Dr. Eva Fašangová, Institut für Analysis, TU Dresden
Einführung in die Analysis, WS 2016/17 und SS 2017

Themen

1. **Topologie.** Definition der Metrik. Beispiele: Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$. Definition von kreisförmigen und ringförmigen Umgebungen. Offene Mengen, abgeschlossene Mengen, Beispiele. Beweis, dass der Durchschnitt von zwei offenen Mengen eine offene Menge ist. Diskrete Metrik, eine Metrik auf der Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$, welche in dem Beweis des Satzes von Peano vorkommt.

2. **Reelle Zahlen.** Definition der Ordnungsrelation, Supremum. Axiomatische Einführung der Menge $\mathbb{R}$. Definition der Gruppe (aus GLAAG), Beispiele. Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$. Beweis der Existenz bzw. nicht Existenz von $\sqrt{2}$.

3. **Grenzwert.** Grenzwert einer reellen Folge, einer Funktion im Unendlichen und einer Funktion an einer Stelle. Satz über der Eindeutigkeit des Grenzwertes für Folgen mit Beweis. Beispiele. Grenzwert von Punkten in der Ebene bezüglich der Euklidischen Metrik, von Folgen von komplexen Zahlen.

4. **Reelle Folgen.** Definition einer Folge. Monotonie, Beschränktheit reeller Folgen. Definition des Grenzwertes, Rechenregeln. Satz über den Grenzwert einer monotonen reellen Folge mit Beweisidee. Definition von Cauchy-Folgen, Zusammenhang mit konvergenten Folgen. Approximation von $\sqrt{2}$ mit einer rekursiv definierten Folge $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$. Komplexe Folgen.

5. **Reelle Reihen.** Definition der Reihe, Partialsumme, Summe. Konvergenz, absolute Konvergenz. Rechenregeln. Konvergenzkriterien (eins davon mit Beweis). Beispiele: $\sum \frac{x^n}{n!}$, Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen. Unendliche Produkte.

6. **Exponentialfunktion.** Definition mit Reihe. Satz über Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion, Beweisideen. Logarithmus. Lösung der Differentialgleichung $f' = f$ auf $\mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$. Komplexe Exponentialfunktion, Zusammenhang mit Sinus- und Kosinusreihen.

7. **Grenzwert und Stetigkeit.** Definitionen. Grenzwert auch als $+\infty, -\infty$. Beispiele. Satz über Stetigkeit der Komposition mit Beweis. Eigenschaften stetiger Funktionen (Erhaltung des Zusammenhangs, Existenz der Extremalstellen). Vergleich mit der Einführung der Stetigkeit in der Schule.

8. **Stetigkeit und Differenzierbarkeit.** Definitionen, Beispiele. Satz über Zusammenhang mit Beweis. Untersuchung der Funktion $|x|$ an der Stelle 0. Geometrische Interpretation der Ableitung. Die Dirichletfunktion.

9. **Ableitung.** Definition der Ableitung an einer Stelle. Beweis, dass die Funktion x^2 an der Stelle 1 differenzierbar ist. Satz über geometrische Bedeutung (lineare Approximation). Rechenregeln, Ableitung der inversen Funktion. Ableitungen von ln, arcsin. Beispiele von differenzierbaren und von nicht differenzierbaren Funktionen,

10. **Kurvenverlauf.** Definition von lokalen Extrema, Monotonie, Konvexität. Notwendige Bedingung für Extrema mit Beweis. Hinreichende Bedingung für Monotonie, Konvexität. Beispiele: $\exp x$, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, rationale Funktionen.

11. **Zwischenwertsätze.** Satz von Bolzano mit Beweisidee. Demonstration, dass der Satz ohne Voraussetzungen im Allgemeinen falsch ist. Erhaltung der Zusammenhangs bei stetigen Abbildungen. Kurvenverlauf der Kosinusfunktion, Satz über π. Einführung von arccos.

12. **Mittelwertsatz der Differenzialrechnug.** Satz von Rolle mit Beweis. Folgerung: hinreichende Bedingung für Monotonie. Anwendung: Kurvenverlauf der Sinusfunktion, einer rationalen Funktion.

13. **Rationale Funktionen.** Definitionsbereich, Untersuchung auf Grenzwerte, Differenzierbarkeit. Existenz einer Stammfunktion. Satz über Nullstellen eines reellen Polynomes (aus GLAAG). Satz über die Ableitung des Produkts von zwei Funktionen mit Beweis.

14. **Die Zahlen π und e.** Definition von π als erste Nullstelle der Kosinusfunktion. Aussage über die Bedeutung in Bezug zum Flächeninhalt der Kreisscheibe bzw. Kurvenlänge der Kreislinie. Definition von e als Grenzwert einer Folge und als Summe einer Reihe. Rationale Zahlen, konstruierbare Zahlen.

15. **Dezimalbruchdarstellung reellen Zahlen.** Beispiele. Interpretation als Reihe. Majorantenkriterium für Konvergenz von Reihen mit Beweisidee. Folgerung: Abzählbarkeit der Menge $\mathbb{Q}$ und Nichtabzählbarkeit der Menge $\mathbb{R}$. Wie erkennt man an der Dezimalbruchdarstellung, ob eine reelle Zahl rational ist oder nicht. π.

16. **Zählen, messen, modellieren.** Definition von Kombinationszahlen, binomische Formel und Pascalsches Dreieck. Zerlegung der Menge $[0,1] \times [0,1]$ in zwei disjunkten Jordan-meßbaren bzw. nicht Jordan-meßbaren Mengen, Beispiele. Abzählbare Mengen, Existenz einer Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$. Die Symbole $+\infty, -\infty$, Benutzung beim Grenzwertbegriff.

17. **Bestimmtes Integral.** Definition, Rechenregeln für Summe, Vielfaches. Satz Integration per partes mit Beweis. Anwendungen auf Flächeninhalt und Kurvenlänge.

18. **Lineare Differentialgleichungssysteme.** Formulierung mit Matrix, Beispiel. Lösungsmethode für symmetrische Matrix. Satz über Diagonalisierung einer Matrix (aus GLAAG), Rolle der Eigenwerte. Satz über die Struktur der Lösungsmenge für ein homogenes System. Vergleich mit Differenzengleichungssystemen. Idee der Lösung der Gleichung $f'' = -gf$.

19. **Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.** Beispiele. Definition der homogenen, inhomogenen Gleichung. Satz über der Struktur der Lösungsmengen. Lösungsmethode für homogene Gleichung, Charakteristischer Polynom, Fundamentalsystem. Definition der Basis eines Vektorraumes (aus GLAAG). Lösung der Gleichung $y'' + 4y = 0$.

20. **Differentialgleichungen 1. Ordnung.** Beispiele. Lösungsmethode für getrennte Variablen. Beispiel einer Differentialgleichung, welche man mit dieser Methode nicht lösen kann. Satz von Peano mit Beweisidee. Lösungskurve, Richtungsfeld. Lösung von $y' = 3y^{\frac{2}{3}}, y(0) = 0$.

21. **Jordan-Maß.** Definition in $\mathbb{R}^2$. Beweisidee der Meßbarkeit und der Berechnung des Maßes eines Dreieckes. Beispiel einer nicht-meßbaren Menge. Entscheidung über Meßbarkeit einfacher Mengen mit Hilfe von Kriterien. Idee der Einführung in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$. Maß eines Zylinders.

22. **Riemann-Integral.** Definition für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Beweisidee, dass lineare Funktionen integrierbar sind und der Berechnung ihres Integrales. Beispiel einer nicht Riemann-integrierbaren Funktion. Zusammenhang mit Jordan-Maß.

23. **Flächeninhalt.** Anforderungen. Definition des Flächeninhaltes eines Rechteckes. Satz über Flächeninhalt eines Parallelogramms (aus GLAAG). Berechnung des Flächeninhaltes der Kreisscheibe mit Hilfe der Integralrechnung. Länge einer Strecke, Volumen eines Körpers, Prinzip von Cavalieri.

24. **Substitutionssatz für Integral.** Anwendung des Satzes Substitution I für bestimmtes und unbestimmtes Integral auf einem konkreten Beispiel mit Begründung. Formulierung des Satzes Substitution II für Riemann-Integral und Anwendung auf die Berechnung des Flächeninhaltes der Kreisscheibe und Volumen der Kugel.

25. **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.** Definition des Riemann-Integrals. Definition einer Stammfunktion. Satz über Existenz des Riemann-Integrals und als Folgerung Satz über Existenz der Stammfunktion. Beispiele.