Dr. E. Fašangová, Dipl.-Math. Sybille Röder, Dipl.-Math. Katharina Höhne
Institut für Analysis , TU Dresden
Grundlagen der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Wintersemester 2015/16

Aufgabenblatt 1: Logik

Aufgaben für die Übung

1.1 Vervollständigen Sie die Wahrheitswerttabelle für die folgenden Aussagen.

$$q_1 \qquad q_2 \qquad q_3 \qquad q_1 \vee q_2 \qquad q_2 \wedge q_3 \qquad (q_1 \vee q_2) \wedge q_3 \qquad q_1 \vee (q_2 \wedge q_3)$$

$$\neg q_1 \qquad \neg(\neg q_1) \qquad \neg(q_2 \wedge q_3) \qquad (\neg q_2) \wedge (\neg q_3)$$

Entnehmen Sie dieser Tabelle, dass die Aussagen q_1 und $\neg(\neg q_1)$ äquivalent sind, und dass die Aussagen $\neg(q_2 \wedge q_3)$ und $(\neg q_2) \wedge (\neg q_3)$ nicht äquivalent sind.

1.2 Bezeichne p die Aussage "Ich habe eine 1 in Deutsch bekommen." und q die Aussage "Ich esse ein Eis.". Weiter bezeichnen wir mit Buchstaben folgende Aussagen:

r: Wenn ich eine 1 in Deutsch bekomme, dann esse ich ein Eis.

s: Ich esse ein Eis genau dann, wenn ich in Deutsch eine 1 bekomme.

t: Ich bekomme kein Eis, also habe ich keine 1 in Deutsch bekommen.

u: Wenn ich keine 1 in Deutsch bekommen habe, dann esse ich kein Eis.

Schreiben Sie die Aussagen r, s, t, u mithilfe der Abkürzungen p, q und den Symbolen $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ auf !

Beweisen Sie mithilfe der Wahrheitswerttabelle, dass r und t stets das gleiche bedeuten, und dass r und u nicht stets das gleiche bedeuten !

1.3 Wir kürzen die Aussage "Lehrer X.Y. ist Klassenlehrer des Schülers R." durch $X.Y.\angle R$ und die Aussage "Schüler R. geht in die Klasse n.a. " durch $R \in$ n.a . Schreiben Sie die folgende Aussagen mithilfe Symbolen $\exists, \forall$ und den oberen Abkürzungen auf! (Es geht um eine bestimmte Schule.)

r: Jede Klasse hat mindestens einen Klassenlehrer.

s: Jeder Lehrer ist Klassenlehrer von mindestens einer Klasse.

t: Es gibt mindestens eine Klasse, für welche jeder Lehrer Klassenlehrer ist.

u: Mindestens ein Lehrer ist Klassenlehrer für alle Klassen.

Bilden Sie die Negationen der Aussagen mithilfe der Symbole $\exists, \forall, \neg$!

1.4 Schreiben Sie die folgende Aussage mit der Hilfe von Symbolen $\exists, \forall$ auf und schreiben Sie auch die Negation der Aussage auf (es geht um Schachspiel): "Weiß zieht und setzt im zweiten Zug Matt."

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

1.5 Seien p, q, r Aussagen. Weisen Sie mithilfe der Wahrheitswerttabelle nach, dass die Aussage $p \Rightarrow q$, die Aussage $(\neg p) \vee q$ und die Aussage $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ äquivalent sind.

1.6 Weisen Sie mithilfe der Wahrheitswerttabelle nach, dass das Distributivgesetz

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

für beliebige Aussagen p, q und r gilt.

Aufgaben zum weiteren Üben

1.7 Entscheiden Sie über die Wahrheitswerte folgender Aussagen:

p: Für jede reelle Zahl a gibt es mindestens eine natürliche Zahl n, die größer als a ist.

q: Es gibt mindestens eine natürliche Zahl n, so dass jede reelle Zahl kleiner als n ist.

r: Es existieren mindestens zwei reelle Zahlen x und y, so dass $x^2+y^2 = 1$.

s: Für je zwei reelle Zahlen x und y gilt $x^2 + y^2 > 0$.

Schreiben Sie die obigen Aussagen mit Hilfe von Quantoren $\exists, \forall$ und Implikation $\Rightarrow$ auf. Schreiben Sie die Negation der Aussagen auf und geben Sie deren Wahrheitswerte an.

1.8 Seien p und q Aussagen. Geben Sie die Wahrheitswerttabelle für folgende Aussagen an!

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$

1.9 Beweisen Sie, dass die Aussagen $\neg(p \Rightarrow q)$ und $p \wedge (\neg q)$ stets äquivalent sind. Schreiben Sie einen Beweis mit Hilfe der Wahrheitswerttabelle, und einen anderen Beweis mit Hilfe von Umformungen und Rechenregeln für Aussagen auf.

1.10 Ist die folgende Aussage stets wahr?

"Auf der Party gibt es immer eine Person, so dass wenn diese einen Hut trägt, alle einen Hut tragen."

Aufgabenblatt 2: Mengen

2.1 Sei M eine Menge, A_1, A_2 und A_3 Teilmengen von M und bezeichne x ein Element von M. Vervollständigen Sie die Wahrheitswerttabelle für die folgenden Aussagen:

$$x \in A_1 \qquad x \in A_2 \qquad x \in A_3 \qquad x \in A_1 \cup A_2 \qquad x \in A_2 \cap A_3, \qquad x \in (A_1 \cup A_2) \cap A_3$$

$$x \in A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$$

$$x \in M \setminus A_1 \qquad x \in M \setminus (M \setminus A_1) \qquad x \in M \setminus (A_2 \cap A_3) \qquad x \in (M \setminus A_2) \cap (M \setminus A_3)\,.$$

Als Hilfsmittel skizzieren Sie die Venn-Diagramme. Entnehmen Sie dieser Tabelle, dass die Mengen A_1 und $M \setminus (M \setminus A_1)$ stets gleich sind, und dass die Mengen $M \setminus (A_2 \cap A_3)$ und $(M \setminus A_2) \cap (M \setminus A_3)$ nicht stets gleich sind.

2.2 Es sei $M = \{\varrho, \varphi, \alpha\}$ die Menge der drei griechischen Buchstaben rho, phi und alpha gegeben.

a) Listen Sie alle Teilmengen der Menge M auf!

b) Geben Sie die Menge aller Teilmengen von M, d.h. die Menge $\mathcal{P}(M)$ an!

c) Listen Sie alle Elemente der Menge $M \times M$ auf. Schreiben Sie die Menge $M \times M$ mit Hilfe ihrer Elemente auf.

d) Listen Sie mindestens drei verschiedene Teilmengen der Menge $M \times M$ auf.

e) Wieviele Elemente hat die Menge $M \times M$ und wieviele hat die Menge $\mathcal{P}(M \times M)$?

2.3 Bezeichne E die Menge aller Punkte der Ebene, P den Punkt $(1, 1)$ in der Ebene, und g die Gerade in der Ebene, die durch die Punkte P und $(0, 0)$ geht. Bezeichne weiter G die Menge aller Geraden in der Ebene, die durch den Punkt P gehen. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

$$P \in E \quad P \subset E \quad g \in E \quad g \subset E \quad P \in g \quad P \subset g \quad g \in G \quad g \subset G$$

$$\{P\} \in E \quad \{P\} \subset E \quad \{P\} \in g \quad \{P\} \subset g \quad P \in \{P\} \quad P \subset \{P\}$$

$$\{g\} \in G \quad \{g\} \subset G \quad \{g\} \in E \quad \{g\} \subset E \quad \{E\} \subset E \quad \{E\} \subset \{E\}$$

$$G \subset E \quad G = E \quad G \in E \quad \{G\} \subset E \quad G = G \quad \{G\} = E$$

Als Hilfsmittel fertigen Sie eine Skizze mit E, P und g an. Bestimmen Sie die Menge $\{x \in E : \exists h \in G \text{ mit } x \in h\}$!

2.4 Seien A, B, C Mengen. Weisen Sie nach, dass folgende Aussage immer wahr ist:

$$(A \setminus (B \cap C)) = ((A \setminus B) \cup (A \setminus C)).$$

Veranschaulichen Sie Ihren Beweis mit Hilfe von Venn-Diagrammen.

<u>Hausaufgaben zum Abgeben</u> Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

2.5 Weisen Sie das Distributivgesetz

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

für beliebige Mengen A, B, C nach !

2.6 Seien Alf, Bert, Cia und Dia Schüler, durch Mengen $a = \{Alf, Bert\}$ und $b = \{Cia, Dia\}$ seien zwei Klassen modelliert, und durch die Menge $S = \{a, b\}$ sei die Schule modelliert. Von folgenden Aussagen kreisen Sie diejenigen ein, die stets wahr sind !

$$\begin{array}{cccc} Alf \in a & \{Alf\} \in a & Alf \subset a & \{Alf\} \subset a \\ Alf \in S & \{Alf\} \in S & Alf \subset S & \{Alf\} \subset S \\ a \in S & \{a\} \in S & a \subset S & \{a\} \subset S \\ \emptyset \in a & \emptyset \in S & \emptyset \subset a & \emptyset \subset S \end{array}$$

<u>Aufgaben zum weiteren Üben</u>

2.7 Es sind folgende Mengen gegeben: $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{1, 2, b\}$, wobei $a \neq 1, a \neq 2, a \neq b, b \neq 1, b \neq 2$ sind. Bestimmen Sie folgende Mengen (indem Sie alle ihre Elemente angeben):

a) $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$,

b) $M_1 \times M_2$, $M_2 \times M_1$,

c) $M_1 \setminus M_2$, $M_2 \setminus M_1$,

d) $\mathcal{P}(M_2)$.

2.8 Seien M_1, M_2, N Mengen. Weisen Sie nach, dass

$$(M_1 \cup M_2) \times N = (M_1 \times N) \cup (M_2 \times N).$$

Veranschaulichen Sie Ihren Beweis mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems.

Aufgabenblatt 3: Zahlen

3.1 Wir bezeichnen die Zahl $\frac{1}{3}$ durch $0,\overline{3}$ und die Zahl $\frac{2}{3}$ durch $0,\overline{6}$. Berechnen Sie $0,\overline{3} + 0,\overline{6}$!

3.2 Wir bezeichnen mit $a+\mathrm{i}b$ das Element (a, b) der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, und führen folgende Abkürzungen ein: $0 + \mathrm{i}b = \mathrm{i}b, a + \mathrm{i}0 = a, a + \mathrm{i}1 = a + \mathrm{i}, a + \mathrm{i}(-b) = a - \mathrm{i}b, \mathrm{i}b = b\mathrm{i}$.

a) Für $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ und $z_2 = -7,25 + \frac{3}{4}\mathrm{i}$ berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_2 + z_1$, $z_2 \cdot z_1$.

b) Berechnen Sie $\mathrm{i}^2, \mathrm{i}^3, \mathrm{i}^4, \mathrm{i}^5, \mathrm{i}^6$, wobei die Potenznotation benutzt ist (d.h. zum Beispiel $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}$).

c) Geben Sie ein Element z_3 der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $z_1+z_3 = 0$ und ein Element z_4 der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $z_1 \cdot z_4 = 1$ an !

d) Weisen Sie nach, dass die Multiplikation komplexer Zahlen kommutativ ist.

3.3 a) Beweisen Sie, dass keine natürliche Zahl x existieren kann mit $x+3 = 0$. Benutzen Sie nur die Rechenregeln für natürliche Zahlen und für die Relation $<$ "kleiner sein"!

b) Beweisen Sie, dass $\sqrt{2} < 2$! Diskutiere, was eigentlich $\sqrt{2}$ ist.

3.4 Konvertieren Sie die Zahlen in die gegebenen Stellenwertsysteme !

$$(1011,01)_2 \text{ in } (\dots)_{10} \qquad (174)_{10} \text{ in } (\dots)_2 \qquad (12B)_{16} \text{ in } (\dots)_{10}$$

(Die Ziffern im Stellenwertsystem zur Basis 16 sind $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.)

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

3.5 Berechnen Sie für $a = 3 - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ und $b = \frac{2}{3} + 2\mathrm{i}$ die Ausdrücke $(a + b)^2$ und $a^2 - b^2$.

3.6 Geben Sie die Additionstabelle und die Multiplikationstabelle für das Rechnen im Stellenwertsystem zur Basis 2 von 0 bis $(111)_2$ an. Markieren Sie den Teil der Tabelle, welcher der in der Grundschule gelernten Tafel der Addition bis $100 + 100$ bzw. Multiplikation bis $10 \cdot 10$ entspricht.

Aufgaben zum weiteren Üben

3.7 Veranschaulichen Sie die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < 1 \wedge |y| \leq 2x+1\}$ farbig in der Ebene ! Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr bzw. falsch sind:

$$(1,0) \in M \qquad (1,3) \in M \qquad \{(0,0)\} \subset M \qquad 1 \in M \qquad 1 \in M \cup \mathbb{N}\ .$$

3.8 Berechnen Sie

$$(5{+}4\mathrm{i}){+}(7{-}2\mathrm{i}), \quad (5,5{-}2,5\mathrm{i}){-}(7,25{-}2,5\mathrm{i}), \quad (2{+}3\mathrm{i}){\cdot}(3{-}2\mathrm{i}), \quad (6{+}3\mathrm{i}){\cdot}(6{-}3\mathrm{i})\ .$$

3.9 Veranschaulichen Sie die komplexe Zahl $z = a + ib$ als Punkt P mit Koordinaten (a,b) und als Vektor v mit Anfangspunkt $(0,0)$ und Endpunkt (a,b) in der Ebene für folgende komplexe Zahlen:

$$z_1 = 2 + 3\mathrm{i}, \quad z_2 = 2 - 3\mathrm{i}, \quad z_3 = -2 - 3\mathrm{i}, \quad z_4 = -2 + 3\mathrm{i}, \quad -z_1, \quad z_1 + z_2\ .$$

Welche Beziehung besteht zwischen der Addition von komplexen Zahlen und der Addition von Vektoren ?

Berechnen Sie jeweils die Länge des Vektors v. Welchen Satz haben Sie dabei benutzt ? Die Länge des Vektors v heißt **Betrag** der entsprechenden komplexen Zahl z und wird durch $|z|$ bezeichnet. Begründen Sie mithilfe der obigen geometrischen Überlegungen, dass für beliebige komplexe Zahlen z_1 und z_2 die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ gilt !

3.10 Folgende Zahlen sind in verschiedenen Zahlensystemen gegeben. Schreiben Sie jeweils die Zahl als gemeinen Bruch (d.h. als rationale Zahl) im dezimalen Zahlensystem auf !

$$(11,11)_2, \qquad (7,4)_{16}, \quad (23,1A)_{16}, \quad (123,555)_{10}\ .$$

3.11 Beweisen Sie, dass keine ganze Zahl x existieren kann mit der Eigenschaft $4 \cdot x = 1$! Benutzen Sie dabei nur die Rechenregeln der ganzen Zahlen und der Relation $<$ "kleiner sein"!

3.12 Formen Sie die Ausdrücke $(a+b)^3$, $(a+b)^7$ für reelle Zahlen a, b um ! Als Hilfsmittel schreiben Sie das Pascalsche Dreieck bis zur Zeile 8 auf.

3.13 Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für reelle Zahlen ! Untersuchen Sie dafür einzeln folgende vier Fälle: a und b beide nichtnegativ, a und b beide nichtpositiv, eine Zahl ist nichtnegativ und die andere nichtpositiv und die Summe negativ, eine Zahl ist nichtnegativ und die andere nichtpositiv und die Summe nichtnegativ.

3.14 Zeigen Sie, dass die Summe der natürlichen Zahlen kleiner oder gleich n stets $\frac{n(n+1)}{2}$ ist.

Aufgabenblatt 4: Relationen

4.1 Wir stellen die ganzen Zahlen in einer Reihe wie folgt auf:

$$1, 2, 3, \ldots, n, n + 1, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$$

und schreiben $x \lhd y$, wenn x nicht hinter y steht. Beweise, dass $\lhd$ eine Relation auf der Menge $\mathbb{Z}$ darstellt, aber keine Abbildung aus $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ darstellt ! Beweise, dass diese Relation eine Ordnungsrelation, aber keine Äquivalenzrelation ist !

4.2 Wir schreiben $x \sim y$, wenn die Zahlen x und y das gleiche Vorzeichen haben (wir einigen uns für diese Aufgabe, dass positive Zahlen das Vorzeichen + haben, negative Zahlen das Vorzeichen − haben und 0 das Vorzeichen $\emptyset$ hat).

a) Beweise, dass $\sim$ eine Relation auf der Menge $\mathbb{Z}$ darstellt, aber keine Abbildung aus $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ darstellt ! Beweise, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation, aber keine Ordnungsrelation ist !

b) Zeigen Sie, dass $\{(x, v) : x \in \mathbb{Z}, v \in \{+, -, \emptyset\}, x$ hat das Vorzeichen $v\}$ eine Relation zwischen $\mathbb{Z}$ und $\{+, -, \emptyset\}$ ist, und dass diese Relation eine Abbildung aus $\mathbb{Z}$ in $\{+, -, \emptyset\}$ ist. Untersuchen Sie, ob diese Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist !

4.3 Gegeben sind die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ von sechs verschiedenen Buchstaben und die Relation

$$R = \{(a, b), (a, e), (a, f), (b, b), (b, d), (c, d), (c, f), (d, f), (e, e)\} \subset M \times M \ .$$

Veranschaulichen Sie diese Relation als Tabelle und als Pfeildiagramm. Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation zwischen M und M, bzw. eine Abbildung aus M in M ist.

Geben Sie die inverse Relation R_{-1} an und veranschaulichen Sie diese als Tabelle und als Pfeildiagramm. Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation, Abbildung ?

4.4 Seien G die Menge aller Geraden in der Ebene und P die Menge aller Punkte in der Ebene. Entscheiden Sie, ob folgende Begriffe eine Relation darstellen, und untersuchen Sie, ob es sich um eine Ordnungsrelation, Äquivalenzrelation, Abbildung handelt.

"Der Punkt x liegt auf der Geraden g" zwischen P und G.

"Zwei Geraden sind parallel" zwischen G und G.

"Die Punkte A, B und $(0,0)$ liegen auf einer Gerade" zwischen P und P.
"Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander" zwischen G und G.
"Der Punkt x ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten A und B" zwischen $P \times P$ und P.

Schreiben Sie die Relation als Menge auf und benutzen Sie dabei mathematische Symbole !

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

4.5 Seien $M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ eine Menge und $R = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma)\}, S = \{(\beta, \delta), (\gamma, \alpha)\}$ Relationen auf M. Veranschaulichen Sie diese Relationen als Tabelle und als Pfeildiagramm. Untersuchen Sie, ob es Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen auf M bzw. Abbildungen aus M in M sind ?

Geben Sie die inversen Relationen R_{-1}, S_{-1} und die Kompositionen $R \circ S$, $S \circ R$, $R_{-1} \circ R$, $R_{-1} \circ S_{-1}$, $S_{-1} \circ R_{-1}$ an. Veranschaulichen Sie diese als Pfeildiagramm.

4.6 Schreiben Sie die Definition auf, dass "Q eine Äquivalenzrelation auf der Menge S ist" ! Geben Sie ein Beipiel an !

Aufgaben zum weiteren Üben

4.7 Schreiben Sie die Definition auf, dass "ϱ eine Abbildung von der Menge F in die Menge $\mathbb{Z}$ mit Definitionsbereich $D_\varrho = F$ ist" ! Geben Sie ein Beispiel an !

4.8 Untersuchen Sie, ob und was für eine Relation das Symbol $\subset$ mit der Bedeutung "Teilmenge sein" auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M darstellt. Geben Sie diese Relation für das Beispiel $M = \{\xi, \zeta\}$ (Buchstaben xi und zeta aus dem Griechischen Alphabet) an und veranschaulichen Sie es.

4.9 Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Welche Eigenschaften besitzen folgende Relationen ?

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (2,3), (1,3)\}$$
$$R_2 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}, \quad R_3 = M \times M$$

4.10 Es sei $\mathbb{N}_0$ die Menge aller natürlichen Zahlen und der 0. Wir definieren die Relation $R \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ durch:

$(n, m) \in R$ genau dann, wenn n und m durch 5 geteilt den gleichen Rest ergeben.

Begründen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}_0$ ist. Geben Sie die zugehörigen Äquivalenzklassen an. Wie viele sind es insgesamt ?

Diskutieren Sie den Fall, wenn 5 durch eine natürliche Zahl k ersetzt wird.

Aufgabenblatt 5: Abbildungen

5.1 Gegeben ist die Menge

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 5 \wedge y = x^2 - 2\} \ .$$

Prüfen Sie nach, dass R eine Relation auf $\mathbb{R}$ ist, und dass diese Relation eine Abbildung aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist. Veranschaulichen Sie R in der Ebene.

Geben Sie den Definitionsbereich, Wertebereich dieser Abbildung an. Entscheiden Sie, ob diese Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

Bestimmen Sie die inverse Relation R_{-1} und entscheiden Sie, ob R_{-1} eine Abbildung ist. Wenn ja, geben Sie ihren Definitionsbereich, Wertebereich an und entscheiden Sie, ob diese Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

Geben Sie die Mengen $R(A)$, $R_{-1}(B)$ für $A = [0, 5]$, $A = \{0, 5\}$, $B = [1, 2]$, $B = \{1, 2\}$ an und veranschaulichen Sie diese, zusammen mit R, in der Ebene.

Es ist üblich, die obige Abbildung als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2, x \in [-5, 5]$$

anzugeben, **Funktion** zu nennen, den Definitionsbereich mit D_f, den Wertebereich mit W_f zu bezeichnen und R selber **Graph der Funktion** f zu nennen.

5.2 Mit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto -x, x \in \mathbb{Z}$ ist eine Abbildung gegeben. Schreiben Sie diese als eine Relation R auf $\mathbb{Z}$ auf ! Untersuchen Sie, ob diese Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist. Geben Sie die Komposition $R \circ R$ und die Inverse R_{-1} an !

5.3 a) Durch $x \mapsto 2 \cdot x,\ x \in \mathbb{R}$ ist eine Abbildung aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Schreiben Sie diese als eine Relation auf ! Untersuchen Sie, ob die Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist. Begründen Sie, dass es sich um eine einstellige Operation auf der Menge $\mathbb{R}$ handelt.

b) Durch $(x, y) \mapsto x \cdot y, x, y \in \mathbb{R}$ ist eine Abbildung aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Schreiben Sie diese als eine Relation auf ! Untersuchen Sie, ob die Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist. Begründen Sie, dass es sich um eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathbb{R}$ handelt.

5.4 Sei M eine Menge, und durch $(A, B) \mapsto A \cap B,\ A, B \in \mathcal{P}(M)$, ist eine Abbildung aus $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ in $\mathcal{P}(M)$ gegeben. Begründen Sie, dass es sich um eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathcal{P}(M)$ handelt und dass diese Operation kommutativ ist !

<u>Hausaufgaben zum Abgeben</u> Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

5.5 Gegeben ist die Menge

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 5 \wedge y = x^2 - 2\} \; .$$

Beantworten Sie die gleichen Fragen wie in der Aufgabe 5.1.

5.6 Mit $x \mapsto \frac{1}{x}, x \in \mathbb{Q}$ mit $x \neq 0$, ist eine Abbildung aus $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ gegeben. Schreiben Sie diese als eine Relation R auf $\mathbb{Q}$ auf ! Untersuchen Sie, ob diese Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist. Geben Sie D_f und W_f an. Geben Sie die Komposition $R \circ R$ und die Inverse R_{-1} an ! Untersuchen Sie, ob diese zwei Relationen Abbildungen sind oder nicht.

<u>Aufgaben zum weiteren Üben</u>

5.7 Gegeben ist die Menge

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 5 \wedge y = x^3 - 2\} \; .$$

Beantworten Sie die gleichen Fragen wie in der Aufgabe 5.1.

5.8 Durch $(x, y) \mapsto x - y, x, y \in \mathbb{R}$ ist eine Abbildung aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Schreiben Sie diese als eine Relation auf ! Untersuchen Sie, ob die Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist. Begründen Sie, dass es sich um eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathbb{R}$ handelt. Zeigen Sie, dass diese Operation nicht kommutativ ist.

5.8 Durch $(x, y) \mapsto x \cdot y, x, y \in \mathbb{Q}$ ist eine Abbildung aus $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ gegeben. Schreiben Sie diese als eine Relation auf ! Untersuchen Sie, ob die Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv ist. Begründen Sie, dass es sich um eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathbb{R}$ handelt. Zeigen Sie, dass diese Operation kommutativ ist.

5.9 Sei M eine Menge, und durch $(A, B) \mapsto A \cup B$, $A, B \in \mathcal{P}(M)$ ist eine Abbildung aus $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ in $\mathcal{P}(M)$ gegeben. Begründen Sie, dass es sich um eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathcal{P}(M)$ handelt und dass diese Operation kommutativ ist !

5.10 Sei A eine Menge von Aussagen mit der Eigenschaft, dass $p, q \in A \Rightarrow p \wedge q \in A$ immer wahr ist. Durch $(p, q) \mapsto p \wedge q$, $p, q \in A$ ist eine Abbildung aus $A \times A$ in A gegeben. Begründen Sie, dass es sich um eine zweistellige Operation auf der Menge A handelt und dass diese Operation kommutativ ist !

5.11 Sei M eine Menge, und $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller Abbildungen aus M in M. Überprüfen Sie, dass die Komposition eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathcal{F}(M)$ darstellt !

Aufgabenblatt 6: Gruppen

6.1 Begründen Sie nur mit Benutzung der Axiome der reellen Zahlen, dass $\mathbb{R}$ mit $+$ eine kommutative Gruppe bildet. Begründen Sie, dass $\mathbb{C}$ mit $+$ eine kommutative Gruppe bildet und dass $\mathbb{N}$ mit $+$ keine Gruppe bildet.

6.2 Begründen Sie, dass $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ eine kommutative Gruppe bildet. Begründen Sie, dass $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ mit $\cdot$ auch eine kommutative Gruppe ist und dass $\mathbb{Q}$ mit $\cdot$ keine ist.

6.3 Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei durch $\mathbb{R}^3$ bezeichnet und werde **Raum** genannt. Wir betrachten folgende vier Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^3$: die Drehung um $180°$ um die y-Achse (wir nennen diese Abbildung D), die Spiegelung an der xz-Ebene (S), die Spiegelung am Punkt $(0,0,0)$ (C), und die identische Abbildung (I, $I(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}^3$). Bestimmen Sie die Kompositionen $D \circ D$, $S \circ S$, $C \circ C$, $D \circ S$, $S \circ D$, $D \circ C$, $C \circ D$, $S \circ C$, $C \circ S$, $I \circ I$, $I \circ D$, $I \circ S$, $I \circ C$, $D \circ I$, $S \circ I$ und $C \circ I$. Begründen Sie, dass die Menge $\mathcal{M} = \{D, S, C, I\}$ mit Komposition $\circ$ eine Gruppe ist, und fassen Sie die Rechenregeln für diese Gruppe in einer Tabelle zusammen!

6.4 Auf der Menge $\mathbb{Z}$ bildet "$=$ modulo 6" eine Äquivalenzrelation und bezeichne durch $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$ die entsprechenden Äquivalenzklassen, und die Menge $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$.

Wir definieren $\overline{i} \oplus \overline{j}$ als die Äquivalenzklasse des Elementen $i + j$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Geben Sie $\overline{3} \oplus \overline{3}$ an. Begründen Sie, dass $\oplus$ eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathbb{Z}_6$ ist. Fassen Sie die Rechenregeln in einer Tabelle zusammen. Geben Sie das neutrale Element und zu jedem Element sein Inverses an. Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}_6$ mit $\oplus$ eine kommutative Gruppe bildet.

Diskutieren Sie den allgemeinen Fall $\mathbb{Z}_n$ für eine natürliche Zahl n größer als 1.

Auf der Menge $\mathbb{Z}_6$ betrachten wir ähnlich eine Operation Multiplikation $\odot$. Begründen Sie, dass diese eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathbb{Z}_6$ ist. Fassen Sie die Rechenregeln in einer Tabelle zusammen. Gibt es ein neutrales Element bezüglich der Operation $\odot$? Wenn ja, listen Sie alle Elemente auf, die kein Inverses haben, und geben Sie zu jedem anderen Element sein Inverses an. Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}_6 \setminus \{\overline{0}\}$ mit $\odot$ keine Gruppe ist.

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

6.5 Begründen Sie, dass die Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $+$ eine kommutative Gruppe bildet.

Begründen Sie, dass auf der Menge $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x_1 \wedge 0 \leq x_2\}$ die Addition $+$ eine zweistellige Operation ist, sie jedoch keine Gruppe bilden. Skizzieren Sie die Menge M in einem kartesischen Koordinatensystem und veranschaulichen Sie diese Addition.

6.6 Gegeben ist die Menge $M = \{1, 2, 3\}$. Geben Sie alle bijektiven Abbildungen von M auf M an, zum Beispiel mithilfe von Pfeildiagrammen, und benennen Sie jede mit einem Buchstaben. Wieviele sind es insgesamt? Bestimmen Sie die Komposition je zwei solcher Abbildungen, in beiden Reihenfolgen.

Sei S_3 die Menge aller bijektiven Abbildungen von M auf M. Fassen Sie die Resultate für die Rechenregeln für $\circ$ in einer Tabelle zusammen. Begründen Sie, dass die Menge S_3 mit Komposition $\circ$ eine Gruppe bildet, wobei die Assoziativität nur an zwei unten angegebenen Fällen nachzuprüfen ist.

Geben Sie das neutrale Element der Gruppe S_3 mit $\circ$ an! Geben Sie das inverse Element von R_1 in dieser Gruppe an, wobei R_1 als Relation folgenderweise gegeben ist: $R_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$. Geben Sie $R_1 \circ R_2$ und $R_2 \circ R_1$ an, wobei $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Prüfen Sie nach, dass $R_1 \circ (R_1 \circ R_2) = (R_1 \circ R_1) \circ R_2$ und dass $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$, wobei $R_3 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$. Markieren Sie die Elemente R_1, R_2, R_3 und die Resultate $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$ in Ihrer Tabelle !

Aufgaben zum weiteren Üben

6.7 Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ mit $+$ jeweils eine kommutative Gruppe bilden, und dass $\mathbb{N}_0$ mit $+$ keine Gruppe ist.

6.8 Sei $a \in \mathbb{R}$. Gegeben ist folgende Relation $F_a \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $(x, y) \in F_a$ genau dann, wenn $y = a \cdot x$.

Begründen Sie, dass F_5 und F_3 bijektive Abbildungen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ sind. Berechnen Sie die Komposition $F_5 \circ F_3$.

Sei M die Menge aller F_a von oben, d.h. $M = \{F_a : a \in \mathbb{R}\}$. Begründen Sie, dass die Komposition $\circ$ eine binäre Operation auf der Menge $M \setminus \{F_0\}$ ist. Beweisen Sie, dass die Menge $M \setminus \{F_0\}$ mit $\circ$ eine Gruppe bildet. Warum bildet die Menge M mit $\circ$ keine Gruppe?

6.9 Untersuchen Sie die Operation Multiplikation auf der Menge $\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}$ und weisen Sie nach, dass sie eine kommutative Gruppe bilden.

Recherchieren Sie für den allgemeinen Fall $\mathbb{Z}_n \setminus \{\overline{0}\}$, wenn n eine Primzahl ist und wenn n nicht eine Primzahl ist!

Aufgabenblatt 7: Matrizen

7.1 Für die gegebenen Matrizen A, B berechnen Sie $A+B$, geben Sie die Matrix C mit der Eigenschaft $A+C=O$ an (hier ist O die Nullmatrix, das heißt mit der Zahl 0 an jeder Stelle), und geben Sie die Matrix D mit der Eigenschaft $A+D=B$ an !

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

7.2 Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A$, $(A \cdot A) \cdot B$, $A \cdot (A \cdot B)$, $A \cdot (B \cdot A)$ für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

7.3 Für die Matrizen A, B aus der Aufgabe 7.2. geben Sie die Matrix C mit der Eigenschaft $A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, eine Matrix D_1 mit der Eigenschaft $D_1 \cdot A = B$ und eine Matrix D_2 mit der Eigenschaft $A \cdot D_2 = B$ an !

7.4 Berechnen Sie folgende Produkte

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A, \quad B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot B,$$

wobei A die Matrix aus der Aufgabe 7.2, B die Matrix aus der Aufgabe 7.1 b) sind und $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

7.5 Berechnen Sie die Produkte $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$ und $B \cdot C$ für die Matrizen ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

7.6 Wir betrachten 2×2-Matrizen spezieller Form. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Unter der Annahme, dass $(a, b) \neq (0, 0)$ ist, prüfen Sie nach, dass $A \cdot C = E$ und $C \cdot A = E$ gelten, wobei

$$C = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgaben zum weiteren Üben

7.7 Wir betrachten die Menge aller Matrizen der Form aus der Aufgabe 7.6, das heißt

$$M = \left\{ A : \exists x \in \mathbb{R} \wedge \exists y \in \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right\} .$$

Wir betrachten die Addition $+$ auf dieser Menge. Prüfen Sie nach, dass M mit $+$ eine kommutative Gruppe bildet!

7.8 Berechnen Sie folgende Produkte $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

7.9 Betrachte folgende Abbildungen der Ebene: Spiegelung an der x-Achse (s), Spiegelung am Punkt $(0, 0)$ (p). Geben Sie Matrizen S und P an, für welche die Abbildungen s, p folgenderweise aufgeschrieben werden können: $s((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot S$, $\quad p((x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot P$, wobei wir die Matrix $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ mit dem Punkt (y_1, y_2) der Ebene identifizieren.

7.10 In $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z}_3)$ lösen Sie folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

7.11 Gegeben sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z}_3)$. Untersuchen Sie, ob diese Matrizen eine Inverse bezüglich der Multiplikation haben und falls ja, geben Sie diese an!

Aufgabenblatt 8: Körper, Vektorraum

8.1 Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) : \exists x \in \mathbb{R} \wedge \exists y \in \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right\} .$$

Wir betrachten Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf dieser Menge und wir werden zusammenfassen, dass M mit $+$ und $\cdot$ ein Körper bildet. Geben Sie das Nullelement und das Einselement an! Geben Sie zu jedem Element die Inverse bezüglich $+$, und zu jedem Element, welches verschieden vom Nullelement ist, die Inverse bezüglich $\cdot$ an! Prüfen Sie die Distributivität nach! Gibt es $X \in M$ mit der Eigenschaft $X \cdot X = -E$ ($-E$ ist die Inverse des Einselementes E bezüglich $+$), also eine "Wurzel von minus eins" ?

8.2 Gegeben sei die Menge $\mathbb{R}^6$ mit Addition von zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^6$ und mit Multiplikation eines Vektors $a \in \mathbb{R}^6$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$a + b = (a_1, \ldots, a_6) + (b_1, \ldots, b_6) = (a_1 + b_1, \ldots, a_6 + b_6),$$

$$\lambda \cdot a = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_6).$$

Berechnen Sie für $a = (1.5, -2, -1.5, 2, 4, -4)$, $b = (3, 1, 2, -2, 1, -1)$ und $c = (-1, -0.5, -1.5, 2, -1, -2)$ folgende Vektoren:

$$a + b, \quad -a, \quad a - b \text{ (d.h. } a + (-b)), \quad 2a + b + c \; .$$

Ähnlich betrachten wir den Vektorraum $\mathbb{Z}_3^6$ über $\mathbb{Z}_3$ mit Addition von zwei Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{Z}_3$. Berechnen Sie die oben geschriebene Ausdrücke für $a = (0, 0, 2, 2, 1, 1)$, $b = (0, 1, 0, 2, 0, 0)$, $c = (0, 2, 2, 0, 1, 1)$. Sind a, b, c linear unabhängig ?

8.3 Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über den Körper $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die jeweils gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind, begründen Sie Ihre Aussagen!

$(3, 5)$ und $(1.5, 2.5)$; $\quad (3, 5)$ und $(1.5, -2.5)$; $\quad (3, 5)$ und $(-3, -5)$;
$(3, -5)$ und $(1.5, -2.5)$; $\quad (2, 2),\ (2, -2),\ (10, 2)$; $\quad (3, 5),$ und $(0, 0)$.

Gleiche Frage für den Vektorraum $\mathbb{Z}_5^2$ über $\mathbb{Z}_5$ und Vektoren

$(2, 3)$ und $(3, 2)$, $\qquad (1, 1)$ und $(3, 3)$, $\qquad (0, 0)$ und $(1, 1)$.

8.4 Geben Sie jeweils eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ über den Körper $\mathbb{R}$ an, die den gegebenen Vektor (bzw. die gegebenen Vektoren) enthält:

$$e_1 = (1,0,0); \quad (-1,0,0); \quad (1,0,0) \text{ und } (1,1,0); \quad (1,2,3).$$

Geben Sie die Darstellung (Linearkombination) des Vektors $v = (2,3,-1)$ jeweils bezüglich der angegebenen Basis an!

<u>Hausaufgaben zum Abgeben</u> Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

8.5 Betrachten wir den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über den Körper $\mathbb{R}$. Geben Sie die Darstellung (Linearkombination) des gegebenen Vektors bezüglich der gegebenen Basis an und veranschaulichen Sie alle Vektoren der Aufgabe (also auch die Vektoren, die die Basis bilden) im kartesischen Koordinatensystem:

a) Vektor $(6,1)$, Basis $\{(1,0),(0,1)\}$;

b) Vektor $(-6,1)$, Basis $\{(1,0),(0,1)\}$;

c) Vektor $(0,1)$, Basis $\{(\sqrt{2},\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$;

d) Vektor $(6,1)$, Basis $\{(\sqrt{2},\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$!

8.6 $\mathbb{Z}_3$ sei die Menge der Restklassen der ganzen Zahlen bei Division durch 3, schreibe $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$. Untersuchen Sie die Vektoren $(2,1),(1,2)$ als Elemente des Vektorraumes $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ über den Körper $\mathbb{Z}_3$ auf lineare Abhängigkeit!

<u>Aufgaben zum weiteren Üben</u>

8.7 Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ über dem Körper $\mathbb{Z}_3$. Wieviele Elemente hat dieser Vektorraum? Prüfen Sie nach, dass die Elemente $(1,0)$, $(0,1)$ linear unabhängig sind und eine Basis bilden. Geben Sie die Darstellung (Linearkombination) des Vektors $v_1 = (2,1)$ bezüglich dieser Basis an. Geben Sie eine Basis an, welche den Vektor v_1 enthält! Geben Sie die Darstellung (Linearkombination) des Vektors $(1,0)$ in dieser neuen Basis an!

8.8 Für die Vektoren $a,b,c \in \mathbb{R}^6$ aus Aufgabe 8.2 berechnen Sie

$$b+c, \quad (a+b)+c, \quad -(b+c), \quad 2a, \quad (-3)b, \quad -3b, \quad (-2)(b+c), \quad a-(b+c), \quad b-a\,.$$

8.9 Für die Vektoren $a,b,c \in \mathbb{Z}_3^6$ aus Aufgabe 8.2 berechnen Sie

$$b+c, \quad (a+b)+c, \quad -(b+c), \quad 2a, \quad -2a, \quad -2(b+c), \quad a-(b+c), \quad b-a\,.$$

Aufgabenblatt 9: Lineare Gleichungssysteme

9.1 Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem a) mit Hilfe von Matrizen und Matrizenmultiplikation um, und lösen Sie es mit dem Gauß'schen Verfahren! Schreiben Sie die Gleichung mit Matrizen b) als lineares Gleichungssystem um, und lösen Sie es mit dem Gauß'schen Verfahren!

a)
$$\begin{aligned} 4x - 2y + 4z &= 3 \\ 2x - 4y + 3z &= 3 \\ 3x - y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

9.2 Das Gleichungssystem a) für unbekannte reelle Zahlen x, y, z, bzw. b) für x, y, z, u, v sind gegeben. Schreiben Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit Matrizen um! Geben Sie das zugehörige homogene Gleichungssystem an! Untersuchen Sie die Lösbarkeit des homogenen bzw. inhomogenen Systems mit Hilfe des Gaußschen-Algorithmus! Geben Sie die Lösungsmenge des homogenen Systems an, eine Basis dieses Vektorraumes und die Dimension! Geben Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems an!

a)
$$\begin{aligned} 2x - 4y + 5z &= 2 \\ 7x - 14y - 8z &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} u + v - x &= -2 \\ 2u + y - z &= 5 \\ u - 2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

9.3 Lösen Sie folgende Gleichungssysteme für die Unbekannten x, y, z in dem Körper $\mathbb{Z}_3$ mit dem Gauß'schen Verfahren! Beantworten Sie die Fragen aus der Aufgabe 9.2!

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

9.4 Diskutieren Sie folgende Gleichungssysteme für unbekannte reelle Zahlen x, y, z jeweils für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an! Beantworten Sie insbesondere folgende Fragen: Gibt es eine einzige Lösung? Gibt es keine Lösung? Gibt es mehrere Lösungen?

$$\begin{aligned} \lambda x - y + z &= 0 \\ x - \lambda y + z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda x - y + z &= -1 \\ x - \lambda y + z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag nach den Ferien !

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} x+5y+2z &= 3 \\ 2x-2y+4z &= 5 \\ x+y+2z &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} 2x+y+z &= 0 \\ y+z &= 1 \\ x+2y+2z &= 0 \end{aligned}$$

9.5 Bearbeiten Sie das lineare Gleichungssystem a) für die unbekannten reelle Zahlen x, y, z laut Fragen aus der Aufgabe 9.2 !

9.6 Bearbeiten Sie das lineare Gleichungssystem b) in dem Körper $\mathbb{Z}_3$ für die Unbekannten $x, y, z \in \mathbb{Z}_3$ laut Fragen aus der Aufgabe 9.2 !

Aufgaben zum weiteren Üben

9.7 Bearbeiten Sie folgende lineare Gleichungssysteme wie in der Aufgabe 9.2 für die Unbekannten x, y, z bzw. x, y jeweils

$$\text{a) in } \mathbb{R}: \quad \begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ 3x+2y+z &= 10 \\ 2x+3y+4z &= 20 \end{aligned} \qquad \text{b) in } \mathbb{Z}_5: \quad \begin{aligned} y+z &= 0 \\ 3x+z &= 1 \\ 2x+3y &= 2 \end{aligned} \qquad \text{c) in } \mathbb{C}: \quad \begin{aligned} ix+y &= 1 \\ 2x+(2-i)y &= 3 \end{aligned}$$

Zusatz: lösen Sie das Gleichungssystem eventuell mit einer anderen Methode und vergleichen Sie die einzelne Schritte!

9.8 Bearbeiten Sie folgende lineare Gleichungssysteme für die unbekannten reelle Zahlen x, y, z laut Fragen aus der Aufgabe 9.2:

$$\begin{aligned} x-2y+4z &= 3 \\ 2x-4y+3z &= 1 \\ 3x-y+5z &= 2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} x+5y+2z &= 3 \\ 2x-2y+4z &= 5 \\ x+y+2z &= 1 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} 7x-y+5z &= 1 \\ x+3y-z &= 7 \\ 15x+y+9z &= 9 \end{aligned} \quad .$$

9.9 Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und den Parameter $b = 1$ bzw. $b = -3$. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an!

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= b \end{aligned}$$

9.10 Diskutieren Sie die Gleichungssysteme in der Aufgabe 9.4 jeweils für die Werte des Parameters $\lambda = -1$ bzw. $\lambda = 0$. Geben Sie jeweils die Lösungsmengen an!

Aufgabenblatt 10: Polynome

10.1 Wir betrachten den Ring Pol($\mathbb{R}$) und seine Elemente p_1, p_2, p_3, gegeben durch $p_1(x) = -x^2 + 3x + 2$, $p_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $p_3(x) = \sqrt{3}$. Berechnen Sie $p_1 + p_2$, $p_1 + p_3$, $p_1 \cdot p_2$ und $p_1 \cdot p_3$! Geben Sie das neutrale Element bezüglich +, und die Inverse zu p_1 bezüglich + an ! Entscheiden Sie, ob es ein neutrales Element bezüglich $\cdot$ gibt und falls ja, ob es Inverse zu p_1 und zu p_3 bezüglich $\cdot$ gibt, geben Sie diese an !

Wenn $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ mit $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und $a_n \neq 0$ gegeben ist, heißt $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ der **Grad von** p. Wir sagen ausserdem, dass der Grad von $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, wobei $p(x) = 0$, gleich 0 ist. Bestimmen Sie den Grad von p_1, p_2, p_3, $p_1 + p_2$, $p_1 \cdot p_2$ und geben Sie ein Polynom vom Grad 100 an !

Division mit Rest von p **durch** q bedeutet, dass wir Polynome s und r (r heißt **Rest**) bestimmen, so dass der Grad von r kleiner als der Grad von q ist und es gilt

$$p = s \cdot q + r \ .$$

Dividieren Sie mit Rest das Polynom p_1 durch p_2, p_2 durch p_1, und p_3 durch p_1! Dividieren Sie mit Rest das Polynom p_4 durch p_5, wobei $p_4(x) = x^4 - 3x^3 + 3x - 1$, $p_5(x) = x^2 + 2x - 3$.

10.2 Wir können jedes Element $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ als eine Abbildung aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$, mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ sehen. Die Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt eine **(reelle) Nullstelle von** p, wenn $p(x_0) = 0$. Bestimmen Sie die Nullstellen der Polynome p_4 bzw. p_5 aus der Aufgabe 9.1 und schreiben Sie diese Polynome jeweils als Produkt von Polynomen 1. Grades, und Polynomen 2. Grades, welche keine reelle Nullstelle besitzen, auf! Hinweise: Wenn die Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p ist, dividieren Sie (mit Rest) das Polynom p durch das Polynom p_a, wobei $p_a(x) = x - a$. Es sei vermutet, dass 1 eine Nullstelle von p_4 ist.

10.3 Wir betrachten den Vektorraum Pol($\mathbb{R}$) über $\mathbb{R}$, und seine Teilmenge

$$\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) = \{p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) : \text{ Grad von } p \text{ ist kleiner oder gleich } 2\} \ .$$

Prüfen Sie nach, dass $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist und geben Sie den Nullvektor an! Wir betrachten die Elemente $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ gegeben durch $v_0(x) = 1$, $v_1(x) = x$, $v_2(x) = x^2$, $v_3(x) = x^2 + 2x$. Prüfen Sie nach, dass v_0, v_1, v_2 linear unabhängig, v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind! Beweisen Sie, dass $\{v_0, v_1, v_2\}$ eine Basis von dem Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ ist! Geben Sie die Darstellung (Linearkombination) von v_3 in dieser Basis an!

10.4 Wir betrachten jetzt **Polynome mit Koeffizienten aus dem Körper** $\mathbb{Z}_2$, das heißt die Menge Pol($\mathbb{Z}_2$), wobei Addition von zwei Polynomen, Multiplikation von zwei Polynomen und Multiplikation eines Polynomes mit einem

Skalar aus $\mathbb{Z}_2$ ähnlich wie bei Polynomen mit reellen Koeffizienten definiert sind, nun sind die Koeffizienten $a_n, \ldots, a_1, a_0$ Elemente des Körpers $\mathbb{Z}_2$ und wir rechnen mit den Rechenregeln für den Körper $\mathbb{Z}_2$.

Berechnen Sie $p + q$, $p \cdot q$, $2p$, Division mit Rest von p durch q für die Polynome $p(x) = x^3 + x^2 + 1$, $q(x) = x^2 + x + 1$. Untersuchen Sie, ob die Polynome p bzw. q Nullstellen in $\mathbb{Z}_2$ haben !

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

10.5 Wir betrachten im Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ die Vektoren (Polynome) $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = x$, $h_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Überprüfen Sie, dass diese linear unabhängig sind! Geben Sie die Darstellung (Linearkombination) von $p(x) = x^2 + 2x + 1$ in dieser Basis an!

10.6 Dividieren Sie mit Rest das Polynom p_1 durch p_2, p_1 durch p_3 und p_2 durch p_3 für die Polynome $p_1, p_2, p_3 \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, wobei $p_1(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 1$, $p_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, $p_3(x) = x^2 + 1$. Bestimmen Sie alle reelle Nullstellen von p_2, wobei vermutet wird, dass 1 eine Nullstelle ist. Schreiben Sie das Polynom p_2 als Produkt von Polynomen 1. Grades, und von Polynomen 2. Grades, welche keine reelle Nullstelle besitzen, auf!

Aufgaben zum weiteren Üben

10.7 Bestimmen Sie alle reelle Nullstellen von den Polynomen $p, q \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, wobei $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $q(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 8$, und es wird vermutet, dass -1 jeweils eine Nullstelle ist. Schreiben Sie beide Polynome als Produkt von Polynomen 1. Grades, und von Polynomen 2. Grades, welche keine reelle Nullstelle besitzen, auf!

10.8 Wir betrachten Polynome mit komplexen Koeffizienten, also die Menge $\mathrm{Pol}(\mathbb{C})$, und ihre Elemente $p_1(x) = ix^2 - i, p_2(x) = x^2 - i, p_3(x) = x^2 + 1$. Berechnen Sie $p_1 + p_2, p_1 \cdot p_2, ip_1$ und bestimmen Sie die komplexen Nullstellen von p_1 bzw. p_3!

10.9 Wir betrachten im Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ die Vektoren h_0, h_1, h_2 aus der Aufgabe 10.5, und die Vektoren v_0, v_1, v_2 aus der Aufgabe 10.3. Schreiben Sie jeweils die Vektoren h_0, h_1, h_2 als Linearkombination von v_0, v_1, v_2, und jeweils die Vektoren v_0, v_1, v_2 als Linearkombination von h_0, h_1, h_2 auf!

10.10 Bestimmen Sie alle reelle Nullstellen von dem Polynom $p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$, dabei sei vermutet, dass -1 eine Nullstelle ist. Schreiben Sie das Polynom als Produkt von Polynomen 1. Grades auf!

Aufgabenblatt 11: Lineare Abbildungen

11.1 Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche folgenderweise gegeben ist: der Punkt (Vektor) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bildet sich auf den Punkt (Vektor) $\begin{pmatrix} r\cos(\alpha+30°) \\ r\sin(\alpha+30°) \end{pmatrix}$ ab (Drehung um 30° um den Ursprung gegen der Uhrzeigersinne). Geben Sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$ an, für welche f folgende Form hat: $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$! Beweisen Sie, dass f eine lineare Abbildung aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ in den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ ist!

Beweisen Sie:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

und interpretieren Sie das Ergebnis für die Komposition von Drehungen um Winkel α bzw. β !

11.2 Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Mat}(1\times 3, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$, den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ und die Abbildung $f(\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}) = ax^2 + bx^2 + c$, $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(1\times 3, \mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass f eine bijektive lineare Abbildung ist! Geben Sie f_{-1} an!

11.3 Gesucht ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Beweisen Sie, dass es genau eine Abbildung f mit diesen Eigenschaften gibt und geben Sie diese an! Bestimmen Sie die Matrix $\mathrm{Mat}(2\times 3, \mathbb{R})$ derart, dass f die Gestalt $f(u) = A \cdot u, u \in \mathbb{R}^3$, hat! Berechnen Sie Ker_f, Im_f und geben Sie jeweils eine Basis an! Bestimmen Sie die Fixpunktmenge der f !

11.4 Sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

gegeben. Beweisen Sie, dass f nicht linear ist! Berechnen Sie $f_{-1}(\{0\})$ und veranschaulichen Sie diese Menge im Euklidischen Koordinatensystem! Weisen Sie nach, dass diese Menge als Teilmenge der Ebene und mit der Struktur des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ kein Vektorraum ist!

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

11.5 Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche die Spiegelung an der xy-Ebene beschreibt. Geben Sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ an, damit $f(x) = A \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}^3$, die Menge von Spaltenvektoren, ist! Beweisen Sie, dass f linear ist und geben Sie Ker_f und Im_f an, veranschaulichen Sie diese Mengen in Euklidischen Koordinatensystem!

11.6 Gesucht ist eine lineare Abbildung $f : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $f(h_0) = 1, f(h_1) = x, f(h_2) = x^2$, wobei h_i in der Aufgabe 10.5 gegeben sind (**Hermite Polynome**). Begründen Sie, dass genau eine Abbildung mit diesen Eigenschaften existiert und geben Sie $f(x^2 + 2x + 1)$ an! Bestimmen Sie Im_f und geben Sie eine Basis von diesem Vektorraum an! Begründen Sie, dass f injektiv ist!

Aufgaben zum weiteren Üben

11.7 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, (eine **Scherung**). Begründen Sie, dass f linear ist und veranschaulichen Sie die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie ihre Bilder $f(e_1), f(e_2)$ im Euklidischen Koordinatensystem !

11.8 Gesucht ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft $f(e_1) = 2e_1, f(e_2) = 3e_2$. Geben Sie die Matrix A so an, dass $f(u) = A \cdot u$ für $u \in \mathbb{R}^2$ gilt! Veranschaulichen Sie die Vektoran e_1, e_2 sowie ihre Bilder im Euklidischen Koordinatensystem! (e_1, e_2 sind wie in der Aufgabe 11.8; f ist eine **Skalierung**.)

11.9 Das Rechteck R mit Eckpunkten $(2,1), (-2,1), (-2,-1), (2,-1)$ in der Ebene ist gegeben. Wir betrachten folgende Abbildungen aus $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: d_α die Drehung im Punkt $(0,0)$ um Winkel α gegen den Uhrzeigersinn, für $\alpha \in [0, 2\pi)$, s_β die Spiegelung an der Gerade, die durch $(0,0)$ geht und mit der positiven x-Achse einen Winkel β einschließt, für $\beta \in [0, \pi)$. Listen Sie diejenige von den oberen Abbildungen f auf, für welche $f(R) = R$ gilt! Geben Sie jeweils eine Matrix A derart an, dass $f(u) = A \cdot u$ gilt!

Die Menge, welche diese Abbildungen f enthält, sei durch $Sym(R)$ bezeichnet. Bestimmen Sie für $f, g \in Sym(R)$ jeweils die Komposition $f \circ g$ und fassen Sie die Rechenregeln in einer Tabelle zusammen! Begründen Sie, dass $Sym(R)$ mit $\circ$ eine Gruppe bildet, sie heißt die **Symmetriegruppe** des Rechteckes R.

Aufgabenblatt 12: Lineare Abbildungen und Matrizen, Wiederholung

12.1 Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$, seine Basen $B_S = \{1, x, x^2\}$ (Standardbasis) und $B_H = \{h_0, h_1, h_2\}$, h_0, h_1, h_2 aus der Aufgabe 10.5, und die Identitätsabbildung $i(p) = p$ für $p \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$. Geben Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung i bezüglich der Basen B_S und B_H (bzw. B_H und B_H, B_H und B_S, B_S und B_S) an!

Die Abbildung f aus der Aufgabe 11.6 betrachten wir als eine Abbildung $f : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$. Geben Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung f bezüglich der Basen B_S und B_H (bzw. B_H und B_H, B_H und B_S, B_S und B_S) an!

12.2 Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ und die Vektoren $h_1 = \begin{pmatrix}\frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14\end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix}\frac14 & \frac14 & -\frac14 & -\frac14\end{pmatrix}$, $h_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & 0\end{pmatrix}$, $h_4 = \begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$. Überprüfen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden (**Haar-Basis**, H)! Geben Sie die Darstellung des Vektors $x = \begin{pmatrix}1,3 & 1,1 & 2,9 & 3,4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ als Linearkombination der $h_1, \ldots, h_4$ an, d.h. bestimmen Sie die reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ mit $x = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3 + \lambda_4 h_4$! Veranschaulichen Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}$ sowie seine 1. Approximation $\lambda_1 h_1$, 2. Approximation $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$, und 3. Approximation $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3$ in der Basis H als Balkendiagramm (auf die x-Achse $1, 2, 3, 4$ und auf die y-Achse x_1, x_2, x_3, x_4 eintragen).

Veranschaulichen Sie die Approximationen von x in der Standardbasis, d.h. die 1. Approximation $\begin{pmatrix}1,3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, die 2. Approximation $\begin{pmatrix}1,3 & 1,1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, die 3. Approximation $\begin{pmatrix}1,3 & 1,1 & 2,9 & 0\end{pmatrix}$ und den Vektor x selbst als Balkendiagramm. (Die Haar-Basis eignet sich besser für Datenkompression.)

12.3 Wir betrachten folgende vier Abbildungen des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$: Drehung um 180° um die y-Achse (D), Spiegelung an der xz-Ebene (S), Spiegelung am Punkt 0 (C), Identität (I). Überprüfen Sie, dass D, S, C, I lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ sind und geben Sie ihre Abbildungsmatrizen bezüglich den Standardbasen an!

Prüfen Sie nach, dass die Menge $\mathcal{M} = \{D, S, C, I\}$ mit Komposition $\circ$ eine Gruppe ist, indem Sie die Tabelle für diese zweistellige Operation auf der Menge $\mathcal{M}$ angeben und analysieren! (Diese Gruppe kommt im monoklinen Krystallsystem vor.)

12.4 Wir betrachten die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_1(x+\mathrm{i}y) = 2x+3y+\mathrm{i}(-3x+2y), \quad f_2(x+\mathrm{i}y) = 2x+3y+\mathrm{i}(2y), \quad x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}\,.$$

Betrachten wir die Menge $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass f_1 eine lineare Abbildung ist und dass f_2 keine lineare Abbildung ist !

Betrachten wir die Menge $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f_1 und f_2 lineare Abbildungen sind!

Betrachten wir jetzt die Abbildungen $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (Spaltenvektoren), welche die Abbildungsmatrizen A_1, A_2 bezüglich der Standardbasen haben, wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Begründen Sie, dass g_1 und g_2 lineare Abbildungen des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ sind und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen f_1 und g_1 fest!

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

12.5 Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}} & \frac{x_3+x_4}{\sqrt{2}} & \frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}} & \frac{x_3-x_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^4$ und den Vektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$. Geben Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung f jeweils bezüglich der Basen B_S (Standardbasis) und B_S, H (Haar-Basis) und H, an!

12.6 Die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x + \mathrm{i}y) = 2x + 3y + \mathrm{i}(-3x), \quad x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, wird untersucht. Ist f eine lineare Abbildung, wenn wir die Menge $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ betrachten? Und wenn wir $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachten? Geben Sie die Abbildungsmatrix (bezüglich Standardbasen) einer Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, für welche $f = j_{-1} \circ g \circ j$, mit $j : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $j(x + \mathrm{i}y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, gilt.

Aufgaben zum weiteren Üben

12.7 Sei f die Abbildung aus der Aufgabe 12.1. Prüfen Sie nach, dass f bijektiv ist! Begründen Sie, dass die Inverse Abbildung f_{-1} und die Komposition $f \circ f$ lineare Abbildungen sind und geben Sie die entsprechenden Abbildungsmatrizen bezüglich der Standardbasen an!

12.8 Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ aus der Aufgabe 12.5. Geben Sie ihre Abbildungsmatrix bezüglich der Basen B_H und B_S an! Begründen Sie, dass f eine bijektive Abbildung ist! (Sie heißt Transformation eines Signals und ist im JPEG Bildkompressions-Algorithmus verwendet.) Geben Sie Abbildungsmatrix der f_{-1} bezüglich der B_S und B_H an!

Aufgabenblatt 13: Vektorraum mit Skalarprodukt

13.1 Betrachten wir den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ und folgende drei Abbildungen, jeweils mit Definitionsbereech $\mathbb{R}^2$, $f_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 4x_1x_2 + 9y_1y_2$, $f_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$, $f_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 4y_1y_2$. Beweisen Sie, dass f_1 ein Skalarprodukt ist und f_2 nicht! Begründen Sie, dass f_3 ein Skalarprodukt ist, schreiben Sie f_3 mit Hilfe einer 2×2-Matrix um!

Wir betrachten die Vektoren $v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)$. Berechnen Sie die Skalarprodukte $f_1(v_1, v_2)$ bzw. $f_3(v_1, v_2)$! Berechnen Sie die Länge dieser Vektoren bezüglich f_3 (bzw. f_1)! Berechnen Sie den Abstand zwischen v_1 und v_2 bezüglich f_3 (bzw. f_1)!

13.2 Die Vektoren $v = (1, 1)$ und $w = (-1, 3)$ in $\mathbb{R}^2$ sind gegeben, und der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist mit dem Euklidischen Skalarprodukt, $f(((x_1, y_1), (x_2, y_2))) = x_1x_2 + y_1y_2$, ausgestattet. Geben Sie die Orthogonalprojektion von v auf $Lin\{w\}$ und die Orthogonalprojektion von w auf $Lin\{v\}$ an! Geben Sie weiter die Orthogonalzerlegung von v entlang $Lin\{w\}$ und die Orthogonalzerlegung von w entlang $Lin\{v\}$ an! Skizzieren Sie alle Vektoren (also auch die Orthogonalprojektionen und beide Terme der Orthogonalzerlegungen) im Euklidischen Koordinatensystem auf einem karrierten Blatt!

13.3 Gegeben sind drei Punkte $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Entscheiden Sie, welche zwei von den Vektoren $B - A$, $C - A$ und $B - C$ bezüglich des Skalarproduktes f_3 aus der Aufgabe 13.1 orthogonal sind und welche nicht!

Skizzieren Sie das Dreieck mit diesen Eckpunkten auf einem karrierten Blatt! Da dieses Dreieck ein rechteckiges Dreieck (markieren Sie den rechten Winkel!) bezüglich des Skalarproduktes f_3 ist, gilt für es der Satz von Pythagoras. Formulieren Sie seine Aussage für dieses Dreieck, und überprüfen Sie diese Aussage mit Rechnungen !

Berechnen Sie bezüglich f_3 die Längen der Seiten, und $\sqrt{dist(A, B)^2 + dist(B, C)^2}$! Schlussfolgern Sie, dass die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, -2)$ bezüglich f_3 nicht senkrecht sind !

13.4 Entscheiden Sie, ob folgende Vektoren in dem gegebenen Vektorraum über $\mathbb{R}$ parallel sind oder nicht:

$(1, 0, 0), (0, 1, 0)$; $(1, 1), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, bzw. $(0, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $\mathbb{R}^2$;

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$; bzw. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

Hausaufgaben zum Abgeben Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag in einer Woche !

13.5 Skizzieren Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (0,0), B = (1,0), C = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ auf einem karrierten Blatt. Wir betrachten das Skalarprodukt f_1 aus der Aufgabe 13.1. Ist der Dreieck rechteckig bezüglich f_1 ? Wenn ja, markieren Sie den rechten Winkel, und überprüfen Sie die Aussage des Satzes von Pythagoras mit Rechnungen !

Berechnen Sie bezüglich f_1 die Längen der Seiten, und $\sqrt{dist(A,B)^2 + dist(A,C)^2}$! Beweisen Sie, dass die Vektoren $(1,0)$ und $(1,1)$ bezüglich f_1 nicht senkrecht sind !

13.6 Die Vektoren $v = (1,1)$ und $w = (-1,3)$ in $\mathbb{R}^2$ sind gegeben, und der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sei mit dem Skalarprodukt f_3 aus der Aufgabe 13.1 ausgestattet. Geben Sie die Orthogonalprojektion von v auf $Lin\{w\}$, die Orthogonalzerlegung von v entlang $Lin\{w\}$ an und skizzieren Sie alle Vektoren (also auch die Orthogonalprojektion und beide Terme der Orthogonalzerlegung) im Euklidischen Koordinatensystem auf einem karrierten Blatt!

Aufgaben zum weiteren Üben

13.7 Beweisen Sie, dass auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die Abbildung $f(((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))) = x_1x_2 + \frac{1}{4}y_1y_2 + z_1z_2$ ein Skalarprodukt bildet ! Beweisen Sie, dass die Vektoren $(1,0,0), (0,2,0), (0,0,1)$ bezüglich dieses Skalarproduktes die Länge 1 haben und dass Sie aufeinander orthogonal sind ! Begründen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ bilden !

13.8 Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $f(((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))) = x_1x_2 - x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + 2016z_1z_2$, für $x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $f(((1,0,0),(1,0,0)))$, $f(((1,2,0),(1,2,0)))$, $f(((0,2,0),(0,2,0)))$ und $f(((1,0,0),(0,2,0)))$! Skizzieren Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,2,0)$ und schlussfolgern Sie, dass f kein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ sein kann !

13.9 Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ und die Abbildung f definiert durch $f((p,q)) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$ für $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass f ein Skalarprodukt, dass $\{1, x, x^2\}$ eine Orthogonalbasis und dass $\{h_0, h_1, h_2\}$ keine Orthogonalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes ist !

13.10 In dem Vektorraum und Skalarprodukt aus der Aufgabe 13.9 entscheiden Sie, ob folgende Vektoren Parallel sind oder nicht:

$$x^2 + 1 \text{ und } 0; \quad x^2 + x \text{ und } x + 1; \quad 1 \text{ und } 151; \quad x^2 + x \text{ und } -x^2!$$

Aufgabenblatt 14: Euklidische Ebene und Raum

14.1 In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Gerade $g_1 = \{(\sqrt{3}, 1) + s(0,1) : s \in \mathbb{R}\}$, gegeben. Bestimmen Sie eine Normalendarstellung von g_1! Geben Sie einen Aufpunkt, einen Richtungsvektor und einen Normalenvektor der Gerade g_1 an! Kann man einen anderen Aufpunkt, Richtungsvektor bzw. Normalenvektor für die gleiche Gerade angeben?

In $\mathbb{R}^2$ sind folgende zwei Punkte $P = (-1, 2), R = (3, 0)$ gegeben. Gesucht ist die Gerade g_2 für welche $P \in g_2$ und $R \in g_2$ gilt. Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Normalendarstellung der Gerade g_2 an, sowie ein Aufpunkt, Richtungs- bzw. Normalenvektor!

Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen den zwei Geraden und berechnen Sie den Durchschitt $g_1 \cap g_2$!

Berechnen Sie den Lotpunkt von $P = (\sqrt{3}, 0)$ auf g_2 und den Abstand zwischen P und g_2!

Fertigen Sie eine Skizze mit allen Objekten dieser Aufgabe an!

14.2 Betrachtet wird die Menge $\mathcal{E} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2}x_1 - x_2 + x_3 = \sqrt{2}\}$. Begründen Sie, dass $\mathcal{E}$ eine Ebene im Raum ist und geben Sie eine Parameterdarstellung von $\mathcal{E}$ an!

Betrachtet wird weiter der Punkt $P = (2, -1, 7)$ im Raum. Überprüfen Sie, dass $P \notin \mathcal{E}$! Gesucht ist eine Gerade, welche senkrecht auf $\mathcal{E}$ ist und den Punkt P enthält; berechnen Sie diese und geben Sie sie in einer Parameterdarstellung an! Hat es Sinn, eine Normalendarstellung der Gerade zu suchen?

14.3 Sei mit $f((x, y, z)) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie, dass die Menge $f_{-1}(\{0\})$ (Urbild der $\{0\}$) eine Gerade im Raum, welche durch $(0, 0, 0)$ geht, und die Menge $f_{-1}(\{4\})$ (Urbild der $\{4\}$) eine Gerade im Raum sind, indem Sie jeweils eine Parameterdarstellung diesen Geraden angeben!

14.4 Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene $\mathcal{E}$ mit Aufpunkt $(-1, 2, -2)$ und Richtungsvektoren $w_1 = (1, 3, 1)$, $w_2 = (1, 4, 2)$ gegeben. Geben Sie eine Parameterdarstellung an! Kann man eine andere Parameterdarstellung der gleichen Ebene angeben?

Bestimmen Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, welcher orthogonal auf w_1 und auf w_2 ist, und geben Sie eine Normalendarstellung der Ebene $\mathcal{E}$ an!

Bestimmen Sie den Durchschnitt der Ebene $\mathcal{E}$ mit der x-Achse $\{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$ und den Durchschnitt der Ebene $\mathcal{E}$ mit der xy-Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$! (Ist die x-Achse bzw. die xy-Ebene in dieser Aufgabe mit Parameter- oder mit Normalendarstellung gegeben?)

Berechnen Sie den Lotpunkt von $O = (0,0,0)$ auf $\mathcal{E}$ und den Abstand zwischen O und $\mathcal{E}$!

Aufgaben zum weiteren Üben

14.5 Gegeben sind die Ebenen $\mathcal{E}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 2z = 1\}$ und $\mathcal{E}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 3\}$. Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$!

Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $\mathcal{E}_1$ an, einen Richtungsvektor, einen Aufpunkt und einen Normalenvektor! Geben Sie drei Punkte in $\mathcal{E}_1$ an, welche die Ebene $\mathcal{E}_1$ eindeutig bestimmen!

14.6 Sei die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = -2x + 7$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Begründen Sie, dass die Menge G_f (der Graph von f) eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist! Geben Sie ein Richtungsvektor, ein Aufpunkt, ein Normalenvektor, eine Parameter- und eine Normalendarstellung von G_f an!

14.7 Sei mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben. Begründen Sie, dass die Menge $f_{-1}(\{0\})$ (Urbild der $\{0\}$) eine Gerade in der Ebene, welche durch $(0,0)$ geht, und die Menge $f_{-1}(\{4\})$ (Urbild der $\{4\}$) eine Gerade in der Ebene sind! Geben Sie jeweils eine Normalendarstellung und eine Parameterdarstellung dieser Geraden an!

14.8 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass der Wertebereich W_f eine Gerade im Raum ist!

14.9 Ist die Teilmenge der Ebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ eine Gerade oder nicht ?

14.10 Sei durch $f(x) = (2x, -2x), x \in \mathbb{R}$, eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben. Untersuchen Sie, ob die Mengen $W_f \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $G_f \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade in der Ebene bzw. im Raum sind!

14.11 In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine Gerade g und ein Punkt P gegeben: $(-1,2) \in g$, $(0,0) \in g$, $P = (3,0)$. Geben Sie einen Richtungsvektor und eine Parameterdarstellung der Geraden g an! Berechnen Sie den Lotpunkt von P auf g! Fertigen Sie eine Skizze mit g, P und dem Lotpunkt an!

Sommersemester

Aufgabenblatt 15: Dreiecke

15.1 Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt sind zwei Elemente gegeben: $P = (-2, 5)$ und $Q = (1, 1)$. Geben Sie folgende Objekte als Teilmengen von V an: die Strecke zwischen P und Q; der Mittelpunkt dieser Strecke; die Mittelsenkrechte dieser Strecke. Veranschaulichen Sie diese Mengen im Euklidischen Koordinatensystem!

15.2 Ein Dreieck in der Ebene ist gegeben mit den Eckpunkten $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (x_C, y_C)$ $(x_C, y_C \in \mathbb{R})$. Das Dreieck sei nicht entartet. Berechnen Sie die Mittelpunkte M_A, M_B, M_C der Seiten! Geben Sie die Gerade g_A an, welche durch A und M_A geht, die Gerade g_B, welche durch B und M_B geht und die Gerade g_C, welche durch C und M_C geht! Berechnen Sie $g_A \cap g_B$! Beweisen Sie, dass $g_A \cap g_B \subset g_C$ ist!

Der Punkt S mit $\{S\} = g_A \cap g_B$ heißt **Schwerpunkt** des Dreieckes. Schlussfolgern Sie aus den obigen Rechnungen folgende Aussagen:

- Die Geraden g_A, g_B und g_C schneiden sich in einem Punkt.
- Der Punkt S teilt die Strecke zwischen A und M_A im Verhältnis $2 : 1$, wobei der längere Teil bei dem Eckpunkt und der kürzere Teil bei der Seite liegt.
- Diese Aussagen gelten für ein beliebiges, nicht entartetes Dreieck in der Ebene.

Fertigen Sie eine Skizze an!

15.3 Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei linear unabhängige Vektoren. Sei v_1 ein positives Vielfaches von v und sei w_1 ein positives Vielfaches von w. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$v - w \parallel v_1 - w_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\|w_1\|}{\|w\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v\|} \quad !$$

Welchen Satz aus der Schule erkennen Sie hier?

15.4 Gegeben ist eine Stecke der Länge 1. Beschreiben Sie die Konstruktion mit Lineal und Zirkel der Strecken mit Längen

$$3, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{2}{7}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}\ .$$

Hausaufgaben

15.5 In dem Dreieck ABC mit $A = (0,0), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$ betrachten wir die Höhe aus dem Punkt C. Es sei H_C der Fußpunkt dieser Höhe auf der Gerade durch A und B. Geben Sie eine Formel für die Berechnung der Länge der Strecke CH_C an!

15.6 Das Dreieck mit Eckpunkten $A = (1,1), B = (-1,2), C = (-2,1)$ ist gegeben. Geben Sie die Gerade h_C an, welche durch C geht und senkrecht auf der Seite AB steht! Berechnen Sie den Punkt D so, dass $ADBC$ ein Drachenviereck ist (d.h. die Dreiecke ACB und ADB sollen kongruent sein)! Fertigen Sie eine Skizze an und beschreiben Sie die Konstruktion mit Hilfe eines Lineals und Zirkels des Punktes D!

Aufgaben zum weiteren Üben

15.7 Beweisen Sie mit der analytischen Geometrie, dass die Höhen (als Geraden) eines Dreieckes sich in einem Punkt schneiden!

15.8 Leiten Sie her die Formel für die Fläche eines Dreieckes mit Hilfe der analytischen Geometrie!

Aufgabenblatt 16: Abbildungen

16.1 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f((x,y)) = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y, -2x - \frac{3}{4}y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie f mithilfe einer Matrix auf! Untersuchen Sie, ob f injektiv, surjektiv, bijektiv ist! Geben Sie das Bild der Einheitsquadrats Q mit den Eckpunkten $O = (0,0), e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), (1,1)$ an und veranschaulichen Sie die Mengen Q und $f(Q)$ im Euklidischen Koordinatensystem!

16.2 Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$ eine gegebene Winkelgröße und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Beweisen Sie, dass f orthogonal ist! Sei weiter $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Geben Sie $f(e_1)$ und $f(e_2)$ an und skizzieren Sie diese Vektoren im Euklidischen Koordinatensystem! Berechnen Sie die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(f) = \{u \in \mathbb{R}^2 : f(u) = u\}$ und veranschaulichen Sie diese Menge im Euklidischen Koordinatensystem!

Welche Bewegung der Ebene könnte durch die Abbildung f dargestellt werden?

Aufgaben zum Abgeben

16.3 Gesucht ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche den Vektor e_1 auf sein Dreifaches und den Vektor e_2 auf sein Drittel bildet. Geben Sie diese Abbildung sowie ihre Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis $B = \{e_1, e_2\}$ an! Entscheiden Sie, ob f orthogonal ist oder nicht! Berechnen Sie $f(Q)$ (Q aus der Aufgabe 16.1) und skizzieren Sie Q und $f(Q)$ im Euklidischen Koordinatensystem!

16.4 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung der Form $f((x,y)) = (b_1 + a_{11}x + a_{12}y, b_2 + a_{21}x + a_{22}y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ($b_1, b_2, a_{11}, a_{12}.a_{21}, a_{22}$ sind gegebene reelle Zahlen). Schreiben Sie f mithilfe von Matrixmultiplikation und Matrixaddition auf und beweisen Sie, dass das Bild einer Gerade unter f wieder eine Gerade oder ein Punkt ist! Geben Sie ein Beispiel einer solchen Abbildung f und einer Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$ an, bei der die Menge $f(g)$ genau einen Element hat und veranschaulichen Sie g sowie $f(g)$ im Euklidischen Koordinatensystem!

Hausaufgaben

16.5 Sei $\beta \in [0, \pi)$ eine gegebene Winkelgröße und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Beweisen Sie, dass f orthogonal ist! Berechnen Sie für $\beta = \frac{\pi}{8}$ die Vektoren $f(e_1)$ und $f(e_2)$ und veranschaulichen Sie diese Vektoren im Euklidischen Koordinatensystem!

16.6 Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x;y)) = (x + 0,7y\ ;\ y)$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, ist gegeben. Berechnen Sie die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(f) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : f((x;y)) = (x;y)\}$ und begründen Sie, dass sie eine Gerade ist! Veranschaulichen Sie diese Gerade im Euklidischen Koordinatensystem! Berechnen Sie $f(Q)$ (Q aus der Aufgabe 16.1) und skizzieren Sie Q und $f(Q)$ im Euklidischen Koordinatensystem! Begründen Sie, dass f nicht orthogonal ist!

Aufgaben zum weiteren Üben

16.7 Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f((x,y)) = (2x-3y, 3y+x)$ gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis ! Berechnen Sie $f(e_1)$, $f(e_2)$ und untersuchen Sie, ob f orthogonal ist oder nicht! Skizzieren Sie die Mengen Q (aus der Aufgabe 16.1) und $f(Q)$!

16.8 Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein Parallelogramm mit einem Eckpunkt $O = (0,0)$. Untersuchen Sie, ob eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, für welche $f(Q) = P$ ist (Q aus der Aufgageb 16,.1) ! Kann es mehrere solcher Abbildungen geben?

Aufgabenblatt 17: Parallelogramme

17.1 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f((x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Berechnen Sie die Fläche des durch $f(e_1), f(e_2)$ aufgespannten Parallelogrammes! Ist f orthogonal?

17.2 Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x;y)) = (x + 0,7y \ ; \ y)$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, berechnen Sie die Fläche des durch e_1, e_2 aufgespannten Rechteckes und die Fläche des durch $f(e_1), f(e_2)$ aufgespannten Parallelogramms! Skizzieren Sie beide Mengen!

Beweisen Sie, dass f nicht längentreu ist, aber die Länge jeder Strecke, welche zu $\mathrm{Fix}(f)$ parallel ist, unter f erhalten bleibt! (f heißt **Scherung** mit der Achse x.)

<u>Aufgaben zum Abgeben</u>

17.3 Wir definieren $\sin\alpha = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}$ für $\alpha \in [0, \pi]$. Beweisen Sie, dass für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ die Zahl $\sin(\alpha)$ gleich dem Quotient der Länge der gegenüberliegenden Kathete und der Länge der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Winkelgröße α ist! Berechnen Sie sin von $0 = 0°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$ und fassen Sie die Resultate in einer Tabelle zusammen!

17.4 Sei $m > 0$ eine gegebene Zahl und wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (mx, my)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ $\|f(v)\| = m\|v\|$ und für jedes Parallelogramm $P \subset \mathbb{R}^2$ mit einem Eckpunkt $(0,0)$ $\mathcal{F}(f(P)) = m^2\mathcal{F}(P)$ gilt! Geben Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung f bezüglich der Standardbasis an!

<u>Hausaufgaben</u>

17.5 Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f((x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

nicht orthogonal ist, und berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms $f(Q)$ (Q ist der Einheitsquadrat mit Eckpunkt $(0,0)$)! Begründen Sie, dass f nicht längentreu ist!

17.6 Berechnen Sie das Produkt der Matrizen $D_{\frac{\pi}{3}} \cdot D_{\frac{\pi}{6}}$, wobei $D_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ für $\beta \in [0, 2\pi]$ ist!

Für $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ definieren wir den Wert $\sin(\alpha)$ als $-\sin(\alpha - \pi)$ und für die restlichen $\alpha \in (-\infty, 0) \cup [2\pi, +\infty)$ $\sin(\alpha)$ so, dass $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Abbildung (d.h. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt) wird. Füllen Sie folgende Tabelle mit reellen Zahlen aus:

α in $^\circ$	-90	-60	-45	-30	0	30	45	60	90	120	135
α in Bogenmaß						$\frac{\pi}{6}$					
$\cos(\alpha)$											
$\sin(\alpha)$											

150	180	210	225	240	270	300	315	330	360	390	405

Aufgaben zum weiteren Üben

17.7 Berechnen Sie das Produkt der Matrizen $D_\alpha \cdot D_\beta$ für beliebige $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, wobei diese Matrizen wie in Aufgabe 17.5 definiert sind! Prüfen Sie nach, dass die Menge

$$\{D_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

mit Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet! Geben Sie das neutrale Element und zu jeden Element D_α sein Inverses an!

17.8 Sei $g((x, y)) = (1, 2) + (3x, 3y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass die Fixmunktmenge von g aus genau einem Element Z besteht! Geben Sie das Bild der Strecke $\{(t, (1 - t)) : t \in [0, 1]\}$ unter der Abbildung g an, und veranschaulichen Sie beide Mengen, sowie Z, $g(e_1)$, $g(e_2)$ im Euklidischen Koordinatensystem! Beweisen Sie, dass für jeden Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ $g(u) - Z = 3 \cdot (u - Z)$ gilt! (g heißt **zentrische Streckung** mit Faktor 3 und Zentrum Z.)

Stellen Sie g als Komposition einer linearen Abbildung (zuerst) und einer Verschiebung (danach) beziehungsweise als Komposition einer Verschiebung (zuerst) und einer linearen Abbildung (danach) dar!

Aufgabenblatt 18: Orientierung

18.1 Gegeben ist die folgende Konstruktion: Seien $V, v, Q \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so dass sie die folgende Bedingung erfüllen: $Q - V, v$ sind linear unabhängig. Das geordnete Paar $(V, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ soll die Gerade $g = \{V + tv : t \in \mathbb{R}\}$ repräsentieren; sei n ein Normalenvektor und $\{P \in \mathbb{R}^2 : \langle P - V, n\rangle = 0\}$ eine Normalendarstellung dieser Gerade. Falls $\langle Q - V, n\rangle > 0$, sei $H = \{P \in \mathbb{R}^2 : \langle P - V, n\rangle \geq 0\}$ und falls $\langle Q - V, n\rangle < 0$, sei $H = \{P \in \mathbb{R}^2 : \langle P - V, n\rangle \leq 0\}$; da $Q \notin g$, sind damit alle Fälle abgedeckt.

Prüfen Sie nach, dass $Q \in H$ und $g \subset H$ gelten! Prüfen Sie für $V = (1, 2), v = (1, -1), Q = (\sqrt{2}, 0)$ die Bedingung der Konstruktion nach und führen Sie die Konstruktion durch! Veranschaulichen Sie die Mengen $\{Q\}, g, H$ im Euklidischen Koordinatensystem!

Sei $(V, v) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ein geordnetes Paar von Vektoren so, dass V, v linear unabhängig sind. Prüfen Sie nach, dass für $V, v, Q = (0, 0)$ die Konstruktion durchführbar ist und fertigen Sie eine motivierende Skizze an!

Die Menge H heißt die durch V, v, Q gegenebene **Halbebene**. Mit welchem Begriff aus der Geometrievorlesung kann man die Menge H benennen?

18.2 Definition: Seien zwei geordnete Paare von jeweils zwei linear unabhängigen Vektoren gegeben: $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, v_1, v_2 linear unabhängig, $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, u_1, u_2 linear unabhängig. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche $f(v_1) = u_1$, $f(v_2) = u_2$ erfüllt, und sei $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ die Abbildungsmatrix der Abbildung f bezüglich der Standardbasis. Wir sagen, dass (v_1, v_2) und (u_1, u_2) **gleichorientiert** sind, wenn $\det A > 0$, und dass sie **entgegen orientiert** sind, wenn $\det A < 0$.

Untersuchen Sie, ob folgende Paare gleichorientiert sind:

$$(e_1, e_2) \text{ und } (e_1, e_2); \quad (e_1, e_2) \text{ und } (-e_1, e_2); \quad ((1, 1), (1, -1)) \text{ und } ((0, 1), (1, 1)) \ .$$

Begründen Sie, dass die beschriebene Abbildung f existiert und dass sie eindeutig ist! Begründen Sie, dass der Fall $\det A = 0$ nicht vorkommt!

<u>Aufgaben zum Abgeben</u>

18.3 Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn (v_1, v_2) und (u_1, u_2) gleichorientiert sind und (u_1, u_2) und (w_1, w_2) gleichorientiert sind, dann sind auch (v_1, v_2) und (w_1, w_2) gleichorientiert.

Was für eine Relation stellt Gleichorientierung auf der Menge $\{(v, w) : v, w \in \mathbb{R}^2 \text{ linear unabhängige Vektoren }\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dar?

18.4 Eine lineare bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nennen wir **orientierungstreu**, wenn (e_1, e_2) und $(f(e_1), f(e_2))$ gleichorientiert sind. Untersuchen Sie, ob die Abbildungen aus den Aufgaben 16.7 und 16.2 orientierungstreu sind oder nicht!

Hausaufgaben

18.5 Untersuchen Sie, ob folgende geordnete Paare von Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ gleichorientiert oder entgegen orientiert sind:

$$(e_1, e_2) \text{ und } (e_2, e_1); \quad (e_1, e_2) \text{ und } (2e_1, 3e_2); \quad ((1,1),(1,-1)) \text{ und } ((1,0),(1,1)) \ .$$

18.6 Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen orientierungstreu sind oder nicht:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & -\cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 0,7y \\ y \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ !$$

Aufgaben zum weiteren Üben

18.7 Sei $\{b_1, b_2\}$ irgendeine Basis von $\mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine orientierungstreue lineare Abbildung. Begründen Sie, dass (b_1, b_2) und $(f(b_1), f(b_2))$ gleichorientiert sind!

18.8 Beweisen Sie, dass für eine orientierungstreue Abbildung f auch die inverse Abbildung f_{-1} orientierungstreu ist! Beweisen Sie, dass für orientierungstreue Abbildungen f, g auch die Komposition $f \circ g$ orientierungstreu ist! Schlussfolgern Sie, dass die Menge

$$\{f : \text{ die Abbildung } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ ist linear, bijektiv, orientierungstreu}\}$$

mit Komposition eine nichtkommutative Gruppe bildet!

18.9 Überlegen Sie, wie man die Definitionen aus den Aufgaben 18.2, 18.4 auf den allgemeinen Fall $\mathbb{R}^n$ anpassen könnte!

Aufgabenblatt 19: Determinante

19.1 Berechnen Sie die Determinante folgender 2×2-Matrizen und interpretieren Sie die Resultate für die Abbildungen, welche die aufgelisteten Matrizen als Abbildungsmatrizen bezüglich der Standardbasis haben!

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r\cos\alpha & -r\sin\alpha \\ r\sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

($\alpha, \beta \in [0, 2\pi], m, r > 0$, die letzten beiden für Scherstreckung und Drehstreckung.)

19.2 Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ \cos(\pi) & \sqrt{2} & 1 & d \end{pmatrix}.$$

<u>Aufgaben zum Abgeben</u>

19.3 Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

für $e_1, e_2, e_3, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$! Interpretieren Sie das Resultat mit $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ und $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ als einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und beweisen Sie, dass dieser Vektor v senkrecht bezüglich des Euklidischen Skalarproduktes auf dem Vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ist!

19.4 Beweisen Sie, dass $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(2{\times}2; \mathbb{R})$ gilt und interpretieren Sie diese Eigenschaft für die Flächenänderung von Parallelogrammen bei der Komposition von linearen Abbildungen!

Hausaufgaben

19.5 Prüfen Sie nach, dass für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, dass $\det(A) \neq 0$, gilt das Paar (x_1, x_2) mit

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)}, \quad (A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}),$$

eine Lösung ist! Begründen Sie, dass das lineare Gleichungssystem unter der gleichen Voraussetzung genau eine Lösung besitzt!

19.6 Berechnen Sie die Determinante der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

Schlussfolgern Sie, dass die Vektoren $(0,0,1), (0,1,0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \in \mathbb{R}^3$, bzw. die Vektoren $(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, 0, -\frac{\sqrt{6}}{2}) \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind !

Aufgaben zum weiteren Üben

19.7 Berechnen Sie die Determinante folgender 3×3-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_2n_1 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_3n_1 & -2n_3n_2 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m_1 \\ 0 & 1 & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}.$$

Bezüglich der Standardbasis repräsentieren diese: Spiegelung am Nullpunkt, Drehung des Raumes um die y-Achse um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$, Spiegelung an der Ebene durch $(0,0,0)$ mit Normalenvektor $n = (n_1, n_2, n_3)$, $\|n\| = 1$, eine Scherung, Streckung mit Faktor $r > 0$.

19.8 Schlussfolgern Sie aus der Aufgabe 19.6, dass die Hermite Polynome $h_0(x) = 1, h_1(x) = x, h_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ als Elemente des Vektorraumes $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ bzw. $h_0, h_1, h_2, h_3(x) = \frac{\sqrt{6}}{6}x^3 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ als Elemente des Vektorraumes $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ jeweils linear unabhängig sind!

Aufgabenblatt 20: Lineare Abbildungen und Matrizen - algebraische Strukturen

20.1 Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ definieren wir $trA = a_{11} + a_{22}$; diese Zahl heißt **Spur** der Matrix A, auf Englisch: trace. Berechnen Sie

$$trE, \quad trD_\alpha, \quad tr\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad tr\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei E die Einheitsmatrix ist, D_α in der Aufgabe 20.2 gegeben ist und $\alpha, m, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gegeben sind!

Prüfen Sie nach, dass für $A, B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ die Formel $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$ gilt! Beweisen Sie damit, dass die Formel $tr(CAC^{-1}) = trA$ für jede invertierbare Matrix C gilt! (Hinweis: $CAC^{-1} = C(AC^{-1})$, $(AC^{-1})C = A(C^{-1}C) = AE = A$, für $A, C \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$, C invertierbar.) Vergleichen Sie mit einer Formel für $\det(CAC^{-1})$.

20.2 Wir definieren

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad S_\beta = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix},$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $D_{\frac{\pi}{4}} \cdot D_{\frac{\pi}{2}}$ und $S_{\alpha+\pi}$! Beweisen Sie mithilfe von Additionstheoremen für Sinus und Kosinus, dass die Formel $D_\alpha \cdot S_\beta = S_{\frac{\alpha}{2}+\beta}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt!

<u>Aufgaben zum Abgeben</u>

20.3 Wir definieren $E_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ und D_α wie in der Aufgabe 20.2, $r, \alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\det(E_r \cdot D_\alpha)$! Prüfen Sie nach, dass die Formel $E_r \cdot D_\alpha = D_\alpha \cdot E_r$ gilt!

Eine lineare Abbildung der Ebene, welche eine Matrix $E_r \cdot D_\alpha$ mit $r > 0$ als Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis hat, heißt **Drehstreckung**. Bestimmen Sie $(E_r \cdot D_\alpha)^{-1}$ für $r > 0$, sowie $(E_r \cdot D_\alpha) \cdot (E_s \cdot D_\beta)$ für $r, s, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r, s > 0$, in der Form einer Drehstreckung! Schlussfolgern Sie, dass die Menge

$$M = \{E_r \cdot D_\alpha : r > 0, \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

mit Matrixmultiplikation eine kommutative Gruppe bildet! Geben Sie das neutrale Element in der Form einer Drehstreckung an!

20.4 Bestimmen Sie die linearen Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ,$$

bzw. ihre Abbildungsmatrizen bezüglich der Standardbasis, in der Form einer Drehstreckung! Warum kann man eine Spiegelung, gegeben mit der Matrix S_β, nicht als eine Drehstreckung darstellen?

Hausaufgaben

20.5 Beweisen Sie mithilfe von Additionstheoremen für Sinus und Kosinus, dass die Formel $S_{\beta_1} \cdot S_{\beta_2} = D_{2(\beta_1 - \beta_2)}$ für $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gilt!

20.6 Bestimmen Sie die linearen Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x + y \\ -x + \sqrt{3}y \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ,$$

bzw. ihre Abbildungsmatrizen bezüglich der Standardbasis, in der Form einer Drehstreckung!

Aufgaben zum weiteren Üben

20.7 Sei M eine Menge und wir betrachten Abbildungen $f : M \to M$ mit $D_f = M$. Beweisen Sie, dass die Komposition von zwei injektiven Abbildungen dieser Art wieder injektiv ist, und die Komposition von zwei surjektiven Abbildungen dieser Art wieder surjektiv ist!

Schlussfolgern Sie, dass die Komposition $\circ$ auf der Menge

$$G = \{f : \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ linear, bijektiv}\}$$

eine zweistellige Operation ist! Begründen Sie, dass diese Operation assoziativ, aber nicht kommutativ ist!

20.8 Bestimmen Sie für G aus der Aufgabe 20.7 die Menge $\{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R}) : \exists f \in G : \; A$ ist Abbildungsmatrix der Abbildung f bezüglich der Standardbasis ist $\}$, sowie ihre Teilmengen, welche durch eine der folgenden Einschränkungen für die Abbildung f bestimmt sind: flächeninhalttreu; orientierungstreu; flächeninhalt- und orientierungstreu; orthogonal; orthogonal und orientierungstreu. Benutzen Sie den Begriff Determinante! Welche dieser Mengen bildet mit der Matrixmultiplikation als zweistellige Operation eine kommutative bzw. nichtkommutative Gruppe?

Aufgabenblatt 21: Komplexe Zahlen

21.1 Bestimmen Sie folgende komplexe Zahlen

$$\frac{1}{1-i}, \quad \frac{1+i}{1-i}+5-3i, \quad \frac{(2+3i)\cdot(-2-i)}{(3+i)\cdot(4-4i)}$$

in der kartesichen Form $a+ib$ und veranschaulichen Sie diese Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene!

Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $(\frac{p}{2})^2 - q < 0$. Überprüfen Sie, dass die zwei komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{-\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)}, \quad z_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{-\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)}$$

die Gleichung $z \cdot z + p \cdot z + q = 0$ erfüllen .

21.2 Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in Exponentialform $re^{i\alpha}$, $r > 0, \alpha \in [0, 2\pi)$, auf:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}i \ .$$

Aufgaben zum Abgeben

21.3 Gegeben ist die Drehstreckung $f = e_2 \circ d_{\frac{\pi}{6}}$. Bestimmen Sie die Drehstreckungen $f \circ f, f \circ f \circ f, f \circ f \circ f \circ f \circ f$! Gegeben ist die Drehstreckung $e_1 \circ d_0$. Bestimmen Sie die Menge L aller Drehstreckungen g, welche die Eigenschaft $g \circ g \circ g \circ g \circ g = e_1 \circ d_0$ erfüllen!

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $z^5 = 1$ in $\mathbb{C}$. Was ist die Lösungsmenge der Gleichung $z^5 = 1$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{N}$?

21.4 Sei M eine Menge. Wir betrachten die Menge G aller Abbildungen $f : M \to M$ mit $D_f = M$ und die zweistellige Operation Komposition $\circ$ auf dieser Menge. Beweisen Sie, dass $\circ$ auf G assoziativ ist! Wir führen folgende Notation ein: für $g \in G$ sei $g_1 = g$, $g_2 = g \circ g$ und allgemein $g_n = g \circ g \circ \cdots \circ g$ (n-mal) für $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie folgende Rechenregeln: für $n, m \in \mathbb{N}$ gelten

$$g_n \circ g_m = g_{n+m}, \quad (g_n)_m = g_{n \cdot m} \ .$$

Wir definieren weiter noch g_0 als die identische Abbildung $i : M \to M$, für alle $g \in G$. Beweisen Sie, dass die oberen Rechenregeln auch für $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gelten!

Diskutieren Sie, inwiefern es Sinn macht, die Potenznotation für Matrizen einzuführen!

Hausaufgaben

21.5 Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in Exponentialform auf:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}i\ .$$

21.6 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$ und veranschaulichen Sie diese Menge in der Gauß'schen Zahlenebene!

Aufgaben zum weiteren Üben

21.7 Bestimmen Sie folgende komplexe Zahlen

$$\frac{4-3i}{4+3i}-(3+2i)^2,\quad \left(\frac{2-3i}{1+i}\right)^2+4-5i,\quad \frac{2-i}{5+i}-\frac{1+i}{1+5i}-\frac{1}{i}\ .$$

21.8 Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge folgender Gleichungen:

$$\frac{1-2i}{3+i}z=\frac{3-6i}{1+i},\qquad 5z-6iz+\overline{z}+4i\overline{z}=14+10i\ .$$

21.9 Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2(\cos 30° + i\sin 30°), z_2 = 6(\cos 150° + i\sin 150°)$ und $z_3 = 5(\cos 270° + i\sin 270°)$. Man berechne:

$$z_1\cdot z_2\cdot z_3,\quad \frac{1}{z_1},\quad z_1:(z_2\cdot z_3),\quad z_1^5:z_2^2\ .$$

21.10 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungen $z^4 = -1$ bzw. $z^4 = -i$ mit $z \in \mathbb{C}$ und veranschaulichen Sie diese Mengen in der Gauß'schen Zahlenebene!

Aufgabenblatt 22: Eigenvektoren I

22.1 Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

den Vektor $p = (1, 0, 0)$ auf sein Zweifaches, den Vektor $q = (1, 0, 1)$ auf sein Einfaches und den Vektor $r = (0, 1, -1)$ auf sein -1-faches abbildet! Begründen Sie, dass $B = \{p, q, r\}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ bildet! Geben Sie die Abbildungsmatrix D der Abbildung f bezüglich dieser Basis an!

Betrachten wir die identische Abbildung $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i(u) = u$ für $u \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix C_1 der Abbildung i bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ (im Definitionsbereich) und der Basis B (im Wertebereich), sowie die die Abbildungsmatrix C_2 der Abbildung i bezüglich der Basis B (im Definitionsbereich) und der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ (im Wertebereich)! Berechnen Sie $A = C_2 \cdot D \cdot C_1$! Welche Beziehung besteht zwischen C_1 und C_2 ? Was repräsentiert die Matrix A für die Abbildung f?

22.2 Untersuchen Sie, ob es Vektoren, verschieden vom Nullvektor, gibt, welche durch die Abbildung $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf ihr Zweifachen (-1-faches, 0-faches, 6-faches) abgebilden werden und geben Sie diese an!

Aufgaben zum Abgeben

22.3 Berechnen Sie alle Werte $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + \sqrt{2}y &= \lambda x \\ \sqrt{2}x + y &= \lambda y \end{aligned}$$

mindestens eine, von $(0, 0)$ verschiedene Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt! Bestimmen Sie eine Basis $\{v_1, v_2\}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ so, dass die Abbildung $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ den Vektor v_1 auf sein Vielfaches, und den Vektor v_2 auch auf sein Vielfaches abbildet! Geben Sie die Abbildungsmatrix der Abbildung f bezüglich dieser Basis an!

22.4 Seien $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie alle Werte $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 x + by &= \lambda x \\ a_2 y &= \lambda y \end{aligned}$$

mindestens eine, von $(0,0)$ verschiedene Lösung $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt! Wann gibt es eine und wann zwei solche λ ? Schlussfolgern Sie, dass in dem ersten Fall keine Basis $\{v_1, v_2\}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ existiert, für welche die Abbildung $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ den Vektor v_1 auf sein Vielfaches und den Vektor v_2 auch auf sein Vielfaches abbildet!

Hausaufgaben

22.5 Es sei die Abbildung $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Entscheiden Sie, ob eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ existiert, so dass f jeden Basisvektor auf sein Vielfaches abbildet! Geben Sie gegebenfalls diese Basis an, und veranschaulichen Sie im Kartesischen Koordinatensystem die Basisvektoren sowie ihre Bilder unter der Abbildung f!

22.6 Beweisen Sie, dass für jede Abbildung f der Form $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, wobei $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ gegeben sind, eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ existiert, so dass f jeden Basisvektor auf sein Vielfaches abbildet!

Aufgaben zum weiteren Üben

22.7 Zeigen Sie, dass bei der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor $p = (1, -2, 3)$ auf sein 2-faches, die Vektoren $q = (3, -6, 8)$ und $r = (1, -1, 1)$ jeweils auf ihr 1-faches abgebildet werden! Begründen Sie, dass $B = \{p, q, r\}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ bildet! Geben Sie die Abbildungsmatrix D der Abbildung f bezüglich dieser Basis an!

Gibt es andere Vektoren, welche auf ihr 2-faches abgebildet werden? Wenn ja, geben Sie die Menge aller solcher Vektoren an! Welche algebraische Struktur besitzt diese Menge?

Aufgabenblatt 23: Eigenvektoren II

23.1 Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte der Matrix A, zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum und geben Sie zu jedem Eigenraum eine Basis dieses Vektorraumes über $\mathbb{R}$ an! Geben Sie eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ an, welche nur aus Eigenvektoren der Matrix A besteht!

Geben Sie die Darstellung des Vektors u_0 (als Linearkombination der Basisvektoren) in dieser Basis an!

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D so, dass A die Darstellung $A = CDC^{-1}$ hat!

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,2 & 1,1 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

23.2 Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte der Matrix A, zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum und geben Sie zu jedem Eigenraum eine Basis dieses Vektorraumes über $\mathbb{R}$ an! Geben Sie eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ an, welche nur aus Eigenvektoren der Matrix A besteht!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgaben zum Abgeben</u>

23.3 Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gegeben und mit $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Begründen Sie, dass unter den Voraussetzungen, dass $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, dass $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind und dass die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ die Gleichheit $f(\frac{p}{q}) = 0$ erfüllt, a_n teilbar durch q und a_0 teilbar durch p ist.

23.4 Bestimmen Sie, mit Hilfe der Aufgabe 23.3, jeweils möglichst viele Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}$ (bzw. in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$):

$$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0, \quad 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0, \quad x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0\ .$$

<u>Hausaufgaben</u>

23.5 Bearbeiten Sie die Aufgabe 23.1 für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1,6 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}\ !$$

23.6 Bestimmen Sie jeweils möglichst viele Lösungen der Gleichungen in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0, \quad x^3 - 4x^2 + 3x + 8 = 0, \quad 2x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0 \ .$$

<u>Aufgaben zum weiteren Üben</u>

23.7 Bestimmen Sie das Spekrum der Drehmatrix D_α! Begründen Sie, dass keine Basis des $\mathbb{R}^2$ existiert, welche nur aus Eigenvektoren von D_α besteht!

23.8 Bestimmen Sie das Spekrum der Spiegelmatrix S_β! Gibt es eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$, welche nur aus Eigenvektoren der Matrix S_β besteht? Wenn ja, veranschaulichen Sie diese Basis im Euklidischen Koordinatensystem für $\beta = 30°$, und auch die Bilder der Basisvektoren bei der Spiegelung s_β für $\beta = 30°$!

23.9 Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte, die zugehörigen Eigenräume, jeweils eine Basis dieser Eigenräume, sowie, falls möglich, eine Basis bzw. eine Orthonormalbasis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$, welche nur aus Eigenvektoren besteht, für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Geben Sie jeweils das komplexe Spektrum der Matrix an!

Aufgabenblatt 24: Lineare Differenzengleichungssysteme

24.1 Schreiben Sie folgendes lineares Differenzengleichungssystem in der Form $u_{k+1} = A \cdot u_k$ mit Hilfe einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ für den Vektor $u_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ (Spaltenvektor) auf:

$$\begin{array}{ll} x_{k+1} & = 1,44 x_k \\ y_{k+1} & = 1,2 y_k \end{array}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Berechnen Sie die Matrizen A^2, A^{10} und geben Sie eine allgemeine Formel für die Berechnung von A^k, $k \in \mathbb{N}$, an!

24.2 Schreiben Sie folgendes lineares Differenzengleichungssystem in der Form $u_{k+1} = A \cdot u_k$ mit gegebenen Anfangswert u_0 auf:

$$\begin{array}{ll} x_{k+1} & = \frac{\sqrt{2}}{2} x_k - \frac{\sqrt{2}}{2} y_k \\ y_{k+1} & = \frac{\sqrt{2}}{2} x_k + \frac{\sqrt{2}}{2} y_k \end{array}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 = 1, y_0 = 0 \ .$$

Bestimmen Sie A^8, A^9, A^{10} mit Hilfe von Drehungen der Ebene und veranschaulichen Sie für $k = 0, 1, \ldots, 10$ die Lösung $\big(x_k, y_k\big) \in \mathbb{R}^2$ im euklidischen Koordinatensystem !

Aufgaben zum Abgeben

24.3 Ein Räuber-Beute-Modell von Eulen (O) und Ratten (R, in Tausenden) in Monatenabständen (k) sei mit dem Differenzengleichungssystem

$$\begin{array}{ll} O_{k+1} & = 0.5 O_k + 0.4 R_k \\ R_{k+1} & = -0.2 O_k + 1.1 R_k \end{array}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

gegeben. Schreiben Sie das System in der Form $u_{k+1} = A \cdot u_k$ mit Hilfe einer Matrix A für den Vektor $u_k = (O_k, R_k)$ (Spaltenvektor) auf!

Finden Sie eine Formel für die Anzahl der Eulen und Ratten nach k Monaten, wenn die Anzahl von Eulen $O_0 = 100$ und die Anzahl von Ratten in Tausenden $R_0 = 300$ am Anfang der Beobachtung ($k = 0$) gegeben ist!

24.4 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ -0,1 & 1 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie das zugehörige lineare Differenzengleichungssystem für die Unbekannte (x_k, y_k) mit gegebenem Anfangswert $(1, 1)$ für $k = 0$ auf!

Prüfen Sie nach, dass die Zahlen $\lambda_1 = 0,9 + 0,2i$ und $\lambda_2 = 0,9 - 0,2i$ Eigenwerte der Matrix A sind und dass die Spaltenvektoren $v_1 = (1 - 2i, 1)$, $v_2 = (1 + 2i, 1) \in \mathbb{C}^2$ zugehörige Eigenvektoren sind!

Prüfen Sie nach, dass $\begin{pmatrix} \frac{i}{4} & \frac{1}{2} - \frac{i}{4} \\ -\frac{i}{4} & \frac{1}{2} + \frac{i}{4} \end{pmatrix}$ die Inverse der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1-2i & 1+2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in$ $\mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{C})$ ist und dass $A = CDC^{-1}$ für $D = \begin{pmatrix} 0,9+0,2i & 0 \\ 0 & 0,9-0,2i \end{pmatrix}$ gilt!

Geben Sie die komplexen Zahlen λ_1 und λ_2 in Exponentialform an!

Hausaufgaben

24.5 Ein Zwei-Phasen-Populationsmodell für Jungtiere J_k (bis 1 Jahr) und erwachsene Tiere E_k (ab dem ersten Jahr) in Jahresabständen k sei mit dem Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= 1,6E_k \\ E_{k+1} &= 0,3J_k + 0,8E_k, \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{N}_0$, gegeben. (Jedes erwachsene Tier bringt im Durchschnitt 1,6 Tiere pro Jahr auf die Welt. Jedes Jahr überleben 30% der Jungtiere und werden erwachsene Tiere, und 80% der erwachsenen Tiere überleben im Durchschnitt.)

Schreiben Sie das System in der Form $u_{k+1} = A \cdot u_k$ mit Hilfe einer Matrix A für den Vektor $u_k = (J_k, E_k)$ (Spaltenvektor) auf! Finden Sie eine Formel für die Anzahl der Tiere nach k Monaten, wenn die Anzahl der Jungtiere $J_0 = 10$ und die Anzahl der erwachsenen Tiere $E_0 = 15$ am Anfang der Beobachtung ($k = 0$) gegeben ist! Fassen Sie die Anzahl der zwei Populationen und das Verhältnis $\frac{J_k}{E_k}$ in den ersten 8 Jahren in einer Tabelle zusammen!

24.6 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1,25 & -0,75 \\ -0,75 & 1,25 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie das zugehörige lineare Differenzengleichungssystem für die Unbekannte (x_k, y_k) mit gegeben Anfangswert $(2, 0)$ für $k = 0$ auf!

Prüfen Sie nach, dass die Zahlen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0,5$ Eigenwerte der Matrix A sind und dass die Spaltenvektoren $v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ zugehörige Eigenvektoren sind! Schreiben Sie den Vektor $(2, 0)$ als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2 auf und geben Sie eine Formel für die Lösung des linearen Differenzengleichungssystems an!

Aufgabenblatt 25: Linear versus nicht-linear

25.1 Geben Sie jeweils die Lösungsmenge folgender Gleichungen an und entscheiden Sie, ob diese Menge eine Gerade in der Ebene ist oder nicht:

$$2x + 3y = 4 \qquad 4x^2 - 7y = 3 \qquad x - 2xy = -2$$

25.2 Gegeben ist die Verschiebung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = x + \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, sowie von $v \circ f$ und $f \circ v$.

Aufgaben zum Abgeben

25.3 Entscheiden Sie, wieviele Nullstellen in $\mathbb{R}$ folgende Polynome in Abhängigkeit von $y \in \mathbb{R}$ gegeben, haben, und geben Sie jeweils diese Nullstellen an:

$$p(x) = x^2 + y^2, \quad p(x) = x^2 - y^2 - 1, \quad p(x) = -x^2 + xy + y^2 + 1 \ .$$

25.4 Begründen Sie, ob folgende Abbildungen von dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ in den Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ linear sind oder nicht:

$$f_1(x,y) = x + \sqrt{2}y, \quad f_2(x,y) = xy, \quad f_3(x,y) = x^2, \quad f_4(x,y) = \frac{x}{y}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Veranschaulichen Sie das Urbild der Menge $\{4\}$ für jede Abbildung im Euklidischen Koordinatensystem und entscheiden Sie, ob dieses Urbild eine Gerade in der Ebene ist oder nicht!

Hausaufgaben

25.5 Gegeben ist die Skalierung $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(x) = 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ für $x \in \mathbb{R}$, sowie von $s \circ f$ und $f \circ s$.

25.6 Begründen Sie, ob folgende Abbildungen von dem Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ in den Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ linear sind oder nicht:

$$f(x) = x^2 - 6x + 9, \quad g(x) = |x|, \quad h(x) = x + 1 \ .$$

Aufgaben zum weiteren Üben

25.7 Gegeben seien die Abbildungen $f_1(x,y) = (\frac{1}{2}x, 3y)$, $f_2(x,y) = (x+y, y)$ und die Mengen $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$, $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Skizzieren Sie die Mengen M_1 und M_2 und geben Sie die Mengen $f_1(M_1), f_1(M_2), f_2(M_1), f_2(M_2)$ an!

Aufgabenblatt 26: Wiederholung: Relationen und Gruppen

26.1 Beweisen Sie, dass Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ ist!

26.2 Sei $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ und ausgestattet mit dem Euklidischen Skalarprodukt angesehen. Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) &= \{f : \ f : \mathbb{R}^2 \ \text{ linear, bijektiv}\}, \\ \mathrm{SL}(\mathbb{R}^2) &= \{f : \ f : \mathbb{R}^2 \ \text{ linear, bijektiv, flächeninhaltstreu}\} \end{aligned}$$

mit Komposition $\circ$. Beweisen Sie, dass beide Mengen mit $\circ$ jeweils eine nicht-kommutative Gruppe bilden! Diese Gruppen heißen **allgemeine** bzw. **spezielle lineare Gruppe**.

Die lineare Abbildungen sollen mit Hilfe von Abbildungsmatrizen bezüglich der Standardbasis angegeben werden. Beschreiben Sie jeweils die entsprechende Menge von Matrizen!

Aufgaben zum Abgeben

26.3 Mit $\mathbb{R}^2$ als Menge von Spaltenvektoren angesehen, betrachten wir die Mengen

$$\begin{aligned} \mathrm{GA}(\mathbb{R}^2) =& \{f : \ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \exists A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R}) \text{ mit } \det A \neq 0, \\ & \exists b \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^2 \ f(x) = Ax + b\}, \\ \mathrm{SA}(\mathbb{R}^2) =& \{f : \ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \exists A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R}) \text{ mit } \det A = 1, \\ & \exists b \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \ f(x) = Ax + b\}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass beide Mengen mit Matrixmultiplikation $\cdot$ jeweils eine nicht-kommutative Gruppe bilden! Diese Gruppen heißen **allgemeine** bzw. **spezielle affine Gruppe**.

26.4 Wir definieren die Relation $\sim$ auf der Menge $\mathrm{SA}(\mathbb{R}^2)$ folgenderweise: $f \sim g$ genau dann, wenn eine Verschiebung v_a so existiert, dass $f = v_a \circ g$ (hier ist $v_a(x) = x + a$ für $x \in \mathbb{R}^2$ definiert, $a \in \mathbb{R}^2$). Beweisen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{SA}(\mathbb{R}^2)$ ist!

Was sind die Äquivalenzklassen? Welchen Bezug hat die Menge aller Äquivalenzklassen zu $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^2)$? Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^2)$?

Aufgabenblatt 27: Quadriken

Wir betrachten die Euklidische Ebene (d.h. den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ mit euklidischen Skalarprodukt). Eine Teilmenge $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Quadrik**, wenn eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$, ein Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ (Spaltenvektor) und eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T Ax + b^T x + c = 0\}$.

27.1 Sei $Q = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{K} = \{P \in \mathbb{R}^2 : dist(P, Q) = 5\}$! Begründen Sie, dass $\mathcal{K}$ eine Quadrik ist!

27.2 Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Skizzieren Sie den Graph von f und begründen Sie, dass diese Menge eine Quadrik ist!

<u>Aufgaben zum Abgeben</u>

27.3 Begründen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 6x_2 + 6 = 0\}$$

eine Quadrik ist!

27.4 Begründen Sie, dass jede Gerade in der Ebene eine Quadrik ist!

<u>Hausaufgaben</u>

27.5 Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 5\}$! Begründen Sie, dass $\mathcal{H}$ eine Quadrik ist!

27.6 Begründen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_1 + 2x_2 + 4 = 0\}$$

eine Quadrik ist!

<u>Aufgaben zum weiteren Üben</u>

27.7 Skizzieren Sie die Mengen in den Aufgaben 27.3 und 27.6 ! Nutzen Sie dafür die Diagonalisierung der symmetrischen Matrix A.

27.8 Skizzieren Sie die Menge

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 + 2 = 0\} \text{ !}$$