist ? Diese Frage kann man nur dann beantworten, wenn man die Mengen $M$ und ihr Komplement $Q \setminus M$ irgendwie messen kann. Da diese Mengen nicht endlich sind, zählen bringt nichts. Man kann versuchen, den Flächeninhalt zu messen. Wir werden sehen, dass es mit Jordan-Maß nicht gelingt. Nur mit unseren Kenntnissen hat also die Frage keinen Sinn.

**Ende 13. Vorlesung**

**14. Vorlesung am Montag 19.6.2017**

$M$ ist beschränkt. Da in $M$ nur entartete Rechtecke mit Maß 0 enthalten sind, ist $|M|_i = 0$. $|M|_a$ ist eine reelle Zahl.

Hilfsaussage: Wenn $M \subset \cup_{i=1}^n R_i$ mit Rechtecken $R_i$, dann ist $[0,1] \times [0,1] \subset \cup_{i=1}^n R_i$.

Beweis der Hilfsaussage: Mit Widerspruch, wenn ein $P \in [0,1] \times [0,1]$ existiert mit $P \notin \cup_{i=1}^n R_i$, dann ist $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^n R_i = \cap_{i=1}^n (\mathbb{R}^2 \setminus R_i)$, welche eine offene Menge ist. Folglich existiert $r > 0$ so, dass die Kreisförmige Umgebung $B(P,r) \subset \cap_{i=1}^n (\mathbb{R}^2 \setminus R_i)$. Andererseits ist $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ und man kann Folgen von rationalen Zahlen finden, so dass $x = \lim p_n, y = \lim q_n$, $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $P = \lim P_n$, wobei $P_n = (r_n, q_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ist. Es gibt (mindestens ein) $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $P_{n_0} \in B(P,r)$, und für dieses $P_{n_0}$ gilt dann $P_{n_0} \notin \cup_{i=1}^n R_i$. Aber laut Konstruktion ist $P_{n_0} \in M \subset \cup_{i=1}^n R_i$, was ein Widerspruch ist. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Aus der Hilfsaussage und der Monotonie folgt: ist $M \subset \cup_{i=1}^n R_i$ mit Rechtecken $R_i$, dann ist $1 = |[0,1] \times [0,1]| \leq | \cup_{i=1}^n R_i|$. Aus der Definition von $|M|_a$ als Infimum folgt, dass $1 \leq |M|_a$.

Es ist nicht schwierig, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ eine Bedeckung von $M$ mit Rechtecken zu finden, welche Maß $(1+\frac{2}{n})^2$ hat (z.B. $[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}] \times [-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}]$). Folglich ist $|M|_a \leq (1+\frac{2}{n})^2$. Da $\lim(1+\frac{2}{n})^2 = 1$ ist und $1 \leq |M|_a \leq (1+\frac{2}{n})^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, muss $|M|_a = 1$ sein.

Da $|M|_i = 0 \neq 1 = |M|_a$, ist die Menge $M$ nicht Jordan-meßbar.

$\square$

- Das Dreieck $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a \;\wedge\; 0 \leq y \leq kx\}$ ( $a, k \in \mathbb{R}, a, k > 0$ sind gegeben):

  $M$ ist beschränkt, und $|M|_i$, $|M|_a$ sind reelle Zahlen mit $|M|_i \leq |M|_a$. Um zu beweisen, dass $M$ meßbar ist, muss man zeigen, dass diese zwei Zahlen gleich sind. Mit Widerspruch, wenn $|M|_i < |M|_a$ wäre, dann ist $\frac{ka^2}{|M|_a - |M|i}$ eine positive reelle Zahl und man kann eine strikt größere natürliche Zahl $n_0$ wählen. Für diese $n_0$ definiere die Zahlen $x_i = \frac{a}{n_0}$, $i = 0, 1, \ldots, n_0$ und die Mengen

  $$A_{n_0} = \cup_{i=1}^{n_0} [x_{i-1} - x_i] \times [0, f(x_{i-1})], \quad B_{n_0} = \cup_{i=1}^{n_0} [x_{i-1} - x_i] \times [0, f(x_i)] \, .$$

  Diese sind endliche Vereinigungen von paarweise nicht-überlappenden achsenparallelen Rechtecken und $A_{n_0} \subset M \subset B_{n_0}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
|A_{n_0}| &= \sum_{i=1}^{n_0} \frac{a}{n_0} k(\frac{a}{n_0}(i-1)) = k\frac{a^2}{{n_0}^2}\sum_{i=1}^{n_0}(i-1)) \\
&= k\frac{a^2}{{n_0}^2}\frac{n_0(n_0-1)}{2} = \frac{ka^2}{2}\frac{n_0-1}{n_0}, \\
|B_{n_0}| &= \sum_{i=1}^{n_0} \frac{a}{n_0} k(\frac{a}{n_0}i) = \cdots = \frac{ka^2}{2}\frac{n_0+1}{n_0}
\end{aligned}$$

und

$$|B_{n_0}| - |A_{n_0}| = \frac{ka^2}{n_0} \ .$$

Es folgt

$$|M|_a - |M|_i \leq |B_{n_0}| - |A_{n_0}| = \frac{ka^2}{n_0} < ka^2\frac{|M|_a - |M|_i}{ka^2} = |M|_a - |M|_i \ ,$$

ein Widerspruch. Es muss also $|M|_a = |M|_i$ gelten und damit ist die Menge $M$ Jordan-meßbar.

Um das Maß von $M$ zu bestimmen, berechnen wir $|M|_a$. Mit der Bezeichnung $A_n$, $B_n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ wie oben, gilt

$$\frac{ka^2}{2} = \lim |A_n| \leq |M|_i = |M|_a \leq \lim |B_n| = \lim \frac{ka^2}{2}\frac{n-1}{n} = \frac{ka^2}{2} \ .$$

folglich ist $|A|_a = \frac{ka^2}{2}$, und damit $|A| = \frac{a\cdot(ka)}{2}$. Diese Formel stimmt mit der aus der Schule gelernten Formel für den Flächeninhalt eines Dreieckes überein.

□

Die Anforderungen (I1) und (I3) werden damit für meßbare Mengen erfüllt. Die Beweise der Anforderungen (I2) und (I4) sind wesentlich komplizierter und wir verzichten auf beide. Wir fassen die wichtigen Aussagen zusammen. Die Beweise findet man in [Walter, Analysis 2, § 7].

**Satz (Kriterien für Meßbarkeit).** Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge.

a) Wenn $|M|_a = 0$, dann ist $M$ meßbar und hat Maß gleich 0.

b) $M$ ist genau dann meßbar, wenn der Rand von $M$ eine Nullmenge ist. (Der Rand einer Teilmenge von einer Menge mit Metrik ist in der Übung definiert.)

c) Wenn $M, N \subset \mathbb{R}^2$ meßbar sind, dann sind auch die Mengen $M \cup N$, $M \cap N$ und $M \setminus N$ meßbar.

d) (hinreichendes Kriterium) Wenn der Rand einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ durch Graphen von endlich vielen Funktionen, welche auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen definiert und stetig sind, überdeckt sein kann, dann ist der Rand von $M$ eine Nullmenge und damit $M$ meßbar.

**Beispiele.**

- Aus d) folgt einfach, dass Dreiecke und Polygone meßbar sind.
- Der abgeschlossene Einheitskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist meßbar, da ihr Rand Vereinigung von Graphen von stetigen Funktionen definiert auf abgeschlossenen beschränkten Mengen ist. Solche Funktionen sind z.B. $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ und $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ (aber man kann auch $g_1(y) = \sqrt{1 - y^2}$ und $g_2(y) = -\sqrt{1 - y^2}, y \in [-1, 1]$ wählen). Das Maß werden wir später bequemer bestimmen.
- Die Einheitskreislinie ist eine Nullmenge, also meßbar. Folglich ist der offene Einheitskreis auch meßbar. Der offene und der abgeschlossene Einheitskreis haben das gleiche Maß. Entsprechendes gilt für Polygone.

**Satz.**

a) Wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Verschiebung ist (d.h. existiert $u \in \mathbb{R}^2$ so, dass $f(x) = x + u$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$) und $M \subset \mathbb{R}^2$ eine meßbare Menge ist, dann ist $f(M)$ auch meßbar und

$$|f(M)| = |M| \ .$$

b) Sei $A \subset \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Für die lineare Abbildung $f$, welche $A$ als Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis hat (d.h. $f(x) = A \cdot x$ für Spaltenvektoren $x \in \mathbb{R}^2$), gilt: wenn $M \subset \mathbb{R}^2$ meßbar ist, dann ist $f(M)$ meßbar und

$$|f(M)| = |\det(A)| \cdot |M| \ .$$

c) Wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Streckung mit Zentrum in $(0, 0)$ und Faktor $r$, $r \neq 0$ (also $f(x) = r \cdot x$) ist und $M \subset \mathbb{R}^2$ meßbar ist, dann ist $f(M)$ auch meßbar und

$$|f(M)| = r^2 \cdot |M| \ .$$

**Ende 14. Vorlesung**

**15. Vorlesung am Donnerstag 22.6.2017**

d) Wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung ist und $M \subset \mathbb{R}^2$ meßbar ist, dann ist $f(M)$ meßbar und
$$|f(M)| = |M| \ .$$

e) Wenn $f$ eine Ähnlichkeitstransformation mit Faktor $r$ ist und $M \subset \mathbb{R}^2$ eine meßbare Menge ist, dann ist die Menge $f(M)$ meßbar und
$$|f(M)| = r^2 \cdot |M| \ .$$

Beweisidee von a). Die Aussage bekommt man aus der Definition, da Verschiebung eines achsenparallelen Rechteckes wieder ein Achsenparalleles Rechteck ist.

Beweisidee von b). Im ersten Schritt werden Abbildungen betrachtet, welche diagonale Abbildungsmatrix besitzen, und für solche die Aussage bewiesen. Der Beweis folgt aus der Definition, da achsenparallele Rechtecke auf achsenprallele Rechtecke abgebiltet werden. Im zweiten Schritt werden orthogonale Abbildungen betrachtet. Der Beweis folgt nicht direkt aus der Definition, da die Bilder von achsenparallelen Rechtecken zwar Rechtecke sind, aber im allgemeinen nicht achsenparallele Rechtecke. Man betrachtet zuerst das Einheitsquadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ und es muss gezeigt werden, dass sein Bild meßbar ist. Sei $r = |f(Q)|$, das Maß des Bildes des Einheitsquadrates. Dann berechnet man das Maß der Bilder von dyadischen Quadraten und bekommt, dass $|f(M)| = r|M|$ für jede meßbare Menge $M$ gilt. Um die Zahl $r$ zu bestimmen benutzt man, dass der Einheitskreis (meßbar!) sich auf sich abbildet, woraus $r = 1$ folgt. Im dritten Schritt wird eine invertierbare Matrix $A$ als Produkt $A = C_1DC_2$ mit diagonalen $D$ und orthogonalen $C_1$ und $C_2$ zerlegt. Das ist immer möglich, wie es im Folgenden konstruiert wird. Die Matrix $A^TA$ ist symmetrisch, folglich diagonalisierbar sogar mit einer orthogonalen Matrix $\tilde{C}$: $A^TA = \tilde{C}\tilde{D}\tilde{C}^T$, wobei $\tilde{D}$ eine diagonale Matrix ist. Da außerdem $A^TA$ positiv definit ist (d.h. alle Eigenwerte positiv sind), sind die Diagonalelemente $\tilde{d}_{ii}$ der Matrix $\tilde{D}$ positive Zahlen. Wir definieren die diagonale Matrix $D$ mit Diagonalelementen $d_{ii} = \sqrt{\tilde{d}_{ii}}$ und die Matrizen $C_1 = \tilde{C}^T$, $C_2 = A\tilde{C}D^{-1}$. Dann ist $C_1$ orthogonal und mit diesen Matrizen kann man schreiben
$$A = A\tilde{C}\tilde{C}^T = A\tilde{C}D^{-1}D\tilde{C}^T = C_2DC_1 \ .$$

Außerdem gilt

$$C_2^T C_2 = (A\tilde{C}D^{-1})^T A\tilde{C}D^{-1} = D^{-1}\tilde{C}^T A^T A\tilde{C}D^{-1} = \tilde{C}\tilde{D}\tilde{C}^T = E \ ,$$

also $C_2$ auch orthogonal ist. Wir haben bewiesen, dass eine Zerlegung $A = C_2 \cdot D \cdot C_1$ möglich ist. Damit kann man die Abbildung $f$ als Komposition $f = g_2 \circ d \circ g_1$ mit orthogonalen Abbildungen $g_1$, $g_2$, und mit einer Abbildung $d$, welche diagonale Abbildungsmatrix hat, schreiben. Die Aussage in b) für diese $f$ folgt aus dem zweiten Schritt für $g_1$, ersten Schritt für $d$ und zweiten Schritt für $g_2$. In dem vierten Schritt werden nicht-invertierbare Abbildungen betrachtet. Man kann zeigen, dass Bilder von Rechtecken sind immer entartete Rechtecke mit Maß 0, und damit $|f(M)|_a = 0$ für jede meßbare Menge $M$. Es folgt, dass $f(M)$ meßbar ist. Außerdem ist $A$ nicht-invertierbar und folglich $\det(A) = 0$. Daraus folgt die Gleichheit in der Aussage, da beide Seiten gleich 0 sind.

c) ist ein spezieller Fall von b), da

$$r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ .$$

Beweis von d). Aus der Geometrie wissen wir, dass jede Bewegung sich als Komposition von höchstens einer Verschiebung $v$, Drehung $d$ und Spiegelung $s$ darstellen lässt, also $f = s \circ d \circ v$, wobei Identität auch zugelassen ist. Da $M$ meßbar ist, ist wegen a) auch $v(M)$ meßbar und $|v(M)| = |M|$. Da $v(M)$ meßbar ist, und die Drehung (oder Identität) $d$ eine lineare Abbildung mit Determinante der Abbildungsmatrix gleich 1 ist, gilt nach b), dass $d(v(M))$ meßbar ist mit $|d(v(M))| = |1| \cdot |v(M)|$. Da $d(v(M))$ meßbar ist, und die Spiegelung (oder Identität) $s$ eine lineare Abbildung mit Determinante der Abbildungsmatrix gleich $-1$ ist, gilt nach b), dass $s(d(v(M)))$ meßbar ist mit $|s(d(v(M)))| = |-1| \cdot |d(v(M))|$. Zusammengefasst, $f(M) = s(d(v(M)))$ ist meßbar und

$$|f(M)| = |s(d(v(M)))| = |d(v(M))| = |v(M)| = |M| \ .$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Beweis von e). Eine Ähnlichkeitstransformation ist Komposition von Verschiebungen und zentrischer Streckung (Identität zugelassen). Die Aussage folgt aus a) und c).

□

**Beispiele.**

- Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängige Vektoren. Das auf $v$, $w$ aufgespannte Parallelogramm $P$ ist das Bild von dem Einheitsquadrat $Q = [0,1] \times [0,1]$ bei der linearen Abbildung

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Folglich ist

$$|P| = |f(Q)| = |\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}| \cdot |Q| = |v_1 w_2 - v_2 w_1| .$$

In der linearen Algebra haben wir die Formel

$$\mathcal{F}(P) = \|w\| \cdot \|v\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2}}$$

für den Flächeninhalt von $P$ bewiesen, wobei $\|.\|$ die Euklidische Norm und $\langle ., . \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt sind. Der Term umgeschrieben lautet

$$\begin{aligned} \|w\| \cdot \|v\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2}} &= \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2} \\ &= \sqrt{(v_1 w_2 - v_2 w_1)^2} = |v_1 w_2 - v_2 w_1| . \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Ergebnisse in linearen Algebra und in Analysis übereinstimmen. Weiter ist

$$\|v\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2}} = \sqrt{\|v\|^2 - \|\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w\|^2} = \|h_w\| ,$$

wobei wir den Satz von Pythagoras benutzt haben und die orthogonale Zerlegung von $v$ entlang $\mathrm{Lin}\{w\}$ als $v = v_w + h_w$ bezeichnet haben. Mit dieser Notation ist $\|h_w\|$ die Länge der zu Seite $w$ zugehörigen Höhe des Parallelogramms. Folglich stimmt das Maß von $P$ mit der in der Schule gelernten Formel "Produkt von der Länge der Grundseite und der zugehörigen Höhe" überein.

- Wir haben bewiesen, dass ein Dreieck $D$ meßbar ist. Folglich ist das gespiegelte $s(D)$ auch meßbar mit gleicher Maß. Wenn wir $s$ so wählen, dass $P = s(D) \cup D$ ein Parallelogramm ist, dann ist das Maß dieses Parallelogramms $|s(D) \cup D| = 2 \times |D|$, da $s(D) \cap D$ eine Nullmenge ist. Folglich ist das Maß eines Dreieckes gleich der Hälfte des Maßes des Parallelogramms, welches auf zwei Seiten des Dreieckes aufgespannt ist. Folglich ist das Maß eines Dreieckes gleich der Hälfte des Produktes einer Seite und der zugehörigen Höhe. Aus der Meßbarkeit von $D$ folgt die Meßbarkeit von $P$ mit dem Satz über Vereinigung meßbarer Mengen. Aber aus der Meßbarkeit von $P$ folgt die Meßbarkeit von $D$ nicht!

**Bemerkung.** Ähnlich kann man meßbare Mengen und das Jordansche Maß in $\mathbb{R}^n$ einführen. Es ist $n$-dimensionales Jordan-Maß genannt und durch $|.|_n$ bezeichnet. (Mit dieser Notation ist also $|.| = |.|_2$.) Die wichtigen Eigenschaften sind im folgenden Satz formuliert.

**Satz.** Wenn $S \subset \mathbb{R}^k$ und $T \subset \mathbb{R}^m$ Rechtecke sind, dann ist $S \times T$ ein Rechteck in $\mathbb{R}^{k+m}$ und

$$|S \times T|_{k \cdot m} = |S|_k \cdot |T|_m \ .$$

Wenn $S \subset \mathbb{R}^k$ und $T \subset \mathbb{R}^m$ meßbare Mengen sind, dann ist $S \times T$ meßbar in $\mathbb{R}^{k+m}$ und

$$|S \times T|_{k \cdot m} = |S|_k \cdot |T|_m \ .$$

**Ende 15. Vorlesung**

**16. Vorlesung am Donnerstag 29.6.2017**

# 16 Riemann-Integral

Wir haben die "Integration" als Umkehroperation zu "Differentiation" eingeführt und Integrale aus diesem Sichtpunkt berechnet (eigentlich durch Raten). Wir haben keine Aussage über die Existenz eines Integrales formuliert, welche unabhängig von Differentialrechnung ist. Wir haben ohne vollständigen Beweis den Zusammenhang zwischen Integral und Messung von Längen und Flächeninhalten erwähnt.

In diesem Kapitel werden wir die Integration unabhängig von der Differentialrechnung, aber mit dem zugrunde liegenden Grenzwertbegriff einführen. Wir werden Aussagen über Existenz unabhängig von Differentialrechnung formulieren und beweisen. Schließlich werden wir die Brücke zwischen Differentialrechnung (Stammfunktion) und Riemann-Integral in Form des Hauptsatzes der Differential- und (Riemann-)Integralrechnung formulieren: Das bestimmte Integral, welches mit Hilfe einer Stammfunktion definiert ist, und das Riemann-Integral, welches analog zu Maß (Inhalt) definiert ist, stimmen überein, falls beide existieren.

## 16.1 Einführung für Funktionen einer Variable

Wir betrachten eine Menge $B \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $B \subset D_f$. Wir nehmen zuerst an, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in B$ gilt, dann werden wir allgemeiner beschränkte Funktionen betrachten. Der zugehörige Graph und die zwischen Graph und $x$-Achse eingeschlossene Figur, also die Mengen

$$\begin{aligned} G_{f,B} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in B \wedge y = f(x)\} \ , \\ M_{f,B} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in B \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} \end{aligned}$$

sind Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Ziel ist es, unter gewissen Voraussetzungen über $f$, und unter der Voraussetzung, dass man die Menge $M$ (eindimensional) messen kann, die (zweidimensoionale) Meßbarkeit der Menge $M_{f,B}$ und ihr Maß zu bestimmen. Der Einfachheit halber wird $B$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall sein, also meßbar.

**Definition.** Für ein Intervall $B = [a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ heißt $t_0, t_1, \ldots, t_n$ eine **Zerlegung**, wenn $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ für die reelle Zahlen $t_i$ gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Für eine Funktion $f$ mit $B \subset D_f$, welche auf $B$ beschränkt ist, eine Zerlegung von $B$ und für die Teilintervalle $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, definiere die reelle Zahlen

$$\begin{aligned} \mathrm{s}(f; B; t_0, \ldots t_n) &= \sum_{i=1}^{n} \inf f(I_i) \cdot |I_i| \ , \\ \mathrm{S}(f; B; t_0, \ldots t_n) &= \sum_{i=1}^{n} \sup f(I_i) \cdot |I_i| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \underline{\int_B} f &= \sup\{\mathrm{s}(f; B; t_0, \ldots t_n) : \ t_0, \ldots, t_n \text{ ist eine Zerlegung von } B\} \ , \\ \overline{\int_B} f &= \inf\{\mathrm{S}(f; B; t_0, \ldots t_n) : \ t_0, \ldots, t_n \text{ ist eine Zerlegung von } B\} \ . \end{aligned}$$

Die letzte Zahl heißt **oberes Integral von $f$ über $B$**, die vorletzte **unteres Integral von $f$ über $B$**. Wenn sie gleich sind, dann heißt die Funktion $f$ **intergrierbar im Riemannschen Sinn über $B$** und diese Zahl heißt **Riemann-Integral von $f$ über $B$**. Sie ist durch

$$\int_B f$$

oder auch durch $\int_B f(x)dx$, falls wir die Variable der Funktion deuten wollen, bezeichnet.

**Beispiele.**

- Die konstante Funktion $f(x) = 1$ für $x \in [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$, die Menge $B = [a, b]$: Da $\mathrm{s}(f; B; t_0, \dots t_n) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |I_i| = b - a = |B|$ und $\mathrm{S}(f; B; t_0, \dots t_n) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |I_i| = b - a$ für beliebige Zerlegung ist, ist das untere Integral gleich $b - a$ und das obere Integral gleich $b - a$. Damit ist $f$ über $B$ integrierbar und

$$\int_{[a,b]} 1\, dx = b - a \ .$$

- Die lineare Funktion $f(x) = kx + l$ für $x \in [a, b]$ $(k, l, a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$, die Menge $B = [a, b]$: Wir führen die Rechnungnen in dem Fall $k > 0$ durch. Das Resultat gilt in allgemeinem Fall.

  1. Schritt. Wir beweisen, dass $f$ über $B$ integrierbar ist. Offensichtlich gilt für jede Zerlegung $Z$, dass $s(f, B, Z) \le S(f, B, Z)$, und damit $\underline{\int}_B f \le \overline{\int}_B f$. (Das gilt übrigens für beliebige Funktion $f$ und beliebiges beschränktes Intervall $B$.) Wenn $\underline{\int}_B f < \overline{\int}_B f$ gelten würde, dann ist $\varepsilon = \frac{\overline{\int}_B f - \underline{\int}_B f}{k(b-a)}$ eine positive Zahl. Wir rechnen für eine beliebige Zerlegung $Z$. Da $k > 0$, ist $f$ monoton wachsend in $[a, b]$ und

$$\begin{aligned} S(f, B, Z) - s(f, B, Z) &= \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (kt_i + l) \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n (kt_{i-1} + l) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= k \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &\le k \max\{(t_i - t_{i-1}) : i = 1, \dots, n\} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= k \cdot \max\{(t_i - t_{i-1}) : i = 1, \dots, n\} \cdot (b - a) \ . \end{aligned}$$

  Für die gegebene $\varepsilon$ findet man eine Zerlegung $Z_\varepsilon$, für welche $\max\{(t_i - t_{i-1}) : i = 1, \dots, n\} < \varepsilon$ gilt. Mit dieser Zerlegung $Z_\varepsilon$ gilt dann

$$\overline{\int_B} f - \underline{\int_B} f \le S(f, B, Z_\varepsilon) - s(f, B, Z_\varepsilon) < k \cdot \varepsilon \cdot (b - a) = \overline{\int_B} f - \underline{\int_B} f \ ,$$

  was ein Widerspruch ist. Folglich müssen das untere und das obere Integral gleich sein. Damit ist $f$ integrierbar über $B$.

2. Schritt. Wir berechnen das Integral $\int_B f$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ und bezeichne die Zerlegung mit $t_0, \ldots, t_n$ durch $Z_n$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} S(f, B, Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (kt_i + l) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left( k(a + i\frac{b-a}{n}) + l \right) \frac{b-a}{n} \\ &= (ka + l)(b - a) + \frac{k(b-a)^2}{2} \frac{n+1}{n} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(f, B, Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left( k(a + \frac{b-a}{n}(i-1)) + l \right) \frac{b-a}{n} \\ &= (b - a) \cdot (ka + l) + \frac{k(b-a)^2}{2} \frac{n-1}{n} \ . \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass das untere und obere Integrale gleich sind, also folgt aus der Definition, dass

$$s(f, B, Z_n) \leq \underline{\int}_B f = \overline{\int}_B f \leq S(f, B, Z_n)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da $\lim_n \frac{n+1}{n} = 1 = \lim_n \frac{n-1}{n}$, ist auch $\lim_n s(f, B, Z_n) = \lim_n S(f, B, Z_n) = (ka + l)(b - a) + \frac{k(b-a)^2}{2}$ und es folgt

$$(ka+l)(b-a) + \frac{k(b-a)^2}{2} \leq \underline{\int}_B f = \overline{\int}_B f \leq (ka+l)(b-a) + \frac{k(b-a)^2}{2} \ .$$

Zusammengefasst,

$$\int_{[a,b]} (kx + l)dx = (ka + l) \cdot (b - a) + \frac{k(b-a)^2}{2} \ .$$

□

- (In der Vorlesung nicht gemacht) Die Dirichletfunktion $D$ definiert durch $D(x) = 1$ für $x \in [0, 1]$ rational und $D(x) = 0$ für $x \in [0, 1]$ irrational, ist in $[0, 1]$ nicht Riemann-integrierbar, da für jede Zerlegung $Z$ von $[0, 1]$ ist $s(D, [0, 1], Z) = 0$, $S(D, [0, 1], Z) = 1$ und damit

$$\underline{\int}_{[0,1]} D = 0 \neq 1 = \overline{\int}_{[0,1]} D \ .$$

**Satz (Maß vs. Integral).** Wenn die Menge $B$ Jordan-meßbar ist und die Funktion $f$ Riemann-Integrierbar über $B$ ist, dann ist die Menge $M_{f,B}$ Jordan-meßbar und für ihr Jordan-Maß gilt

$$|M_{f,B}| = \int_B f \ .$$

Alternativ könnte man Folgen von Zerlegungen betrachten, für welche der Feinheitsgrad $\max\{|t_i - t_{i-1}| \ : \ i = 1, \dots, n\}$ gegen 0 konvergiert und mit Hilfe von Grenzwerten (statt Supremum, Infimum) die obere, untere Integrale definieren. Wie auch beim Jordan-Maß, man kann zeigen, dass die zwei Zugänge zu gleichen Begriffen führen.

**Satz (Eigenschaften des Riemann-Integrals)**

a) Wenn $B$ eine meßbare Menge ist, $f$ und $g$ Riemann-integrierbare Funktionen über $B$ sind und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, dann ist die Summe $f + g$ und das Vielfache $\lambda \cdot f$ auch Riemann-Integrierbar über $B$ und

$$\int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g, \quad \int_B (\lambda f) = \lambda \int_B f \ .$$

b) Wenn $B$ meßbar und $f$, $g$ Riemann-integrierbar über $B$ sind und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in B$ gilt, dann ist $\int_B f \leq \int_B g$.

c) Wenn $B_1$ und $B_2$ meßbare Mengen ohne gemeinsamn inneren Punkten sind und $f$ integrierbar über $B_1$ und über $B_2$ ist, dann ist $f$ auch über $B = B_1 \cup B_2$ intergrierbar und

$$\int_B f = \int_{B_1} f + \int_{B_2} f \ .$$

**Ende 16. Vorlesung**

**17. Vorlesung am Montag 3.7.2017**

d) Wenn $B$ meßbare Menge ist, $f$ integrierbare Funktion über $B$ und die Menge $B_1 \subset B$ meßbar ist, dann ist $f$ auch über $B_1$ integrierbar, außerdem ist $B \setminus B_1$ meßbar und $f$ über $B \setminus B_1$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{B_1} f + \int_{B \setminus B_1} f = \int_B f \ .$$

Ohne Beweis, da sehr technisch.

Wir haben gelernt, wie man für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $B = [a, b] \subset \mathbb{R}$ (meßbar!) mit $B \subset D_f$ den Begriff

$$\int_B f$$

definieren kann. Ähnlich kann man definieren

$$\iint\limits_B f$$

für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}^2$ meßbar mit $B \subset D_f$, und auch

$$\iiint\limits_B f$$

für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}^3$ meßbar mit $B \subset D_f$. Die Interpretation kann Flächeninhalt, Volumen bzw. 4-dimensionales Volumen sein, aber auch Masse eines Drates, einer flächen Figur bzw. eines Körpers mit gegebener Dichte $f$ sein. Die Sätze (Maß versus Integral, Eigenschaften des Riemann-Integrals) gelten in der allgemeinen Situation.

Wenn die Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-meßbar ist und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $B \subset D_f$ beschränkt ist, dann ist $M_{f,B} \subset \mathbb{R}^3$ und falls existiert, heißt $\iint_B f$ **das zweidimensionale Riemann-Integral von $f$ über $B$**. Es wird auch durch $\int_B f$ bezeichnet, und auch durch $\int_B f(x, y)d(x, y)$, falls man die Variable der Funktion andeuten will.

**Beispiele.**

- Wenn $G \subset R^n$ eine Menge ist, definiere die Funktion $\chi_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\chi_G(x) = 1$ für $x \in G$ und $\chi_G(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus G$. Sie heißt **die charakteristische Funktion der Menge $G$**.

  Wenn $R \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck ist und $G \subset R$ eine Menge ist, dann gilt: $G$ ist genau dann meßbar, wenn die Funktion $\chi_G$ über $R$ integrierbar ist und in diesem Fall

  $$\int_R \chi_G = \int_G \chi_G + \int_{R \setminus G} \chi_G = \int_G 1 + \int_{R \setminus G} 0 = \int_G 1 = |G| \ .$$

- Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge und $h > 0$ eine reelle Zahl. $f = h\chi_G$ ist eine Funktion und die Menge

  $$M_{f,G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G \wedge 0 \leq z \leq h\}$$

ist eine Teilmenge des Raumes und heißt **Zylinder mit Grund** $G$ **und Höhe** $h$. Wenn $G$ meßbar ist, dann ist der Zylinder meßbar und sein Maß ist

$$|M_{f,G}| = \int_G h\chi_G = h \int_G \chi_G = h \cdot |G| \ ,$$

das Produkt des Maßes der Grundfläche (zweidimensionales Maß, Flächeninhalt) und der Höhe (eindimensionales Maß, Länge).

## 16.2 Satz von Fubini und Anwendungen

Erinnerung: Für $S \subset \mathbb{R}^k$ Jordan-meßbar und $T \subset \mathbb{R}^m$ Jordan-meßbar ist das kartesische Produkt $S \times T \subset \mathbb{R}^{k+m}$ Jordan-meßbar und für die entsprechende Maße gilt

$$|S \times T|_{k+m} = |S|_k \times |T|_m \ .$$

Folgender Satz gilt allgemein für Funktionen $f : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}$, wir werden ihn zuerst in dem Fall $k = m = 1$ formulieren.

**Satz (Fubini)** Sei $R = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. (Allgemeiner: sei $I \subset \mathbb{R}^k$ ein $k$-dimensionaler Rechteck, $J \subset \mathbb{R}^m$ ein $m$-dimesionaler Rechteck, $R = I \times J$ und $f : \mathbb{R}^{k+m} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.) Wenn $f$ über $R$ Riemann-integrierbar ist, dann gelten folgende Aussagen.

i) Für jedes $x \in I$ die Funktion $g_x$ definiert durch $g_x(y) = f(x, y)$ für $y \in J$ Riemann-integrierbar in $J$ ist,

ii) die Funktion $h$ definiert durch $h(x) = \int_J g_x$ für $x \in I$ Riemann-integrierbar in $I$ ist,

iii) $\int_I h = \int_R f$, symbolisch geschrieben

$$\int_I \left( \int_J f(x, y)dy \right) dx = \iint_{I \times J} f(x, y)d(x, y) \ .$$

Außerdem gelten auch folgende Aussagen:

i) für jedes $y \in J$ die Funktion $g_y$ definiert durch $g_y(x) = f(x, y)$ für $x \in I$ Riemann-integrierbar in $I$ ist,

ii) die Funktion $h$ definiert durch $h(y) = \int_I g_y$ für $y \in J$ Riemann-integrierbar in $J$ ist,

iii) $\int_J h = \int_R f$, symbolisch geschrieben

$$\int_J \left( \int_I f(x,y)dx \right) dy = \iint\limits_{I\times J} f(x,y)d(x,y) \ .$$

**Folgerung (Cavalierisches Prinzip)** Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge, $R = [a,b] \times J \subset \mathbb{R}^3$ ein Quader ($J \subset \mathbb{R}^2$ Rechteck) mit $B \subset R$. Wenn $B$ meßbar ist, dann können wir das Maß von $B$ wie folgt mit dem Satz von Fubini berechnen:

$$\begin{aligned} |B|_3 = \iiint\limits_{[a,b]\times J} \chi_B &= \int_{[a,b]} \left( \iint\limits_J \chi_B(x,y,z)d(y,z) \right) dx \\ &= \int_{[a,b]} |B \cap \mathcal{E}_x|_2 dx, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{E}_z = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u = x\}$ die Ebene parallel zu der $yz$-Ebene durch $(0,0,x)$ für jede $x \in [a,b]$ ist.

Dieses Prinzip wurde von Cavalieri schon in 16. Jahrhundert formuliert. Der Satz von Fubini im Rahmen der Lebesgueschen Integraltheorie ist aber erst im 1908 vollständig bewiesen! Historisch wurde zuerst das Integral von Riemann in 1854 eingeführt. Der präzise Inhaltsbegriff wurde später, in 1887 von Peano eigeführt und in 1892 von Jordan weiter ausgearbeitet. Mit der Idee von Kompression - Exhaustion hat schon in 2. Jahrhundert v.Ch. Archimedes einige Flächen- und Volumeninhalte in voller Präzision ausregechnet.

**Beispiele.**

- Einheitskugel $M = \{(x,yz) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Angenommen, dass wir den Flächeninhalt der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$, $r^2\pi$, kennen, und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Riemann-Integral gleich bestimmtes Integral, siehe letzte Kapitel) anwenden, können wir mit dem Prinzip von Cavalieri berechnen ($B \cap \mathcal{E}_x$

ist die Kreisscheibe in der Ebene $\mathcal{E}_x$ mit Radius $\sqrt{1-x^2}$)

$$\begin{aligned}
|M|_3 &= \int_{[-1,1]} |M \cap \mathcal{E}_x|_2 dx = \int_{[-1,1]} \left( (\sqrt{1-x^2})^2 \pi \right) dx \\
&= \pi \int_{[-1,1]} (1-x^2) dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2) dx \\
&= \pi \left( \lim_{x \to 1-} (x - \frac{x^3}{3}) - \lim_{x \to -1+} (x - \frac{x^3}{3}) \right) = \pi \left( 1 - \frac{1^3}{3} - ((-1) - \frac{(-1)^3}{3}) \right) \\
&= \frac{4}{3}\pi \; .
\end{aligned}$$

- Kreisscheibe

**Ende 17. Vorlesung**

**18. Vorlesung am Donnerstag 6.7.2017**

## 16.3 Exkurs: Differentialrechnung für Funktionen mehreren Variablen

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir schreiben $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \dots \\ \psi_m(x) \end{pmatrix}$, dann sind $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für $i = 1, 2, \dots, m$. Nehmen wir zum Beispiel $n = 3$ und die Funktion $\psi_2$. Seien $x_1, x_2$ fixierte reelle Zahlen und betrachten wir die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Variable $y$ definiert durch $g(y) = \psi_2(x_1, x_2, y)$ für passende $y$. Die Funktion $g$ kann an einer Stelle $y$ differenzierbar sein, insbesondere an der Stelle $y = x_3$. Wenn es so ist, heißt ihre Ableitung, also die reelle Zahl $g'(x_3)$ **die partielle Ableitung der Funktion $\psi_2$ nach der dritten Variable an der Stelle** $x = (x_1, x_2, x_3)$ und ist durch

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}(x)$$

bezeichnet. Ähnlich kann die partielle Ableitung der Funktion $\psi_2$ nach der ersten Variable bzw. nach der zweiten Variable an der Stelle $x$ definiert werden, und dies auch für die andere Funktionen $\psi_i$. In der allgemeneinen Situation entsteht damit eine reelle Matrix mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \\
\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n}(x) \\
\dots & & & \\
\frac{\partial \psi_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n}(x)
\end{pmatrix} ,$$

welche die **Jacobimatrix** der Funktion $\psi$ an der Stelle $x$ heißt.

Wenn die Funktion $\psi$ an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ eine Jacobimatrix besitzt, nennen wir diese $A$, dann können wir eine lineare (affine) Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wie folgt definieren:

$$g(x) = A \cdot (x - a) + \psi(a) \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ ,$$

wobei $x$, $a$ und $g(x)$ Spaltenvektoren sind und $\cdot$ die Matrixmultiplikation ist. Wenn diese Funktion $g$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \to a} \frac{d(f(x), g(x))}{d(x, a)} = 0$$

hat (im Zähler ist $d$ die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^m$ und im Nennen ist $d$ die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$), dann sagen wir, dass **die Funktion $\psi$ an der Stelle $a$ differenzierbar ist** und bezeichnen $\psi'(a) = A$ die Jacobimatrix an der Stelle $a$. Wenn $m = 1$ und $n = 2$ ist, ist tatsächlich der Graph von $\psi$ eine Fläche im Raum und der Graph von $g$ heißt **Tangentialebene zu dem Graph von $\psi$ an der Stelle $a$**.

Vergleiche mit dem Satz über der geometrischen Bedeutung der Ableitung für Funktionen einer Variable!

In dem speziellen Fall $n = m$ ist die Jacobimatrix eine quadratische Matrix und folglich besitzt Determinante.

## 16.4 Substitutionssatz und Anwendungen

**Satz (Substitution II)** Seien $G, H \subset \mathbb{R}^n$ Mengen, $\Phi : H \to G$ eine bijektive Abbildung so, dass $\Phi$ differenzierbar ist, $\det \Phi'(u) \neq 0$ für alle $u \in H$ und $\Phi$ erfüllt die lokale Lipschitzbedingung. Wenn $H$ Jordan-meßbar ist und die Funktion $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ Riemann-integrierbar über $H$ ist, dann ist $G$ Jordan-meßbar, $f$ ist über $G$ Riemann-integrierbar und

$$\int_G f(x)dx = \int_H f(\Phi(u)) \cdot |\det \Phi'(u)| du \ .$$

Der Beweis ist nicht einfach und wird hier nicht präsentiert.

**Beispiele.**

- Kreisscheibe mit Polarkoordinaten. Wir betrachten die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge x^2 + y^2 < 1\}$. (Wir wissen, dass $M$ meßbar ist, weil man sein Rand mit Graphen von drei stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschreiben kann.) Wir betrachten die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\Phi(r,\alpha) = (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha))$ für $(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2$, die Mengen $H = (0,1) \times (0, \frac{\pi}{2})$ und $G = M$. Man kann nachprüfen, dass $\Phi$ eine bijektive Abbildung von $G$ auf $H$ ist. Wenn $(r,\alpha) \in H$ ist, es ist einfach zu nachprüfen, dass $\Phi(r,\alpha) \in M$. Wenn ein $(x,y) \in M$ gegeben ist, dann ist $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \in (0,1)$ und folglich existiert genau eine reelle Zahl $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit $\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Dann ist $\sin(\alpha) = \sqrt{1-(\cos(\alpha))^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Daraus folgt, dass $\Phi : H \to M$ surjektiv und injektiv ist. Wir berechnen die Determinante der Jacobimatrix von $\Phi$:

$$\begin{aligned}
\det(\Phi'(r,\varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{d}{dr} r\cos(\varphi) & \frac{d}{d\phi} r\cos(\varphi) \\ \frac{d}{dr} r\sin(\varphi) & \frac{d}{d\phi} r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} = r(\cos(\varphi))^2 + r\sin(\varphi))^2 = r\ .
\end{aligned}$$

Da $\det(\Phi'(r,\varphi)) = r \neq 0$ für alle $(r,\varphi) \in H$ ist, gilt mit dem Satz Substitution II, Fubini und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
|B|_2 &= \int_B 1 = \int_H 1 \cdot |r| d(r,\alpha) \\
&= \int_{(0,\frac{\pi}{2})} \left( \int_{(0,1)} r dr \right) d\alpha = \int_{(0,\frac{\pi}{2})} \left( \int_0^1 r dr \right) d\alpha \\
&= \int_{(0,\frac{\pi}{2})} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^1 = \int_{(0,\frac{\pi}{2})} \frac{1}{2} d\alpha \\
&= \frac{1}{2} \int_{(0,\frac{\pi}{2})} d\alpha = \frac{1}{2} \cdot |(0, \frac{\pi}{2})| = \frac{\pi}{4}\ .
\end{aligned}$$

Für ein Punkt $P$ der Ebene, $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, heißen $(r,\alpha) = \Phi_{-1}(x,y)$ (gegeben wie oben im Fall $(x,y) \in M$) **Polarkoordinaten** des Punktes $P$, und $(x,y)$ die **Euklidische Koordinaten** des Punktes $P$.

**Ende 18. Vorlesung**

**19. Vorlesung am Donnerstag 13.7.2017**

- Ählich kann man den Flächeninhalt einer Kreisscheibe mit Radius $R > 0$ berechnen.
- Volumen eines Kugels mit Radius $R > 0$ mit **spherischen Koordinaten**

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$: für die Berechnung wird ein Trick, das zweidimensionale Riemann-Integral, der Substitutionssatz II (mit Polarkoordinaten), der Satz von Fubini und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benötigt. Der Wert dieses Ausdruckes ist $\sqrt{2\pi}$.

- Beweis der Formel $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$ für die Verteilungssfunktion $\phi$ der Standardnormalverteilung definiert durch

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx, \quad z \in \mathbb{R} .$$

  Es wird der obige Integralwert und die Substitution mit $\Phi(z) = -z$ benötigt. Schwieriger ist es, den Sinn von dem Ausdruck in der Definition von $\phi$ zu klären. Da $(-\infty, z]$ keine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist die Existenz des Riemann-Integrales nicht geklärt; da die Existenz einer Stammfunktion zu $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ nicht geklärt ist, ist auch die Existenz des bestimmten Integrales nicht geklärt.

# 17 Tiefere Sätze der Integralrechnung

**Satz (Hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit).**

a) Wenn die Funktion $f$ auf dem abgeschlossen beschränkten Interval $[a, b]$ stetig ist, dann ist $f$ Riemann-integrierbar über $[a, b]$.

b) Wenn die funktion $f$ auf dem Intervall $[a, b]$ monoton ist, dann ist $f$ Riemann-integrierbar über $[a, b]$.

Beweisideen. Für eine Zerlegung $Z$ berechnet man und vergleicht einfach die $s(Z)$ und $S(Z)$, falls $f$ monoton ist, wie beim Dreieck. Für stetige $f$ ist kommt ein neuer Begriff, gleichmäßige Stetigkeit, ins Spiel. Diesen werden wir hier nicht besprechen.

$\square$

**Beispiel.**

- Existenz der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, d.h. $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{x^2}}dx$: Es wird benötigt, dass die Funktion $e^{-\frac{x^2}{2}}$ stetig ist und dass der Grenzwert $\lim_{R\to-\infty} \int_{[R,z]} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ existiert.

**Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $[a, b] \subset D_f$. Falls das bestimmte Integral $\int_a^b f$ existiert und eine reelle Zahl ist und $f$ über $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist, dann

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f \ .$$

Beweisidee. Da $f$ Riemann-integrierbar ist, kann man die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[a,x]} f, & \text{wenn } a < x \le b \ , \\ 0, & \text{wenn } x = a \end{cases}$$

definieren. Weiter kann man beweisen, dass $F$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $(a, b)$ ist mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Folglich ist $F$ eine Stammfunktion zu $f$ auf $(a, b)$. Da $f$ bestimmtes Integral von $a$ bis $b$ besitzt, und $F$ eine Stammfunktion zu $f$ auf $(a, b)$ ist, gilt

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_{[a,b]} f \ .$$

□

**Folgerungen.**

i) Funktionen, welche stetig auf einem Intervall sind, besitzen auf diesem Intervall eine Stammfunktion. Es ist aber nicht immer möglich, diese Stammfunktion mit Hilfe von endlich vielen elementaren Funktionen (rationale Funktionen, Exponentialfunktion und Kreisfunktionen sowie ihre inverse Funktionen) und der Grundrechenoperationen ($+$, $-$, $\cdot$, $:$ und Wurzelziehen) zu angeben. Reihen können auch in diesem Hinsicht benötigt werden.

ii) Wenn die Funktion $F$ in dem beschränkten, abgeschlossenem Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist und ihre Ableitung $F'$ Riemann-integrierbar über $[a, b]$ ist, dann gilt für jede $c, d \in [a, b]$ mit $c < d$ die Formel

$$\int_{[c,d]} F' = F(d) - F(c) \ .$$

**Beispiele und Bemerkungen.**

- Mit Hilfe des Begriffes $\lim_{R\to+\infty}\int_1^R f$, welches **verallgemeinertes Riemann-Integral** heißt, kann man ein Integralkriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ formulieren.

- Für die Funktion $f = \mathrm{sgn}$ existiert das bestimmte Integral $\int_{-1}^1 f$ nicht, aber das Riemann-Integral $\int_{[-1,1]} f$ ja und es ist gleich 0.

- Die Dirichletfunktion $D$ besitzt auf $(0,1)$ keine Stammfunktion, folglich existiert $\int_0^1 f$ nicht. Das Riemann-Integral von $D$ über $[0,1]$ existiert auch nicht.

- Es gibt noch Lebesgue-Maß und Lebesque-Integral. Die Menge $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ ist Lebesgue-meßbar und hat Lebesgue-Maß gleich 0, die Dirichletfunktion ist Lebesgue-integrierbar. Die Idee ist, dass man beim äußeren Maß auch Bedeckungen mit unendlich (aber abzählbar) vielen Rechtecken zulässt.

# 18 Anwendungen: Flächen- und Volumenberechnungen

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der Theorie des Riemann-Integrales und der Anwendung der Theorie der Differentialrechnung sind alle Rechnungen, welche zu Formeln von Flächeninhalten elementaren Figuren (Rechteckt, Dreieck, Parallelogramm, Polygone, Kreis) bzw. Volumen elementaren Körpers (Quader, Zylinder, Prisma, Kugel) geführt haben, mathematisch begründet. Die Volumenberechnung des Kegels ist zum Selbststudium gelassen.
**Ende 19. Vorlesung**

Ende des Sommersemesters