Grundlagen der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

E.Fašangová, TU Dresden WS 2015/16

July 1, 2016

Contents

1 Sprung von elementarer in die höhere Mathematik

Das intuitive Verständnis der Mathematik aus der Schule kann auf dem höheren Niveau versagen. Folgende Themen sind Beispiele dazu.

- "Ich weiss dass ich nichts weiss." (Socrates)
  "Pour etre libre, nous devons observer les règles et obéir aux loix." (Sartre)

  Diese sind filosophische Sätze. Wir werden solche nicht diskutieren.

- "Ich lüge !"

  Es hat kein Sinn darüber zu diskutieren, ob diese Aussage wahr oder falsch ist. Wenn sie nämlich wahr wäre, muss sie falsch sein, und wenn sie falsch wäre, muss sie wahr sein. Solche Sätze werden wir vermeiden.

- Man kann nicht intuitiv definieren, was eine "Menge" ist. Eine "Definition" wie

  "Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. "

  werden wir nicht benutzen, da hier nur der Wort "Zusammenfassung" durch einen anderen Wort "Menge" ersetzt ist. Ausserdem wäre dann möglich,

  "die Gesamtheit aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten",

  als eine Menge M zu definieren. Das würde aber zu Wiederspruch führen (Russell'sches Paradoxon, 1901 entdeckt). Wenn nämlich diese Menge sich selbs nicht als Element enthält, dann ist sie Element von sich, und wenn diese Menge sich selbst als Element enthält, kann sie nicht Element von sich sein. Es hat also kein Sinn, von diesen Gesamtheit als von einer "Menge" in der Mathematik zu reden.

- Das Russelsches Paradox in dem Kontext der Aussagen:

  You can define the barber as "one who shaves all those, and those only, who do not shave themselves." The question is, does the barber shave himself ? (Bertrand Russell)

- Zenon 500 v.C. hat den Paradox von Achilles und der Schildkröte formuliert. Dies ist nun so lange ein Paradox, wenn man mit unendlich vielen Zahlen nicht rechnen kann. Ansonst kann man eine Erklärung in Analysis, mithilfe unendlichen Reihen, geben.

- Das intuitive Verständnis von "unendlich" kann zum unakzeptierbaren Rechnen führen. Es gibt genauso viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen, obwohl man begründen könnte, dass es "bis auf eine, zweimal so viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen gibt." Es sollte also "unendlich ist gleich zweimal unendlich plus eins" gelten, und folglich "unendlich ist gleich minus eins". Dies ist offensichtlich ein Unsinn.

- In der Sprache benutzen wir manche Worte uneindeutig. Zum Beispiel ist "ein" manchmal Zahlwort, manchmal unbestimmter Artikel. In der Sprache wird es von dem Kontext klar, in Mathematik wollen wir es festlegen. Auch die Bedeutung von "oder" kann je nach Kontext verschieden sein. Deswegen werden wir die Bedeutung von z.B. "und, oder, nein" auch definieren.

Das intuitive Verständnis der Zahlen und die Fähigkeit mit diesen zu rechnen wird für diese Vorlesung reichen. Die vorkommenden "Aussagen" und "Mengen" führen nicht zu Widersprüchen. Wir werden die deutsche Sprache anwenden und uns in grammatischen Sätzen ausdrücken. Ausserdem werden wir Abkürzungen, Notationen und Symbolen benutzen, um unsere Aussagen kürzer aufschreiben zu können. Als "Beweis" werden wir eine Folge logischer Folgerungen, die von wahr geglaubten (oder: wahr festgelegten) Aussagen eine neue wahre Aussage produzieren, nennen. Eine logische Folgerung ist solche, mit welchen alle einverstanden sind.

2 Logik

Eine **Aussage** ist ein Satz einer menschlichen oder künstlichen Sprache, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte "wahr" (w, 1) oder "falsch" (f, 0) zugeordnet werden kann.

Beispiele.

- In der 1. Vorlesung GLAAG an der TU Dresden am 13. Oktober 2015 sind mehr als 80 Teilnehmer anwesend.

- 120 ist nicht teilber durch 3.

- Wir können die erste Aussage als q abkürzen, die zweite als r.

Definition Wenn p eine Aussage ist, dann bezeichnen wir durch $\neg p$ eine neue Aussage, die folgenderweise definiert ist: wenn p wahr ist, dannn sei $\neg p$ falsch, und wenn p falsch ist, dann sei $\neg p$ wahr. Diese neue Aussage $\neg p$ heißt **Negation der Aussage** p, lese **nicht** p

Die obere Definition kann man in einer Tabelle zusammenfassen.

p	$\neg p$
wahr	falsch
falsch	wahr

Beispiele.

- $\neg q$
- $\neg r$
- Die Aussage $\neg(5 = 2)$ wird durch $5 \neq 2$ gekürzt.

Definition Wenn p und q Aussagen sind, dann können wir folgende neue Aussagen definieren:

durch $p \wedge q$ sei die Aussage bezeichnet, die nur dann "wahr" ist, wenn beide Aussagen p, q gleichzeitig "wahr" sind, und in den restlichen Fällen (d.h. wenn entweder beide "falsch", oder eine "falsch" und die andere "wahr" ist) ist sie "falsch"; diese Aussage heißt **Konjunktion der Aussagen** p **und** q, den Symbol $p \wedge q$ lese p **und** q.

durch $p \vee q$ sei die Aussage bezeichnet, nur dann "wahr" ist, wenn mindestens eine der beide Aussagen p, q "wahr" ist, und in den restlichen Fall (d.h. wenn beide "falsch" sind), ist sie "falsch"; diese Aussage heißt **Disjunktion der Aussagen** p **und** q, den Symbol $p \vee q$ lese p **oder** q.

Die obere Definitionen kann man in Tabellen zusammenfassen.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Beobachtungen:

- Wir können leicht überprüfen, dass die Aussagen $p \wedge q$ und $q \wedge p$ stets die gleiche Wahrheitswerte haben, das bedeutet, dass bei Konjuktion von zwei Aussagen kommt an die Reihenfolge nicht an. Wir sagen, dass $\wedge$ **kommutativ** ist. $\vee$ ist auch kommutativ.

- Wenn p, q und r Aussagen abkürzen, dann ist $p \wedge q$ wieder eine Aussage, und man kann die Konjunktion der $p \wedge q$ und r bilden. Diese bezeichnen wir durch $(p \wedge q) \wedge r$. Man kann leicht überprüfen, dass die Aussagen $(p \wedge q) \wedge r$ und $p \wedge (q \wedge r)$ stets die gleiche Wahrheitswerte haben. Wir sagen, dass $\wedge$ **assoziativ** ist. $\vee$ ist auch assoziativ. Klammer setzen ist deswegen nicht nötig.

- Man kann leicht überprüfen, dass die Aussagen $(p \wedge q) \vee r$ und $p \wedge (q \vee r)$ nicht stets die gleiche Wahrheitswerte haben. Klammer setzen ist deshalb wichtig !

Definition Wenn p und q Aussagen sind, dann können wir folgende neue Aussagen definieren:

Implikation, $p \Rightarrow q$, lese p **impliziert** q,

Äquivalenz, $p \Leftrightarrow q$, lese p **ist äquivalent zu** q, zusammengefasst in der folgenden Tabelle.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	f	w	w

Satz (Rechenregeln für Aussagen) Seien p, q, r Aussagen. Dann haben folgende Aussagen stets den Wahrheitswert "wahr":

i) $p \wedge q \;\Leftrightarrow\; q \wedge p$,
$p \vee q \;\Leftrightarrow\; q \vee p$ ($\wedge$, $\vee$ sind **kommutativ**);

ii) $(p \wedge q) \wedge r \;\Leftrightarrow\; p \wedge (q \wedge r)$,
$(p \vee q) \vee r \;\Leftrightarrow\; p \vee (q \vee r)$, ($\wedge$, $\vee$ sind **assoziativ**);

ii) $(p \wedge q) \vee r \;\Leftrightarrow\; (p \vee r) \wedge (q \vee r)$,
$(p \vee q) \wedge r \;\Leftrightarrow\; (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, (**Distributivität zwischen** $\wedge$**,** $\vee$);

iv) $\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p) \wedge (\neg q)$,
$\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p) \vee (\neg q)$, (**De Morgan'sche Regeln**);

v) $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Beweis einer Implikation durch den Prinzip **Widerspruch**).

Beweis von ii) mithilfe Wahrheitswerttabelle

Definition Wenn eine Aussage p stets den Wahrheitswert “wahr” hat, nennen wir sie **Tautologie**, und wenn sie stets den Wahrheitswert “falsch” hat, nennen wir sie **Wiederspruch**.

Beispiele

- Wir können leicht überprüfen, dass die Aussage $p \vee (\neg p)$ eine Tautologie ist, und die Aussage $p \wedge (\neg p)$ ein Wiederspruch ist.
- “$5 = 2$” ist ein Wiederspruch, $(p \wedge q) \wedge r \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge (q \wedge r)$ ist eine Tautologie.

Denke an eine natürliche Zahl, nennen wir diese n. “n ist gerade” ist keine Aussage, solange man nicht präzisier, was n ist. Diese Ausdruck heißt **(einstelliges) Prädikat**, n heißt ihre (einzige) **Variable**, und wenn man n fixiert, wird es eine Aussage. Beziechnen wir diese Aussage durch $p(n)$. Wenn man n nicht fixiert, wird “ jede natürliche Zahl n ist gerade ” eine Aussage (die übrigens falsch ist), und auch “ es gibt mindestens eine natürliche Zahl n die gerade ist” auch eine Aussage (die übrigens wahr ist). Wir werden für solche Aussagen Abkürzungen einführen.

Definition Sei $p(x)$ ein Prädikat mit Variable x aus einem gegebenen Bereich. Die Aussage “ Für alle x aus dem Bereich ist $p(x)$ wahr” wird durch

$$\forall x : p(x)$$

abgekürzt, und die Aussage “Es gibt mindestens ein x aus dem Bereich für welche $p(x)$ wahr ist” wird durch

$$\exists x : p(x)$$

abgekürzt. Die Aussage “Es gibt genau ein x aus dem Bereich für welche $p(x)$ wahr ist” wird durch

$$\exists ! x : p(x)$$

abgekürzt. Das Symbol $\forall$ heißt **Allquantor**, und $\exists$ heißt **Existenzquantor**.

Beispiele.

- Sei $p(x)$ der Prädikat $2x^2 = 5$ mit Variable x aus dem Bereich der reellen Zahlen, die Aussage

  $$\exists x : p(x)$$

  ist wahr, und bedeutet, dass die Gleichung $2x^2 = 5$ mindestens eine Lösung in dem Bereich von reellen Zahlen hat.

- Der gleiche Prädikat mit Variable aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, dann ist die Aussage $\exists x : p(x)$ falsch.

- Der gleiche Prädikat mit Variable im Bereich der reellen Zahlen, dann ist die Aussage $\forall x : p(x)$ falsch. $\exists! x : p(x)$ ist auch falsch.

Wenn $p(x, y)$ ein zweistelliges Prädikat ist (d.h. hat zwei Variablen x, y), dann ist $\forall x : p(x, y)$ ein einstelliges Prädikat mit Variable y, aus dem man wieder eine Aussage mithilfe $\forall$ konstruiren kann. Wir schreiben diese als

$$\forall y (\forall x : p(x, y))$$

auf. Man kann sich darüber überzeugen, dass die Aussage

$$\forall y (\forall x : p(x, y)) \;\Leftrightarrow \forall x (\forall y : p(x, y))$$

stets wahr ist. Deswegen kann man in diesem Fall auf Klammersetzen und auf die Reihenfolge verzichten. Dagegen haben die Aussagen

$$\exists y (\forall x : p(x, y)) \qquad \text{und} \qquad \forall y (\exists x : p(x, y))$$

nicht stets den gleichen Wahrheitswert (untersuche z.B. den Fall wenn $p(x)$ der Prädikat $x + 3y = 2$ ist mit Variablen x, y aus dem Bereich der rationalen Zahlen). Es ist üblich, auf den Klammersetzen zu verzichten. Aber die Reihenfolge ist entscheidend !

Satz (Rechenregeln für Prädikate) Wenn $p(x)$ ein Prädikat mit Variable x ist, dann sind folgende Aussagen stets wahr:

$$\neg(\forall x : p(x)) \;\Leftrightarrow\; \exists x : \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x : p(x)) \;\Leftrightarrow\; \forall x : \neg p(x)$$

Beweis: logisch.
Beispiele.

- bestimme $\neg(\forall y (\forall x : p(x, y)))$

- bestimme $\neg(\exists y (\forall x : p(x, y)))$

- bestimme $\neg(\exists! x : p(x))$

3 Mengen

In diesem Kapitel werden wir mit zwei Objekten arbeiten: **Mengen** und Elementen, wobei eine Menge auch Element sein kann, und ein Element auch Menge sein kann. Die Menge ist die Gesamtheit seiner Elemente, und wenn ein Element x in einer Menge M erhalten ist, schreiben wir $x \in M$, lese x **ist Element der Menge** M. Wenn eine Menge durch auflisten ihrer Elemente gegeben ist, schreiben wir die Elemente in einem ge.. Klammer, z.B. $\{2,3\}$ ist die Menge, die aus den zwei Zahlen 2 und 3 als Elementen besteht. Auf die Reihenfolge kommt es nicht an, also $\{3,2\}$ wäre die gleiche Menge. Wenn wir diese Menge als M bezeichnen, können wir schreiben $2 \in M$, $3 \in M$ und $M = \{2,3\}$.

Definition Seien M_1, M_2 Mengen. Wir sagen, dass die Menge M_1 **Teilmenge der Menge** M_2 **ist** , wenn jedes Element der Menge M_1 auch Element der Menge M_2 ist. Anders gesagt, wenn folgende Aussage wahr ist:

$$\forall x \in M_1 : x \in M_2 \ ,$$

, oder wenn folgende Aussage stets wahr ist:

$$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2 \ .$$

Abkürzung: $M_1 \subset M_2$.

Beispiele

- Die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen ist eine Menge, wir bezeichnen diese als $\mathbb{N}$. Man kann dies als $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ schreiben.

- Bezeichne N_0 die Gesamtheit der geraden natürlichen Zahlen, N_1 die Gesamtheit der ungeraden natürlichen Zahlen. Dann sind N_0, N_1 Mengen. Die Gesamtheit von der zwei Mengen N_1, N_2 als Elementen ist wieder eine Menge, nennen wir diese M. Also ist $M = \{N_1, N_2\}$, $N_1 \in M$, $N_2 \in M$, $4 \in N_0$, $3 \in N_1$, $3 \notin N_0$ (das ist Abkürzung für $\neg(3 \in N_0)$), $\{N_1\} \subset M$, $\{N_2\} \subset M$, $\{2\} \not\subset M$, $M \subset M$.

- Wir bezeichnen durch $\{\}$ die Gesamtheit, die kein Element enthält; diese ist eine Menge, sie heißt **leere Menge**, und eine andere Bezeichnung für sie ist $\emptyset$. Es gilt: $2 \notin \emptyset$, $\emptyset \subset M$, wobei M beliebige Menge ist.

- Sei M eine Menge. Die Gesamstheit aller Teilmengen der M ist wieder eine Menge, und heißt **Potenzmenge der Menge** M, bezeichnet durch $\mathcal{P}(M)$.

- Wenn M eine Menge ist, und $p(x)$ ein Prädikat mit Variable x aus dem Bereich M, dann ist die Gesamtheit diejeniger x aus M, für welche die Aussage $p(x)$ wahr ist, wieder eine Menge. Wir geben diese Menge als

$$\{x \in M : p(x)\}$$

an. Zum Beispiel wird $N_1 = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist eine ungerade Zahl }\}$ wegen diesen und der ersten Punkt eine Menge sein.

Definition Seien A, B Mengen. Dann ist die Gesamtheit aller Elementen, die entweder in der Menge A oder in der Menge B enthalten sind, wieder eine Menge und heißt **Vereinigung der Mengen** A **und** B, wir bezeichnen diese durch $A \cup B$. Mit Symbolen ausgedrückt:

$$x \in A \cup B \ \Leftrightarrow \ (\ (x \in A) \vee (x \in B)\ )\ .$$

Die Gesamtheit aller Elementen, die in A und gleichzeitig in B enthalten sind, ist wieder eine Menge, und heißt **Durchschnitt der Mengen** A **und** B, bezeichnet $A \cap B$. Mit Symbolen ausgedrückt:

$$x \in A \cap B \ \Leftrightarrow \ (\ (x \in A) \wedge (x \in B)\ )\ .$$

Die Gesamtheit aller Elementen, die in A enthalten sind und gleichzeitig nicht in B enthalten sind, ist wieder eine Menge, und heißt **Differenz der Mengen** A **und** B, bezeichnet $A \setminus B$. Mit Symbolen ausgedrückt:

$$x \in A \setminus B \ \Leftrightarrow \ (\ (x \in A) \wedge (x \notin B)\ )\ .$$

Besipiele

-

Eine Menge kann zweierlei gegeben sein, z.B. $\{2, 3\} = \{3, 2\}$. Wenn wir nicht sofort wissen, dass durch M_1 und M_2 die gleiche Menge gegeben ist, schreiben wir die Aussage $M_1 = M_2$ auf und werden beweisen müssen, dass diese Aussage wahr ist. Dabei ist **Gleichheit der Mengen** A**,** B folgenderweise definiert:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)\ .$$

Satz (Rechenregeln für Mengen) Seien A, B, C Mengen. Dann sind folgende Aussagen wahr:

i) $A \cup B = B \cup A$,
$A \cap B = B \cap A$ ($\cup$, $\cap$ sind **kommutativ**);

ii) $(A\cap) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, ($\cap$, $\cup$ sind **assoziativ**);

ii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, (**Distributivität zwischen $\cap$, $\cup$**);

iv) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$,
$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$, (**De Morgan'sche Regeln**);

v) $(A \subset B) \;\Leftrightarrow\; (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$ (Beweis einer Teilmengenrelation durch den Prinzip **Widerspruch**).

Beweis von ii)

Definition Zwei Mengen M und N heißen **disjunkt**, wenn $M \cap N = \emptyset$.

Definition , $M \times N$: Die Gesamtheit aller Paare, deren erstes Glied Element der M und zweites Glied Element der N ist, ist eine Menge, heißt **Kartesisches Produkt der Mengen M, N** und ist bezeichnet durch $M \times N$. Wenn wir den Paar mit ersten Glied a und zweiten Glied b durch (a, b) bezeichnen (die Reihenfolge ist entscheidend !), dann können wir diese mit Symbolen aufschreiben:

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M \wedge y \in N\} \ .$$

Beispiele.

Veranschaulichung der Operationen $\cup, \cap, \setminus$ und Rechenregeln mit **Venn-Diagrammen**, Veranschaulichung der Operation $\times$ mit **kartesichen Koordinatensystemen**.

Beachte die formale Ähnlichkeit:
für Aussagen $p, q, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ und
für Mengen $M, N, \cup, \cap, \setminus, \subset, =$.

4 Zahlen

4.1 Natürliche Zahlen

Wir wollen die Gesantheit von 1,2,3, usw. beschreiben. Die **natürliche Zahlen** ist die Menge, welche mit folgenden Eigenschaften gegeben ist:

- 1 ist Element dieser Menge,
- jedes Element n dieser Menge hat den Nachfolger $n + 1$ welcher auch Element dieser Menge ist,
- 1 ist kein Nachfolger,
- jedes Element dieser Menge, der vercshieden von 1 ist, ist Nachfolger von genau einem Elementen dieser Menge.

Die Menge der natürlichen zahlen wird durch $\mathbb{N}$ bezeichnet. Wir können addieren $(+)$, multiplizieren $(\cdot)$ und vergleichen $(=, <)$. Für $x, y \in \mathbb{N}$ sind $x+y$ und $x \cdot y$ natürliche Zahlen, $x < y$ und $x = y$ sind Aussagen die entweder "wahr" oder "falsch" sind.

Wir können subtrahieren, aber nur so weit, dass es eigentlich Addition ist: wenn $x < y$, finde z mit $x + z = y$, diese z nennen wir $y - x$. Wir können dividieren, aber nur wenn es eigentlich Multiplikation ist: für x, y, wenn es z gibt, so dass $x \cdot z = y$, dann diese z nennen wir $y : x$ und sagen, dass y durch x teilbar ist.

$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$

Rechenregeln für Addition: kommutativ, assoziativ, 0 ist neutral;

Rechenregeln für Multiplikation: kommutativ, assoziativ, 1 ist neutral,

$$0 \cdot x = 0$$

Rechenregeln zwischen Addition und Multiplikation: Distributivität;

Rechenregeln für Vergleichen:

- $(\ x < y \ \wedge \ y < z\ ) \ \Rightarrow \ x < z$ **(Transitivität)**;
- $0 < 1$;
- für x, y es gilt genau eine von der folgenden Aussagen: $x = y \quad x < y \quad y < x$.

Bezeichne $x \leq y$, wenn entweder $x = y$ oder $x < y$ ist.

Rechenregeln zwischen Vergleichen und Addition:

$$(a < b \wedge c \leq d) \ \Rightarrow \ a + c < b + d, \qquad (a = b \wedge c = d) \ \Rightarrow \ a + c = b + d$$

Rechenregeln zwischen Vergleichen und Multiplikation:

$$(0 \le a < b \ \wedge \ 0 < c \le d) \ \Rightarrow \ a \cdot c < b \cdot d, \qquad (a = b \wedge c = d) \ \Rightarrow \ a \cdot c = b \cdot d$$

4.2 Ganze Zahlen

Ergänze $\mathbb{N}_0$ mit Symbolen: für $n \in \mathbb{N}$ sei x so dass $n + x = 0$, bezeichne diese x durch $-n$, sie ist **Inverse** zu n bezüglich Addition und Neutrale 0. Die Menge wird durch $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Wir können dann sofort addieren, multiplizieren; zum Vergleichen ordnen wir sie: $... < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < ...$ Rechenregeln von oben werden erhalten, $-n = (-1) \cdot n$.

4.3 Rationale Zahlen

Ergänze $\mathbb{Z}$ mit Symbolen: wenn $k \neq 0$, dann sei x so dass $k \cdot x = 1$, bezeichne diese x durch $\frac{1}{k}$, sie heißt **Inverse** zu k bezüglich Multiplikation und Neutrales 1. Um Multiplizieren zu können, muss man dann auch weitere Symbole einführen: $\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q}$. Die Menge wird durch $\mathbb{Q}$ bezeichnet. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, wobei $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ bezeichnen derselben Elemenet der Menge $\mathbb{Q}$ genau dann, wenn $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ (Gleichheit von zwei ganzen Zahlen).

Rechenregeln: Addition von Brüchen, Vergleichen von Brüchen, und die Rechenregeln von oben sind erhalten.

Die rationale Zahlen kann man an einem Zahlenstrahl veranschaulichen (Anfangspunkt 0, Einheit 1 und Richtung $<$ müssen gegeben sein), und als "Längen" mithilfe Lineal und Zirkel und gegebene Einheitslänge konstruiren.

Satz Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $x \cdot x = 2$.

Beweis mit Widerspruch. Wenn x eine rationale Zahl wäre, die $x \cdot x = 2$ erfüllt, dann können wir schreiben $x = \frac{p_0}{q_0}$ mit $p_0 \in \mathbb{Z}$ und $q_0 \in \mathbb{N}$. Wenn p_0 und q_0 beide durch 2 teilbar sind, vereinfachen wir den Bruch $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p_1}{q_1}$ $(p_1 = p_0 : 2, q_1 = q_0 : 2)$, es gilt immer noch dass $p_1 \in \mathbb{Z}$, $q_1 \in \mathbb{N}$. Wenn p_1 und q_1 beide durch 2 teilbar sind, vereinfachen wir weiter. Das tun wir so lange es möglich ist. Nach einigen Schritten können wir unsere Zahl x als $\frac{p}{q}$ schreiben, wobei $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ sind und mindestens eine von p, q ist nicht durch 2 teilbar.

Mit Hilfe der Rexchenregeln stellen wir die Aussage $x \cdot x = 2$ äquivalent um:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} &= \qquad 2 \\ p \cdot p &= \ 2 \cdot q \cdot q \end{aligned}$$

Diese letzte Zeile bedeutet Gleichheit von zwei ganzen Zahlen. Da die Zahl an der rechte Seite offensichtlich durch 2 teilbar ist, muss auch die Zahl an der linke Seite, also $p \cdot p$, durch 2 teilbar sein. Dann ist auch p durch 2 teilbar, weil falls p ungerade wäre, würde $p \cdot p$ auch ungerade sein, was nicht wahr ist. Also ist p durch 2 teilbar, damit ist $p \cdot p$ durch $2 \cdot 2 = 4$ teilbar, damit $2 \cdot q \cdot q$ durch 4 teilbar, damit $q \cdot q$ durch $4 : 2 = 2$ teilbar. Daraus folgt, dass q durch 2 teilbar ist.

Zusammengefasst, wir haben bekommen dass sowohl p auch q durch 2 teilbar sind. Das ist aber ein Widerspruch. Folglich kann solche Zahl x nicht existieren. □

4.4 Reelle Zahlen

Wir ergänzen $\mathbb{Q}$ mit Symbolen: z.B., x mit der Eigenschaften $x > 0$ und $x \cdot x = 2$, bezeichne diese x durch $\sqrt{2}$. Der obiger Satz sagt, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Um rechnen zu können, man muss viel mehr Symbole hinzufügen. Die reelle Zahl $\sqrt{2}$ kann man konstruiren (mit Lineal, Zirkel, Einheitslänge), die reelle Zahl π ("Länge" einer Halbkreislinie mit Radius 1) kann man nicht konstruiren. Die Menge wird durch $\mathbb{R}$ bezeichnet. Die reelle Zahlen kann man an einem Zahlenstrahl veranschaulichen (Anfangspunkt 0, Einheit 1, und Richtung $<$ müssen gegeben sein); zusätzlich zu $\mathbb{Q}$ sind es die "verstopfte Löcher".

Rechenregeln für reelle Zahlen: alle Rechenregeln von oben gelten.

Satz Es gibt keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $x \cdot x = -1$.

Beweis mit Widerspruch. Sei x eine reelle Zahl mit der Eigenschaft $x \cdot x = -1$. Es gibt drei Fälle: $0 < x$, $0 = x$, $x < 0$.

Wenn $x = 0$ wäre, dann müsste $-1 = x \cdot x = 0$ sein und damit $0 = 1 + (-1) = 1 + 0 = 1$ sein, was offensichtlich falsch ist. Also kann nicht $x = 0$ sein.

Wenn $0 < x$ wäre, dann müsste $0 = 0 \cdot x < x \cdot x = -1$ sein, und damit $1 = 1 + 0 < 1 + (-1) = 0$ sein, was ein Widerspruch ist. Also kann nicht $0 < x$ sein.

Wenn $x < 0$ wäre, dann müsste $0 = x + (-x) < 0 + (-x) = -x$ sein, damit $1 = -(-1) = (-1) \cdot (-1) = (-1) \cdot x \cdot x = x \cdot (-x) < 0 \cdot (-x) = 0$ sein, was wieder unmöglich ist.

Also kann solches x nicht existieren.

4.5 Komplexe Zahlen

Wir wollen $\mathbb{R}$ mit einem Symbol ergänzen: x mit der Eigenschaft $x \cdot x = -1$, bezeichne diese x durch i. Um rechnen zu können, braucht man noch mehr Symbole. Wenn man die Rechenregeln für Addition, Multiplikation behalten will, werden die Rechenregeln für $<$ verloren, wenn man Rechenregeln für das Vergleichen behalten will, werden die Rechenregeln zwischen Addition, Multiplikation und Vergleichen verloren.

Ein möglicher Modell: die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für ihre Elemente definieren wir eine neue Addition $\oplus$:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

und eine neue Multiplikation $\odot$:

$$(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = ((x_1 \cdot x_2) - (y_1 \cdot y_2), (x_1 \cdot y_2) + (x_2 \cdot y_1))$$

Hier hat die Klammer zwei Bedeutungen. Oft verzichten wir auf Klammersetzen und einigen uns, dass Multiplikation vor Addition ausgeführt wird. Rechenregeln für Addition: kommutativ, assoziativ, $(0, 0)$ ist neutral (heißt **Nullelement**), beachte, dass

$$(x, y) \oplus (-x, -y) = (0, 0) \ ,$$

Rechenregeln für Multiplikation: kommutativ, assoziativ, $(1, 0)$ ist neutral (**Einselement**), beachte, dass

$$(x, y) \odot (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}) = (1, 0)$$

sobald x, y nicht beide gleich 0 sind;
Rechenregeln zwischen Addition und Multiplikation: Distributivität;
Rechenregel für $(0, 1)$ (heißt **imaginäre Einheit**): $(0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0)$.

Für die bessere Schreib- und Lesbarkeit führen wir neue Bezeichnungen ein: x statt $(x, 0)$, $x + \mathrm{i}y$ statt (x, y), i statt $(0, 1)$; $+$ statt $\oplus$, $\cdot$ oder nichts statt $\odot$, Potenznotation. Dann der Rechenregel für die imaginäre Einheit bedeutet: $\mathrm{i}^2 = -1$, und der Satz von oben besagt, dass i keine reelle Zahl ist.

Die Menge der komplexen Zahlen wird durch $\mathbb{C}$ bezeichnet, und mit der obigen Notationen

$$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : x \in \mathbb{R} \ \wedge y \in \mathbb{R}\} = \{z : \exists x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} : z = x + \mathrm{i}y\} \ .$$

Ausserdem können wir die Menge der reellen Zahlen als " Teilmenge“ der Menge der komplexen Zahlen sehen, wenn wir $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \times \{0\}$ identifizieren.

Satz Für komplexe Zahlen gilt das Distributivgesetz, d.h. für beliebige $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ist folgende Aussage wahr:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \ .$$

Beweis.

4.6 Die Ebene

Wir bilden wieder die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und veranschaulichen uns diese als zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden mit Pfeilen und Elementen $0, 1$, und nennen ihre Elemente (x, y) **Punkte** mit Koordinaten x und y (in dieser Reihenfolge), oder **Vektoren** mit Anfangspunkt $(0, 0)$ und Endpunkt (x, y). Wir führen (Addition von zwei Vektoren)

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ein, und die ausgezeichnete Elemente $\mathrm{O} = (0, 0)$ heißt **Nullvektor** oder **Nullpunkt**, $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ heißen **Basisvektoren in Kartesischen Koordinatensystem**. Weiter führen wir noch für $r \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ den Element $r \odot (x, y) = (r \cdot x, r \cdot y)$ ein (Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar) . Der Eifachheit wegen schreiben wir $+$ statt $\oplus$ und $r(x, y)$ statt $r \odot (x, y)$).

Bemerkungen: Keine Multiplikation von zwei Vektoren, kein Vergleichen von Punkten. Alphabetische Ordnungs möglich, werden wir aber nicht benutzen.

Als Mengen kann man $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gleich setzen, aber als Struktur nicht. Die Veranschaulichung der Menge $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch das kartesisches Koordinatensystems heißt **Gauss'sche Zahlenebene**.

4.7 Zahlensysteme

Wir wollen natürliche, reelle Zahlen mit Symbolen ausdrücken, da z.B. 1, 1+1, 1+1+1, usw. für natürliche Zahlen zu aufwändig ist.

Römische Zahlen: mit Symbolen z.B. I, V, X, L, C drücken wir die Zahlen Eins, Fünf, Zehn, Fünfzig, Hundert aus und mit Kombinationen z.B. V+I=VI, V-I=IV können wir die restliche Zahlen ausdrücken.

Dezimaler System: Symbole $0, 1, 2, ..., 9$ heißen **Ziffern**, mit Kombinationen der Ziffern $9 + 1 = 10, 99 + 1 = 10 \cdot 10 = 100$, usw. drücken wir die restliche Zahlen aus, "Zehn" heißt **Basis**, Bedeutung:

$$163 = 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \ ,$$

Notation $(163)_{10}$.

Binärer System: Symbole $0, 1$ sind die Ziffern, Kombinationen $1+1 = 10$ (bedeutet zwei), $11+1 = 100$ (bedeutet "zwei mal zwei" also vier), $111+1 = 1000$ (bedeutet "zwei mal zwei mal zwei", also acht), usw., Basis ist "zwei", Bedeutung:

$$(1101)_2 = (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1)_{10} = (13)_{10} \ .$$

Wenn man die Zeit in Minuten und Sekunden angibt, arbeitet man in einem System mit Basis Sechzig, und benutzt die Ziffern der dezimalen Zahlensystem.

4.8 Axiome der natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen, bezeichnet durch $\mathbb{N}$, ist diejenige Menge, welche folgende Eigenschaften hat:

(A1) Jedes Element dieser Menge hat einen Nachfolger, welcher auch Element dieser Menge ist.

(A2) Es gibt ein Element dieser Menge, welcher kein Nachfolger ist. Nennen wir diese 1.

(A3) Jedes Element dieser Menge, der verschieden von 1 ist, ist Nachfolger von genau einem Elementen dieser Menge.

(I) **(Mathematische Induktion)** Wenn $K \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

i) 1 ist Element der Menge K (d.h. $1 \in K$),

ii) mit jedem Element k der Menge K ist der Nachfolger von k, genannt $k+1$, auch Element der Menge K (anders gesagt, die Aussage

$$k \in K \Rightarrow k+1 \in K$$

stets wahr ist),

dann enthält K schon alle natürliche Zahlen, d.h. $K = \mathbb{N}$.

Alle andere Rechenregeln der natürlichen Zahlen kann man aus diesen 4 Eigenschaften herleiten. Wenn man an diesen 4 Eigenschaften glaubt, kann man alle Rechenregeln begründen. Deswegen heißen diese 4 Eigenschaften die **Axiome** der natürlichen Zahlen.

Aufgabe Beweise, dass für alle natürliche Zahlen n gilt ! $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Lösung Beweis.

Wir testen zuerst, ob für z.B. $n=3$ die Aussage wahr ist. Das ist nicht nötig für den Beweis.

Wir betrachten die Menge $K = \{n \in \mathbb{N} : l_n = r_n\}$. Mithilfe mathematische Induktion wollen wir zeigen, dass $K = \mathbb{N}$ ist. Dazu muss man überprüfen, dass K die Eigenschaften i) **Induktionsanfang** und ii) **Induktionsschritt** hat.

4.9 Axiome der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ ist eine Menge,
0 und 1 sind zwei ausgezeichnete Elemente der $\mathbb{R}$,
$+, \cdot$ sind gesehen als binäre Operationen auf $\mathbb{R}$,
gegeben ist eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ mit $0 \notin P$ und $1 \in P$ (ihre Elemente heißen **positive** reellen Zahlen),

und folgende Eigenschaften (Axiome) gelten:

(G1+) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$,

(G2+) $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$,

(G3+) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists - x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$,

(G4+) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$;

(G1.) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(G2.) $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$,

(G3.) $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : x \cdot \frac{1}{x} = 1$,

(G4.) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$;

(K9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$;

(A1) für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist genau eine der folgenden drei Aussagen wahr:

$$x \in P, \qquad x = 0, \qquad -x \in P \ ;$$

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (\ x \in P \ \wedge \ y \in P\ ) \ \Rightarrow \ (\ x \cdot y \in P \ \wedge \ x + y \in P\ )$;

(S) für jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ welche **nach oben beschränkt ist** (d.h. $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall y \in M : y \leq x_0$), existiert eine **kleinste obere Schranke** $x_{M,s} \in \mathbb{R}$, d.h. ein Element $x_{M,s} \in \mathbb{R}$ welcher folgende Eigenschaften erfüllt:

(s1) $\forall y \in M : y \leq x_{M,s}$ und
(s2) $\forall x_1 \in \mathbb{R} : x_1 < x_{M,s} \ \Rightarrow \ \exists y_1 \in M : y_1 \not\leq x_1$.

(Wir schreiben $x < y$ für $y - x \in P$ und $x \leq y$ für $x = y \vee x < y$.)

Diese 12 Eigenschaften (Rechenregeln) heißen **Axiome der reellen Zahlen** und alle andere Eigenschaften der reellen Zahlen, auch die übrige Rechenregeln, kann man aus diesen Axiomen mit Hilfe logischer Folgerungen herleiten.

5 Relationen

Wir werden hier Beziehungen zwischen Mengen untersuchen. Wir haben schon gesehen, dass zwei Objekte in einer bestimmten Beziehung (Relation) stehen (oder nicht stehen) können, z.B. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $2 < 3$, $M_1 \subset M_2$, $x \in M$.

Definition Seien M_1, M_2 Mengen. Eine Teilmenge von $M_1 \times M_2$ heißt **(binäre, zweistellige) Relation zwischen** M_1 **und** M_2 (in dieser Reihenfolge). Notation $R \subset M_1 \times M_2$.

Mögliche Veranschaulichungen: Aufzählen, in Euklidischen Koordinatensystem (als Tabelle oder Graph), Pfeildiagramm. Spezieller Fall ist wenn $M_1 = M_2$.

Definition Sei $R \subset M_1 \times M_2$ eine Relation zwischen M_1 und M_2. Dann ist

$$\{(y, x) : y \in M_2 \wedge x \in M_1 \wedge (x, y) \in R\}$$

eine Relation zwischen M_2 und M_1, die sogenannte **inverse Relation zu** R, bezeichnet durch R_{-1}.

Definition Seien M_1, M_2, M_3 Mengen, $R \subset M_1 \times M_2$ eine Relation zwischen M_1 und M_2 und $S \subset M_2 \times M_3$ eine Relation zwischen M_2 und M_3. Dann ist

$$\{(m_1, m_3) \in M_1 \times M_3 : \exists m_2 \in M_2 \text{ so dass } (m_1, m_2) \in R \wedge (m_2, m_3) \in S\}$$

eine Relation zwischen M_1 und M_3, die sogenannte **Komposition von** R **(zuerst) und** S **(danach)** (in dieser Reihenfolge !), bezeichnet durch $S \circ R$.

Beispiele.

- Seien M_1 und M_2 beide die Menge von Schülern in einer Schule. Relationen sind: "in die gleiche Klasse zu gehen", "schwerer sein", "Person A weiß wie Person B heißt". Diese Beziehungen können wir auch auf der Menge M_1 der Schüler und Menge M_2 der Lehrer als Relationen zwischen M_1 und M_2 betrachten.
- Für $M_1 = M_2 = \mathbb{N}$ sind $=, <, \leq$, Teilbarkeit, $=$ modulo 2 Relationen.
- Für M_1 die Menge aller Punkte in der Ebene und M_2 die Menge aller Geraden in der Ebene ist "Punkt liegt auf der Gerade" eine Relation zwicschen M_1 und M_2.
- Für M_1 und M_2 die Menge der Familienmitglieder ist "Vorfahr zu sein" eine Relation. Der Familienstammbaum ist eine weitere mögliche Veranschaulichung (vergleiche mit Pfeilendiagramm).

Definition Seien M Menge, R eine Relation zwischen M und M. Die Relation R heißt **Äquivalenzrelation auf** M, wenn folgende Eigenschaften gelten:

i) $\forall x \in M$: $(x,x) \in R$ (**reflexiv**);

ii) $\forall x,y \in M$: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ (**symmetrisch**);

iii) $\forall x,y,z \in M$: $((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow ((x,z) \in R)$ (**transitiv**).

Bemerkung. Wenn man eine Äquivalenzrelation auf einer Menge hat, lässt sich diese Menge in disjunkte Teilmengen zerlegen, sogenannte **Äquivalenzklassen**. Umgekehrt, wenn eine Menge in disjunkte Teilmengen zerlegt ist, kann man die zugehörige Äquivalenzrelation auf der Menge einführen. Beispiel: $\mathbb{N} = \{n : n \text{ ist gerade}\} \cup \{n : n \text{ ist ungerade}\}$ für "= modulo 2".

Definition Seien M Menge, R eine Relation zwischen M und M. Die Relation R heißt **Ordnungsrelation auf** M, wenn folgende Eigenschaften gelten:

i) $\forall x \in M$: $(x,x) \in R$ (reflexiv);

ii) $\forall x,y \in M$: $((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow x = y$ (**antisymmetrisch**);

iii) $\forall x,y,z \in M$: $((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R) \Rightarrow ((x,z) \in R)$ (transitiv);

(iv) $\forall x,y \in M$: $(x,y) \in R \vee (y,x) \in R$ (**total**).

Wenn nur die Eigenschaften i), ii) und iii) erfüllt sind, heißt R **Teilordnung auf** M.

Bemerkung: Wenn man auf einer Menge M eine Teilordnungsrelation R hat, eine Teilmenge I von M und ein Element $m \in M$ gegeben sind, kann man entscheiden, ob m **obere Schranke für** I **bezüglich** R ist (oder nicht), d.h. ob folgende Aussage wahr ist (oder nicht):

$$\forall k \in I : (k,m) \in R \ .$$

Beispiel: Für die Menge $\mathbb{R}$ und die Ordnungsrelation $\leq$, $m = 3 \in \mathbb{R}$, $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \wedge x < 1\}$ (Abkürzung für diese Menge sei $(0,1)$). Dann ist 3 eine obere Schranke für $(0,1)$. Auch 1 ist eine obere Schranke für $(0,1)$. 1 ist keine obere Schranke für $(0,2)$, die Teilmenge $I = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ besizt keine obere Schranke.

Definition Seien M, N Mengen, R eine Relation zwischen M und N. Die Relation R heißt **Abbildung aus** M **in** N (oder **Funktion aus** M **in** N), wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist:

i) $((x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R) \ \Rightarrow \ y_1 = y_2$.

Wir nennen M Bereich der **Variable** und N Bereich der **Werte** von R.

Beispiele:

- aus der Schule bekannte Funktionen sind Abbildungen aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, der Graph der Funktion entspricht der Veranschaulichung der Menge $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ im Kartesischen Koordinatensystem.
- $\neg, \vee, \wedge, \cap, \cup, n \mapsto n+1, +, \cdot$ bilden auch Abbildungen aus einer geeigneten Menge in eine geeignete Menge.
- Wenn die Relation $R \subset M_1 \times M_2$ eine Abbildung ist, oft bezeichnen wir sie durch f statt R und schreiben $f : M_1 \to M_2$ statt $R \subset M_1 \times M_2$, $y = f(x)$ statt $(x, y) \in R$.

Definition Sei $R \subset M_1 \times M_2$ eine Relation zwischen M_1 und M_2. Für Teilmengen $A \subset M_1$, $B \subset M_2$ definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} R(A) &= \{m_2 \in M_2 : \exists m_1 \in A : (m_1, m_2) \in R\} \ , \\ R_{-1}(B) &= \{m_1 \in M_1 : \exists m_2 \in B : (m_1, m_2) \in R\} \ . \end{aligned}$$

Wenn R eine Abbildung ist, genannt f (also statt $(x, y) \in R$ schreiben wir $y = f(x)$), heißt die erste Menge **Bild der Menge A unter der Abbildung** f, bezeichnet $f(A)$, die zweite Menge **Urbild der Menge B unter der Abbildung** f, bezeichnet $f_{-1}(B)$. Weiter heißen

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in M_1 : \exists y \in M_2 : (x, y) \in R\}, \\ W_f &= \{y \in M_2 : \exists x \in M_1 : (x, y) \in R\}, \end{aligned}$$

Definitionsbereich, bezeichnet D_f, bzw. **Wertebereich**, bezeichnet W_f, der Abbildung f.

Definition Sei f eine Abbildung aus M_1 in M_2. Die Abbildung f heißt **injektiv von** M_1 (man sagt auch injektiv von den ganzen M_1) wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) $\forall x_1 \in D_f \ \forall x_2 \in D_f : \ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$,

ii) $D_f = M_1$.

Die Abbildung f heißt **surjektiv auf** M_2 (man sagt auch surjektiv auf die ganze M_2) wenn

iii) $W_f = M_2$.

Die Abbildung f heißt **bijektiv von** M_1 **auf** M_2 (man sagt auch bijektiv von den ganzen M_1 auf die ganze M_2) wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) $\forall x_1 \in D_f \ \forall x_2 \in D_f : \ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$,

ii) $D_f = M_1$,

iii) $W_f = M_2$.

Also f ist bijektiv genau dann, wenn sie injektiv und gleichzeitig surjektiv ist.

Beobachtung: $D_f = f_{-1}(M_2)$, $W_f = f(D_f) = f(M_1)$.

Beispiele

- Sei $M_1 = \mathbb{R}$ und $M_2 = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Als Relation geschrieben: $R = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$. Diese Relation ist eine Abbildung. $D_f = \mathbb{R} = M_1$, $W_f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \neq M_2$. Folglich ist f nicht surjektiv, insbesondere auch nicht bijektiv. Da $f(-1) = f(1)$ ist, ist f nicht injektiv.

- Sei $M_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$, $M_2 = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} = M_1$, $W_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \neq M_2$. Also f ist nicht surjektiv, und insbesondere nicht bijektiv. Außerdem ist f injektiv.

- Sei $M_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$, $f(x) = x^2$. Dann ist $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} = M_1$, $W_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} = M_2$. Folglich ist f surjektiv. Außerdem ist f injektiv, folglich ist f bijektiv.

Beispiel

- Betrachte $A = [1,2]$, $B = [-1,1]$, $f(x) = x^2$ aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Dann ist $f(A) = [1,4]$, $f_{-1}(B) = [0,1]$.

Bemerkung: Jede Abbildung ist eine Relation (eine spezielle). Als Relation hat sie eine Inverse, die wieder eine Relation ist (zwischen den vertauschten Mengen). Diese kann, aber muss nicht unbedingt eine Abbildung sein. Wenn sie es ist, heißt sie **inverse Abbildung**.

Satz Wenn die Relation $R \subset M_1 \times M_2$ eine Abbildung (aus M_1 in M_2) ist und diese Abbildung injektiv ist, dann ist die inverse Relation R_{-1} auch eine Abbildung (aus M_2 in M_1).

Beweis. Wir schreiben die inverse Relation zu R auf:

$$R_{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} \ .$$

Zu zeigen ist, dass

$$(y, x_1) \in R_{-1} \ \wedge \ (y, x_2) \in R_{-1} \ \Rightarrow \ x_1 = x_2 \ .$$

Seien $(y, x_1) \in R_{-1}$ und $(y, x_2) \in R_{-1}$. Dann sind $(x_1, y) \in R$ und $(x_2, y) \in R$. Da R injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$. Damit ist R_{-1} eine Abbildung. □

Satz Wenn die Relationen $R \subset M_1 \times M_2$ und $S \subset M_2 \times M_3$ Abbildungen sind, dann ist die Relation $S \circ R$ eine Abbildung aus M_1 in M_3.

Also die Komposition zweier Abbildungen ist eine Relation, welche wieder eine Abbildung ist, und heißt **Komposition von zweier Abbildungen** (Reihenfolge ist wichtig). Ein Beweis des Satzes findet man in [Brill, Satz 4.7].

Zur Notation. Wenn wir für $R \subset M_1 \times M_2$ $f : M_1 \to M_2$ und für $S \subset M_2 \times M_3$ $g : M_2 \to M_3$ schreiben, ist $g \circ f : M_1 \to M_3$, und $(m_1, m_3) \in S \circ R$ bedeutet $m_3 = (g \circ f)(m_1)$, wobei $(g \circ f)(m_1) = g(f(m_1))$ ist. Deswegen ist die Notation $S \circ R$ für die Komposition, wo zuerts R dann S durchgefürt ist, praktisch.

Wir haben auch schon zu zwei Objekten gleicher Art ein neues Objekt der selben Art hinzufügt, z.B. zu Mengen A und B die Menge $A \cap B$; zu Aussagen p und q die Aussage $p \vee q$; zu Zahlen x und y die Zahl $x + y$.

Definition Sei M eine Menge. Eine Abbildung aus $M \times M$ in M mit Definitionsbereich $M \times M$ heißt **zweistellige (binäre) Operation auf** M.

Beispiele:

- $M = \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$; geschrieben als Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$, geschrieben als Relation $R = \{((x_1, x_2), y) : x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = x_1 + x_2\} \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Addition ist eine zweistellige Operation auf $\mathbb{R}$. Auch auf $\mathbb{N}$, und anderen Zahlenmengen.

- Multiplikation ist eine zweistellige Operation auf $\mathbb{R}$; auch auf $\mathbb{C}$.

- Sei $M = \mathcal{P}(\mathcal{N})$, wobei N eine Menge ist. $\cap$, $\cup$ sind zweistellige Operationen der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ einer menge N.

- $\wedge$, $\vee$ sind zweistellige Operationen auf einer geeigneten Menge von Aussagen.

- Sei $M = \{f : f \text{ ist eine Abbildung aus } N \text{ in } N\ \}$, wobei N eine Menge ist. Wir wissen, dass für $f, g \in M$ ist $g \circ f \in M$. Also ist die Komposition eine zweistellige Operation auf der Menge M.

Definition Sei M eine Menge. Eine Abbildung aus M in M mit Definitionsbereich M heißt **einstellige Operation auf** M.

Beispiele:

- Auf $M = \mathbb{R}$ ist $f(x) = -x$ (Inverse bezüglich Addition) eine einstellige Operation.

- Auf $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f(x) = \frac{1}{x}$ (Inverse bezüglich Multiplikation) eine einstellige Operation.

- Sei $M = \mathcal{P}(N)$, wobei N eine Menge ist. Für $A \subset N$ ist $N \setminus A \subset N$ (**Komplement der Menge** A **in der Menge** N). Es geht um eine einstellige Operation auf M.

- $\neg$ ist eine einstellige Operation auf einer geeigneten Menge der Aussagen.

- Sei $M = \{R : R \subset N \times N\}$ die Menge aller Relationen zwischen N und N, wobei N eine Menge ist. Dann ist $R \mapsto R_{-1}$ ("Inverse bezüglich Komposition") eine einstellige Relation auf M.

6 Gruppe

Wir haben verschiedene Mengen mit verschiedenen zweistelligen Operationen betrachtet. Wir untersuchen diese auf folgende Eigenschaften: ob die Operation assoziativ ist, ob sie kommutativ ist, ob es ein neutrales Element gibt und ob jedes Element ein Inverses besitzt. Beispiele sind: $\mathbb{R}$ mit Addition $+$, das sind die Eigenschaften die als Axiome (G1+), (G2+), (G3+), (G4+) der reellen Zahlen aufgelistet sind.

Definition Sei M eine nichtleere Menge und $\diamond$ eine zweistellige Operation auf M. Die Struktur M mit $\diamond$ heißt **kommutative Gruppe** (auch **Abelsche Gruppe**) falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) für alle $a, b \in M$ gilt $a \diamond b = b \diamond a$
(**Kommutativität** der Operation $\diamond$ auf der Menge M);

ii) für alle $a, b, c \in M$ gilt $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$
(**Assoziativität** der Operation $\diamond$ auf der Menge M);

iii) es existiert ein $e \in M$ sodass für alle $a \in M$ gilt: $a \diamond e = a$ und $e \diamond a = a$
(e heißt **neutrales** Element der Menge M bezüglich der Operation $\diamond$);

iv) für jede $a \in M$ existiert ein $b \in M$ sodass $a \diamond b = e$
(b heißt **inverses** Element zu a bezüglich $\diamond$).

Falls nur ii), iii) und iv) erfüllt sind, heißt die Struktur **Gruppe** (oder nichtkommutative Gruppe), und falls nur die Eigenschaft ii) erfüllt ist, heißt M mit $\diamond$ eine **Halbgruppe**.

Beispiele:

- $\mathbb{R}$ mit $+$ ist wegen der Axiomen (G1+), (G2+), (G3+), (G4+) der reellen Zahlen eine kommutative Gruppe.

- $\mathbb{R}$ mit $\cdot$: Eigenschaften i), ii) sind wegen der Axiomen (G1.) und (G4.) erfüllt. Mit $e = 1$ ist Eigenschaft iii) wegen Axiom (G2.) erfüllt. Wir untersuchen iv). Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es wegen Axiom (G3.) eine Inverse $b = \frac{1}{a}$. Für $a = 0 \in \mathbb{R}$ gibt es aber keine Inverse, weil wenn es eine Inverse b gäbe, wäre $1 = \frac{1}{a} \cdot a = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$ (siehe Satz unten), und das ist ein Widerspruch. Folglich ist $\mathbb{R}$ mit $\cdot$ nicht eine Gruppe, weil nicht jedes Element einen Inversen hat.

- $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\cdot$. Zuerst ist zu nachprüfen, ob $\cdot$ eine zweistellige Operation auf der Menge M ist. Seien $a, b \in M$. Dann sind $a, b \in \mathbb{R}$

und damit $a \cdot b \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist, dass $a \cdot b \neq 0$ ist. Da $a \in M$, ist $a \neq 0$ und folglich besitzt nach Axiom (G3.) einen Inversen $\frac{1}{a}$. Genauso für b ist $\frac{1}{b} \in \mathbb{R}$. Mithilfe Axiomen (G1.)-(G4.) für reelle Zahlen bekommen wir

$$\begin{aligned} 1 = 1 \cdot 1 = (a \cdot \frac{1}{a}) \cdot (b \cdot \frac{1}{b}) = (\frac{1}{a}a)(b\frac{1}{b}) = \frac{1}{a}(a(b\frac{1}{b})) = \frac{1}{a}((ab)\frac{1}{b}) \\ = \frac{1}{a}(\frac{1}{b}(ab)) = (\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}) \cdot (a \cdot b) \ . \end{aligned}$$

Wenn jetzt $a \cdot b = 0$ wäre, würde man auf der rechte Seite wegen den Satzes unten 0 bekommen und den Widerspruch $1 = 0$. Also ist $a \cdot b \neq 0$ und damit $a \cdot b \in M$. Zusammengefasst, $\cdot$ ist eine zweistellige Operation auf der Menge M. Webgen Axiomen (G1.)-(G4.) sind die Eigenschaften i)-iv) erfüllt. Folglich ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Multiplikation eine kommutative Gruppe. Wir haben dies aus den Axiomen der reellen Zahlen hergeleitet.

- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ ist eine kommutative Gruppe. Wir werden dies beweisen, wobei nur die Rechenregeln für reelle Zahlen benutzt werden. Die Assoziativität lassen wir ohne Beweis, da dieser lange Rechnungen braucht.

Satz $\forall y \in \mathbb{R} : y \cdot 0 = 0$

Beweis. Aus Axiomen der reellen Zahlen.

$$\begin{aligned} y \cdot 0 &= (y \cdot 0) + 0 = y \cdot 0 + (y \cdot 0 + (-y \cdot 0)) = (y \cdot 0 + y \cdot 0) + (-y \cdot 0) \\ &= y \cdot (0 + 0) + (-y \cdot 0) = y \cdot 0 + (-y \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

- $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$, definiere $\overline{i} \oplus \overline{j} = \overline{k}$, wobei k durch $i + j \in \overline{k}$ bestimmt ist. Rechenregeln in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Man muss Assoziativität nachprüfen, ansonst liest man aus dieser Tabelle ab, dass $\mathbb{Z}_3$ mit $\oplus$ eine kommutative Gruppe ist.

- $\mathbb{Z}_3 \setminus \{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \overline{2}\}$ mit $\odot$: Man kann folgender Tabelle entnehmen, dass es eine kommutative Gruppe ist.

$\odot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

- $M = \{f, g\}$, wobei $f(1) = 1, f(2) = 2, g(1) = 2, g(2) = 1$ sind bijektive Abbildungen aus $\{1, 2\}$ auf $\{1, 2\}$, mit Komposition $\circ$:

$\circ$	f	g
f	f	g
g	g	f

  Diese ist eine kommutative Gruppe. Man beobachtet, dass strukturell sind die Gruppen S_2 mit $\circ$ und $\mathbb{Z}_3 \setminus \{\overline{0}\}$ mit $\odot$ "identisch", man sagt **homomorph**.

- Sei M die Menge der Züge auf dem Rubik-Würfel, und betrachten wir die Komposition. Die Menge M hat unendlich viele Elemente. Es ist einzusehen, dass Komposition von zwei Zügen wieder ein Zug ist, dass diese zweistellige Operation auf M nicht kommutativ ist, dass sie assoziativ ist. "Nichts tun" ist das neutrale Element. Mit angepasster Notation kann man die Züge aufschreiben, und Inverse Elemente berechnen.

- Drehungen einer Matratze mit Kopfteil und zwei Schichten, Komposition als binäre Operation. Tabelle:

$\circ$	D_3	D_2	D_1	D_0
D_3	D_0	D_1	D_2	D_3
D_2	D_1	D_0	D_3	D_2
D_1	D_2	D_3	D_0	D_1
D_0	D_3	D_2	D_1	D_0

  Es ist eine kommutative Gruppe.

- $\mathbb{N}_0$ mit $+$ ist eine kommutative Halbgruppe. Die ganze Gruppentabelle kann man nicht aufschreiben, da die Menge $\mathbb{N}_0$ unendlich viele Elemente hat:

$+$	0	1	2	3	...
0	0	1	2	3	...
1	1	2	3	4	
2	2	3	4	5	
3	3	4	5	6	
...					

Die gleiche (!) Tabelle, aber die Zahlen in binären Zahlensystem kodiert, lautet:

$+$	$(0)_2$	$(1)_2$	$(10)_2$	$(11)_2$	...
$(0)_2$	$(0)_0$	$(1)_2$	$(10)_2$	$(11)_2$	...
$(1)_2$	$(1)_2$	$(10)_2$	$(11)_2$	$(100)_2$	
$(10)_2$	$(10)_2$	$(11)_2$	$(100)_2$	$(101)_2$	
$(11)_2$	$(11)_2$	$(100)_2$	$(101)_2$	$(111)_2$	
...					

,

Satz (Rechenregeln für Gruppe) Sei G mit $\diamond$ eine Gruppe. Dann gelten:

i) Wenn $a\diamond b = e$ (d.h. b ist Inverses zu a), so gilt auch $b\diamond a = e$.

ii) e ist eindeutig bestimmt (das heißt, es gibt nur ein Element mit den gegebenen Eigenschaften).

iii) Das inverse Element zu a ist eindeutig bestimmt, wir bezeichnen es mit a_{-1}.

iv) Für alle $a \in G$ ist $(a_{-1})_{-1} = a$.

v) Für alle $a, b \in G$ gilt $(a\diamond b)_{-1} = (b_{-1})\diamond(a_{-1})$.

vi) Für alle $a, b \in G$ hat die Gleichung $a\diamond x = b$ genau eine Lösung $x \in G$, und zwar $x = a_{-1}\diamond b$.

Beweis

i) Nehmen wir an, dass $a\diamond b = e$. Zu b gibt es ein Inverses c: $b\diamond c = e$. Es gilt weiter $c = e\diamond c = (a\diamond b)\diamond c = a\diamond(b\diamond c) = a\diamond e = a$. Folglich ist $b\diamond a = b\diamond c = e$.

ii) Wenn f auch ein neutrales Element wäre, dann gilt

$$\forall a \in G: \; a \diamond f = a$$

und insbesondere auch für $a = e$, also $e \diamond f = e$. Dann wegen i) gilt auch $f \diamond e = e$. Da aber e neutrales ist, gilt $f \diamond e = f$. Damit $e = f \diamond e = f$.

v) Wir berechnen

$$\begin{aligned}(a \diamond b) \diamond (b_{-1} \diamond a_{-1}) &= ((a \diamond b) \diamond b_{-1}) \diamond a_{-1} = (a \diamond (b \diamond b_{-1}) \diamond a_{-1} \\ &= (a \diamond e) \diamond a_{-1} = a \diamond a_{-1} = e\end{aligned}$$

vi) Zuerst prüfen wir nach, dass das Element $a_{-1} \diamond b \in G$ Lösung ist. Wir setzen ein und rechnen:

$$a \diamond (a_{-1} \diamond b) = (a \diamond a_{-a}) \diamond b = e \diamond b = b \; ,$$

folglich ist $a_{-1} \diamond b$ eine Lösung.

Zunächst prüfen wir nach, dass es keine andere Lösung geben kann. Sei $x \in G$ eine Lösung, d.h. es gilt $a \diamond x = b$. Sei a_{-1} die Inverse zu a (diese ist eindeutig wegen iii)). Wir rechnen:

$$a_{-1} \diamond b = a_{-1} \diamond (a \diamond x) = (a_{-1} \diamond a) \diamond x = e \diamond x = x \; .$$

Also muss $x = a_{-1} \diamond b$ sein.

Für den Rest siehe [Brill, Satz 8.1].

Notation: für Addition schreibt man $+$ statt $\diamond$, 0 statt e und $-a$ statt a_{-1}; für Multiplikation schreibt man $\cdot$ statt $\diamond$, 1 statt e und a^{-1} oder $\frac{1}{a}$ statt a_{-1}; für Komposition schreibt man $\circ$ statt $\diamond$, i oder I (identische Abbildung) statt e und a_{-1} bleibt a_{-1}.

Anwendung: vi) sagt, wie man Gleichungen löst: $2 \cdot x = 3$ als $x = 2^{-1} \cdot 3$, $2 + x = 3$ als $x = (-2) + 3$, $f \circ x = g$ als $x = f_{-1} \circ g$ (f, g Abbildungen). Bei der Zusammenstellung des Rubik-Würfels geht es um die Gleichung $a \diamond x = e$, aber a ist nicht bekannt, nur seine finale Wirkung auf dem Rubik-Würfel! Diese Aufgabe ist also wesentlich schwieriger, als die obige Gleichungen.

7 Matrizen

Bezeichne $\mathbb{R}^n$ das kartesische Produkt von n Stück Mengen $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, also $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, usw. und wir schreiben z.B. die Elemente von $\mathbb{R}^3$ als (x_1, x_2, x_3) (statt $((x_1, x_2), x_3)$).

Definition Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine **Matrix mit** m **Zeilen und** n **Spalten, von reellen Zahlen** ist eine Abbildung von $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ in $\mathbb{R}$. Wegen Veranschaulichung werden wir statt des Auflistens von den Werten $f((i, j))$ für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ folgendes Schema schreiben:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

wobei $a_{i,j} = f((i, j))$ reelle Zahlen sind, und kürzen mit A, schreiben $a_{i,j} = (A)_{i,j}$. Wir bezeichnen die Menge aller dieser Matrizen durch $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$. Wenn $n = m$ ist, dann heißt A **quadratische Matrix**.

Insbesondere kann man einen Vektor (x_1, x_2) der Ebene mit einer 1 Zeile und 2 Spalten-Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ identifizieren und **Zeilenvektor** nennen, und die Matrix $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ **Spaltenvektor**.

Die Menge $\mathbb{R}$ darf durch eine andere Menge ersetzt werden, z.B. für $\mathbb{C}$ bekommen wir **Matrizen von komplexen Zahlen**.

Definition Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Für $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ definieren wir die Matrix C folgenderweise:

$$(C)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}\ .$$

Diese Matrix heißt **Summe von** A **und** B und ist durch $A + B$ bezeichnet.

Satz Sei $n, m \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$. Es gilt:

i) $A + B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$; folglich ist $+$ eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$.

ii) $+$ ist assoziativ,

iii) $+$ ist kommutativ,

iv) die Matrix O, mit $(O)_{i,j} = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, ist neutrales Element bezüglich $+$, heißt **Nullmatrix**;

v) jedes Element besitzt eine Inverse bezüglich $+$,

vi) die Gleichung $A + X = B$ für gegebene A, B und unbekannte $X \in$ besitzt die einzige Lösung $X = (-A) + B$, wobei $-A$ die Inverse zu A bezüglich $+$ bezeichnet.

Beweis. i) klar, iii) folgt aus der Definition und Kommutativität der $+$ für reelle Zahlen, iii) ähnlich, iv) klar, v) klar, vi) folgt aus dem Satz über Rechenregeln für Gruppen, da nach i)-v) ist $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ mit $+$ eine kommutative Gruppe.

Definition Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$. Für $A \in \mathrm{Mat}(m \times k, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(k \times n, \mathbb{R})$, definieren wir die Matrix C folgenderweise:

$$(C)_{i,j} = (A)_{i,1} \cdot (B)_{1,j} + (A)_{i,2} \cdot (B)_{2,j} + ... + (A)_{i,k} \cdot (B)_{k,j}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\} .$$

Dann ist $C \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, heißt **Produkt von** A **(links) und** B **(rechts)**, bezeichnet $A \cdot B$.

Satz Sei $m, n, k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}(m \times k, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(k \times n, \mathbb{R})$. Es gelten folgende Aussagen:

i) $A \cdot B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$;

ii) $\cdot$ ist eine zweistellige Operation auf der Menge $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, welche assoziativ ist.

iii) In allgemeinen ist $\cdot$ nicht kommutativ.

iv) Die Matrix E, mit $(E)_{i,j} = 0$ wenn $i \neq j$ und $(E)_{i,i} = 1$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ist neutrales Element der Menge $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ bezüglich $\cdot$ und heißt **Einheitsmatrix**.

v) Falls A eine Inverse bezüglich $\cdot$ besitzt (sei diese durch A^{-1} bezeichnet, A heißt dann **invertierbar**), dann besitzt die Gleichung $A \cdot X = B$ für gegebene $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und unbekannte $X \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ die einzige Lösung $X = A^{-1} \cdot B$.

vi) für $A \in \mathrm{Mat}(m \times k, \mathbb{R})$, $B_1, B_2 \in \mathrm{Mat}(k \times n, \mathbb{R})$ gilt

$$A \cdot (B_1 + B_2) = (A \cdot B_1) + (A \cdot B_2) \ ,$$

und für $A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}(m \times k, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(k \times n, \mathbb{R})$ gilt

$$(A_1 + A_2) \cdot B = (A_1 \cdot B) + (A_2 \cdot B)$$

(**Distributivität zwischen** $\cdot$ **und** $+$).

Zu Beweis:

i) ist klar;

Zu ii): dass $\cdot$ eine zweistellige Operation auf der gegebenen Menge ist, folgt aus i) für den speziellen Fall $n = m = k$. Die Assoziativität ist ohne Beweis, weil lang (siehe [???]).

Zu iii): Es reicht ein Beispiel zu finden, wo $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Zu iv): folgt aus einfachem Nachrechnen.

Zu v): Multipliziere die Gleichung mit A^{-1} von links.

Zu vi): man muss beide Gleichungen nachprüfen, da $\cdot$ nicht kommutativ ist. Siehe [???].

7.1 Gauss-Algorithmus

Ziel ist zu bestimmen, ob eine gegebene quadratische Matrix bezüglich Multiplikation eine Inverse besitzt oder nicht.

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Wir schreiben die Einheitsmatrix E rechts neben A auf, und haben ein Schema $A|E$. Wir Formen das ganze Schema $A|E$ mit elementaren Zeilenumformungen solange um, bis wir auf der linke Seite (d.h. an der Stelle von A) die Einheitsmatrix E bekommen. Wenn das geht, steht auf der linke Seite (d.h. an der Stelle von E) die Inverse zu A bezüglich Multiplikation. Wenn das nicht möglich ist, hat A keine Inverse bezüglich Multiplikation.

Elementare Zeilenumformungen sind:

(EZU1) Vertauschen von zwei Zeilen,

(EZU2) eine Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) multiplizieren,

(EZU3) ein Vielfaches (λ-faches, $\lambda \in \mathbb{R}$) einer Zeile zu eine andere Zeile addieren.

Diese Zeilenumformungen entsprechen der Multiplikation der umformenden Matrix mit einer Matrix Z spezieller Gestalt von links. Beispielweise seien

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Z_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren mit Z_1 von links wirkt als Vertausch der 2. und 3. Zeile, also als eine EZU1. Dabei ist die Matrix Z_1 aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen von der 2. und 3. Zeile entstanden.

Multiplizieren mit Z_2 von links wirkt als Multiplizieren der 1. Zeile mit 5, also als eine EZU2. Die Matrix Z_2 ist aus der Einheitsmatrix durch Multiplizieren der 1. Zeilen mit 5 entstanden.

Multiplizieren mit Z_3 von links wirkt als Addieren des 2-faches der 1. Zeile zur 2. Zeile, also als eine EZU3. Die Matrix Z_3 ist aus der Einheitsmatrix so entstanden, das man das 2-faches der 1. Zeile zur 2. Zeile addiert hat.

Zu beachten ist, dass diese Matrizen Z_1, Z_2, Z_3 jeweils eine Inverse bezüglich Multiplikation haben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis, dass man mit dem Gauss-Algorithmus die Inverse bekommt: Gegeben ist die Matrix A. Am Anfang haben wir die Matrix A links, die Matrix E rechts. Nach der ersten Umformung haben wir links $Z_1 \cdot A$, rechts $Z_1 \cdot E$, nach dem zweiten Schritt links $Z_2 \cdot Z_1 \cdot A$, rechts $Z_2 \cdot Z_1 \cdot E$, nach dem k-ten Schritt links $Z_k \cdot \ldots Z_2 \cdot Z_1 \cdot A$, rechts $Z_k \cdot \ldots Z_2 \cdot Z_1 \cdot E$, wobei alle Matrizen Z_i den speziellen Gestalt einer EZU haben. Wenn $Z_k \cdot \ldots Z_2 \cdot Z_1 \cdot A = E$, dann sei $B = Z_k \cdot \ldots Z_2 \cdot Z_1$. Es gilt $B \cdot A = E$. Nach dem Satz Rechenregeln für Gruppe, Teil i), folgt aus $B \cdot A = E$, dass $A \cdot B = E$ ist. Das bedeutet, dass B die Inverse zu A bezüglich Multiplikation ist. Dabei B ist gerade die Matrix, welche rechts entstanden ist: $Z_k \cdot \ldots Z_2 \cdot Z_1 \cdot E = B \cdot E = B$.

7.2 Ausblicke

Man kann die ganze obige Theorie auch dann durchführen, wenn die Menge $\mathbb{R}$ durch der Menge $\mathbb{C}$ ersetzt ist. Wenn $\mathbb{R}$ durch eine allgemeine Menge M ersetzt ist (z.B. durch eine Menge von Personen, oder Namen), man kann immer noch Matrizen definieren, aber ihre Addition, Multiplikation nicht mehr.

Definition Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir eine neue Matrix, bezeichnet durch $\lambda \cdot A$, durch

$$(\lambda \cdot A)_{i,j} = \lambda \cdot A_{i,j}, \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Diese heißt λ-faches der Matrix A und $\cdot$ heißt **Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar**.

Man kann eine reelle Matrix A mit einem komplexen Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ multiplizieren, aber man muss beachten, dass das Resultat $\lambda \cdot A$ eine komplexe Matrix wird!

Auch weitere Operationen mit Matrizen sind in Anwendungen benutzt. Das komponentenweise Produkt von zwei Matrizen heißt **Hadamard-Produkt**

$$(A \odot B)_{i,j} = (A)_{i,j} \cdot (B)_{i,j}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

und ist in verlustbehaftetete Datenkompression, wie JPEG, benutzt.

Das **Min-Plus-Matrixmultiplikation** von zwei Matrizen ist folgenderweise definiert: für $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ definiere die Matrix H durch

$$(H)_{i,j} = \text{die kleinste der Zahlen } a_{i,1}+b_{1,j}, a_{i,2}+b_{2,j}, \ldots, a_{i,n}+b_{n,j}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Dann ist $H \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Dieses Produkt ist zur Berechnung des kürzesten Weges benutzt.

8 Körper

Wir bauen weitere algebraische Strukturen auf. Leitmotiv ist $\mathbb{R}$ (auch $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$) mit zwei binären Operationen $+$ und $\cdot$.

Definition Sei K eine Menge und seien $+$ und $\cdot$ zwei binäre Operationen auf K. Die Struktur K mit $+$ und $\cdot$ heißt **Körper**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) K mit $+$ ist eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element 0;

ii) $K \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1;

iii) Es gilt das **Distributivgesetz** zwischen $+$ und $\cdot$:

$$\forall a, b, c \in K : \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Falls stattdessem nur die Eigenschaften

i) K mit $+$ ist eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element 0;

ii') K mit $\cdot$ ist eine Halbgruppe;

iii') Es gilt das **Distributivgesetz** zwischen $+$ und $\cdot$:

$$\forall a, b, c \in K : \ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

gelten, dann heißt K mit $+$ und $\cdot$ ein **Ring**.

Der Bequemheit wegen wird $\cdot$ immer vor $+$ ausgeführt und auf Klammersetzen verzichtet. 0 wird **Nullelement** und 1 wird **Einselement** genannt.

Beispiele:

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $+$ und $\cdot$ sind jeweils Körper.
- $\mathbb{Z}$ mit $+$ und $\cdot$ ist ein Ring.
- $\mathbb{Z}_3$ mit $+$ und $\cdot$ ist ein Körper; siehe Tabellen für $+$, $\cdot$.
- Ist p Primzahl, dann ist $\mathbb{Z}_p$ mit $+$ und $\cdot$ ein Körper (ohne Beweis).
- Allgemein ist $\mathbb{Z}_n$ mit $+$ und $\cdot$ ein Ring.

- Der wesentlicher Unterschied zwischen einem Körper und einem Ring ist, ausser eventuell fehlende Kommutativität, dass man in einem Körper für jedes $a \neq 0$ eine Inverse bezüglich der Multiplikation finden kann und in einem Ring nicht.

- Die Menge reeller 2×2-Matrizen spezieller Gestallt

  $$\{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R} : (A)_{1,1} = (A)_{2,2} \wedge (A)_{1,2} = -(A)_{2,1}\}$$

  mit $+$ und $\cdot$ ist ein Körper (siehe Übung). Diesen Körper kann man mit dem Körper $\mathbb{C}$ mit $+$ und $\cdot$ identifizieren. Man sagt, dass diese zwei Körper sind **isomorph**.

Satz (Rechenregeln für Körper) In jedem Körper K mit $+$ und $\cdot$ gelten folgende Aussagen:

i) Für jedes $a \in K$ ist $0 \cdot a = 0$.

ii) Die Inverse zu $a \in K$ bezüglich $+$ ist $(-1) \cdot a$, wobei -1 die Inverse zu 1 bezüglich $+$ ist. Also: $-a = (-1) \cdot a$.

iii) **Nullteilerfreiheit**:

$$\forall a, b \in K : \ a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0) \ .$$

Ausserdem gelten natürlich die Rechenregeln für Gruppen.

Beweis i) ohne Beweis; man könnte den Beweis für reelle Zahlen anpassen, siehe [Brill, Satz 8.8].

ii) ohne Beweis, als Übung empfohlen.

iii): Wenn $a = 0$, dann sind wir fertig. Wenn $a \neq 0$, dann sei $a^{-1} \in K$ die Inverse zu a bezüglich $\cdot$ (diese existiert nach der Eigenschaft ii) in der Definition). Wegen i) gilt, der Vorasssetzung $a \cdot b = 0$, Assoziativität, Eigenschaft der inverse und der Einselement gilt:

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b \ .$$

Folglich ist in diesem Fall $b = 0$ und die Aussage ist bewiesen. $\square$

9 Vektorraum

Leitmotiv: die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Addition von zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ und Multiplikation eines Vektors $v \in \mathbb{R}^2$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition Seien V und K nichtleere Mengen. Seien $+$ und $\cdot$ zweistellige Operationen auf K, $\oplus : V \times V \to V$ eine zweistellige Operation auf V und $\odot : K \times V \to V$ eine Abbildung (alle diese Abbildungen schreiben wir als Operationen). Die Struktur V mit $K, \oplus, \odot$ heißt **Vektorraum über** K, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) K mit $+$ und $\cdot$ ist ein Körper, bezeichne 0_K sein Nullelement und 1_K sein Einselement;

ii) V mit $\oplus$ ist eine kommutative Gruppe, sein neutrales Element sei durch 0_V bezeichnet, die Inverse zu v durch $-v$;

iii) es gelten für $\lambda, \mu \in K$, $v, w \in V$ folgende Gleichheiten:

$$\lambda \odot (v \oplus w) = (\lambda \odot v) \oplus (\lambda \odot w),$$

$$(\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v),$$
$$(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v),$$
$$1_K \odot v = v.$$

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die Elemente von K heißen **Skalare**, $\oplus$ heißt **Addition von Vektoren**, $\odot$ heißt **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar**. 0_V heißt **Nullvektor**.

Der Bequemheit wegen wird $\oplus$ mit $+$ bezeichnet, $\odot$ mit $\cdot$ bezeichnet oder weggelassen. 0_V und auch 0_K werden als 0 bezeichnet. Also $+, \cdot$ und 0 haben je nach Kontext verschiedene Bedeutungen! Zur Unterscheidung sind Vektoren oft mit $\overrightarrow{v}$, $\underline{v}$, $\mathbf{v}$ bezeichnet, jedoch nicht immer.

Beispiele:

- Die Ebene $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum.
- $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ ist eine Vektorraum ($n \in \mathbb{N}$). Man kann $\mathbb{R}$ durch einen anderen Körper, z.B. $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Z}_3$ ersetzen, es wird immer noch ein Vektorraum (über den entsprechenden Körper).
- $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ ist eine Vektorraum. Man kann $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) ersetzen, es wird immer noch ein Vektorraum.

- $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ ja, $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ ja, $\mathbb{R}$ über $\mathbb{C}$ nicht !
- $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ ja, $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ ja, $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{R}$ nicht, $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$ ja. !
- $M = \{f : f \text{ ist eine Abbildung von } [0,1] \subset \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{R}\}$, definiere Addition, Multiplikation mit Skalar aus $\mathbb{R}$. Dann ist M ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Satz (Rechenregeln für Vektorräume) In einem Vektorraum V über K gelten für $v \in V$ und $\lambda \in K$ folgende Aussagen:

i) $0_K \cdot v = 0_V$ und $\lambda \cdot 0_V = 0_V$,

ii) $-v = (-1_K) \cdot v$,

iii) $\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow (\lambda = 0_K \vee v = 0_V)$.

Ausserdem gelten natürlich die Rechenregeln für Gruppen und Körper.

Ohne Beweis (Ähnlich wie bei Körper), siehe [Brill, Satz 10.1].

Definition Sei V ein Vektorraum über K, und seien $v_1, \dots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$. Jedes Element von V der Form

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ heißt eine **Linearkombination der Vektoren** $v_1, \dots, v_n$. Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$ heißt die **lineare Hülle der Vektoren** $v_1, \dots, v_n$ und wird durch $\mathrm{lin}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ bezeichnet. Also

$$\begin{aligned}\mathrm{lin}(v_1, \dots, v_n) &= \{\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} \\ &= \{v \in V : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n\} \subset V\ .\end{aligned}$$

Wir setzen $\mathrm{lin}() = \{0_v\}$

Beobachtung: Die lineare Hülle ist mit der Struktur (die Operationen) aus V ein Vektorraum über den Körper K, wir sagen, dass es ein **Untervektorraum** des V ist.

Satz Sei ein System von n Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in einem Vektorraum V über K gegeben, und wir betrachten folgende Umformungen des Systems:

(U1) Vertauschen von zwei Vektoren.

(U2) Ersetzen eines Vektors durch sein λ-faches mit $\lambda \neq 0$.

(U3) Ersetzen eines Vektors v_i durch $v_i + \lambda v_j$, wobei $\lambda \in K$.

Dann gilt: Die lineare Hülle des originalen Systems ist gleich der linearen Hülle des neuen Systems.

Zu Beweis: Beachte, dass die Rückumformungen sind wieder der obigen Form. Für (U1), (U2) ist die Aussage des Satzes klar. Für (U3) folg sie aus der Rechenregeln,

$$\lambda_i(v_i + \lambda v_j) + \lambda_j v_j = \lambda_i v_i + (\lambda_i \lambda + \lambda_j) v_j \ ,$$

und dass die Gleichung $\lambda_i \lambda + \lambda_j = \mu_j$ in dem Körper K eindeutig lösbar für die Unbekannte λ_j ist. Durch das mehrfaches benutzen von (U3) kann man einen Vektor v_i durch die Summe von v_i und einer Linearkombination von den restlichen Vektoren ersetzen.

Definition Sei V ein Vektorraum über K, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wir sagen, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ **linear unabhängig** sind, falls folgende Aussage wahr ist:

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V \Rightarrow (\lambda_1 = 0_K \wedge \cdots \wedge \lambda_n = 0_K).$$

Sonst sagen wir, dass die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ **linear abhängig** sind. Also, $v_1, \ldots v_n$ sind linear abhängig genau dann, wenn

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V \ \wedge \ \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \lambda_i \neq 0_K \ .$$

Beispiele

- in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$: $(1,2,3), (0,2,3), (0,0,3)$ sind linear unabhängig.
- in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$: $(1,2,3), (1,2,3), (1,0,3)$ sind linear abhängig.
- in $\mathbb{C}^1$ über $\mathbb{R}$: $(i), (1)$ sind linear unabhängig.
- in $\mathbb{C}^1$ über $\mathbb{C}$: $(i), (1)$ sind linear abhängig.

Satz Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren eines Vektorraumes, $n \in \mathbb{N}$. Diese Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn mindestens einer von ihnen sich als eine Linearkombination der restlichen darstellen lässt.

Beweis. Der Vektorraum sei V, der Körper K genannt.

Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear abhängig. Dann existieren Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ so, dass

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n = 0_V \ ,$$

und nicht alle Skalare λ_k gleich 0_K sind. Diese letzte Eigenschaft bedeutet, dass es $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_i \neq 0_K$ existiert. Wir können dann v_i als Linearkombination den restlichen Vektoren folgenderweise darstellen:

$$v_i = -\lambda_i^{-1}\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_1^{-1}\lambda_{i-1}v_{i-1} - \lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}v_{i+1} - \cdots - \lambda_i^{-1}\lambda_n v_n \ .$$

Sei jetzt der Vektor v_i darstellbar als Linearkombination den restlichen $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$. Das bedeutet, dass es $n-1$ Stück Skalare $\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_n$ existieren, sodass

$$v_i = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{i-1}v_{i-1} + \mu_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \mu_n v_n \ .$$

Dann haben wir die Linearkombination

$$(-\mu_1)v_1 + \cdots + (-\mu_{i-1})v_{i-1} + 1_k v_i + (-\mu_{i+1})v_{i+1} + \cdots + (-\mu_n)v_n = 0_V$$

in welcher nicht alle Koeffizienten $(-\mu_1), \ldots, (-\mu_{i-1}), 1_k, (-\mu_{i+1}), \ldots, (-\mu_n)$ gleich 0_K sind, nämlich der i-ter Koeffizient ist $1_K \neq 0_K$. Damit sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig. □

Satz Sei ein System von n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem Vektorraum V gegeben, und wir betrachten folgende Umformungen des Systems:

(U1) Vertauschen von zwei Vektoren.

(U2) Ersetzen eines Vektors durch sein λ-faches mit $\lambda \neq 0$.

(U3) Ersetzen eines Vektors v_i durch $v_i + \lambda v_j$.

Das originale System ist genau dann linear unabhängig, wenn das neue System linear unabhängig ist.

Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ kann man mit dem folgenden Verfahren entscheiden, ob gegebene Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig oder linear abhängig sind: Bilde die m mal n Matrix aus Koordinaten (Koordinaten als Zeilenvektor) der Vektoren, bringe mit Gauß-Verfahren auf **Zeilenstufenform** (d.h. in jeder Zeile mindestens eine 1, links und unten davon 0, von einer Zeile zur darunter stehenden nimmt die Anzahl der Nullen links von der 1 um mindestens eins zu). Wenn das geht, sind die Vektoren linear unabhängig, wenn das nicht geht, sind sie linear abhängig. Insbesondere, für $n < m$ sind sie linear abhängig.

9.1 Basis

Definition Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Eine Teilmenge $B \subset V$ heißt **(algebraische) Basis** des Vektorraumes V, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

i) für jedes $v \in V$ existiert eine natürliche Zahl n, und es existieren n Elemente aus B, $b_1, b_2, \dots, b_n$, und es existieren n Elemente aus dem Körper K, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sodass

$$v = \lambda_1 b_1 + \dots \lambda_n b_n$$

ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $b_1, \dots, b_n \in B$ und alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gilt:

$$0_V = \lambda_1 b_1 + \dots \lambda_n b_n \Rightarrow (\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \cdots \wedge \lambda_n = 0)$$

Beobachtung: Wenn die Menge B endlich viele Elemente hat, bedeutet die ii), dass diese Vektoren linear unabhängig sind, und i), dass die lineare Hülle von diesen Vektoren schon das ganze V ist. Ein Basis ist also eine "kleinste" Teilmenge des Vektorraumes, die den ganzen Vektorraum "erzeugt".

Beispiele:

- $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$: $B = \{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\}$ ist Basis
- $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$: es gibt eine Basis mit $n \cdot m$ Elementen
- $\mathbb{C}^1$ über $\mathbb{R}$: $B = \{1, i\}$ ist eine Basis
- $\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$: $B = \{1\}$ ist eine Basis
- $\mathbb{Z}_3^2$ über $\mathbb{Z}_3$: $\mathrm{Lin}((1,0)) = \{(1,0),(2,0),(0,0)\}$, $\mathrm{Lin}((0,1)) = \{(0,1),(0,2),(0,0)\}$, $\mathrm{Lin}((1,0),(0,1)) = \{(1,0),(2,0),(0,0),(0,1),(0,2),(0,0)\} = \mathbb{Z}_3^2$; $\{(1,0),(0,1)\}$ ist eine Basis.
- $M = \{f : f \text{ ist eine Abbildung von } \mathbb{N} \text{ nach } \mathbb{R}\}$, Elemente (anders geschrieben) $(a_1, a_2, \dots)$ heißen **unendliche Folgen reeller Zahlen**. Definiere Addition, eine binäre Operation auf M, koordinatenweise, und Multiplikation einer Folge mit einer reellen Zahl (koordinatenweise). Damit ist M ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

  $M_0 = \{(a_1, a_2, \dots) \in M : \exists n \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall m \in \mathbb{N} : (m > n \Rightarrow a_m = 0)\}$

mit oben gegebenen Operationen ist Vektorraum über $\mathbb{R}$.

$$B = \{(1,0,0,\dots),(0,1,0,\dots),(0,0,1,0,\dots),\dots\}$$

ist (algebraische) Basis von M_0. B ist keine algebraische Basis von M, da z.B. das Element $(1,1,\dots) \in M$ sich nicht als Linearkombination von endlich vielen Elementen der Menge B darstellen lässt !

- $M = \{f : f$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ mit $D_f = \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a + bx, x \in \mathbb{R},$ wobei $a, b \in \mathbb{R}\}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$;

$$B = \{f_1, f_2\} \ ,$$

wobei $f_1(x) = 1$ und $f_2(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$, ist eine Basis.

Es gilt: Wenn B_1 und B_2 zwei Basen eines Vektorraumes V über K sind, dann haben sie "genauso viele Elemente". Das kann man z.B. so ausdrücken, dass es eine bijektive Abbildung zwischen von der Menge B_1 auf die Menge B_2 gibt. Der Beweis obiger Aussage ist aber nicht elementar und wir werden uns damit nicht beschäftigen. Die Zahl, welche die Anzahl der Elemente einer Basis beschreibt (falls endlich), heißt **Dimension** des Vektorraumes. Wenn die Basis unendlich viele Elemente hat, sagt man, dass der Vektorraum **unenedlich-Dimensional** ist. Dass jeder Vektorraum eine (algebraische) Basis besitzt, ist eine Aussage, deren Beweis nicht elementar ist.

10 Lineares Gleichungssystem

Beispiel 1. Gesucht sind $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2, \\ 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 &= 4, \\ x_1 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

gelten. Wir schreiben zuerst die Aufgabe um. Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -8 & -2 \\ 160 & 4 & \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}),\ b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\ ,$$

dann kann man das obere System von drei Gleichungen als eine Gleichung für Vektoren schreiben:

$$A \cdot x = b\ .$$

Mit dem Gauß'schen Algorithmus bekommen wir, dass die Lösungsmenge als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$

$$\{ \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

ist. Bei dem Gauß'schen Algorithmus kann man aufhören, sobald die Matrix $A|b$ auf eine Zeilenstufenform gebracht ist.

Beispiel 2. Bestimme alle $x \in \mathbb{R}^5$ so, dass $A \cdot x = b$, $A \cdot x = d$ beziehungsweise $A \cdot = 0_{\mathbb{R}^5}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Beachte, dass die Matrix A schon in Zeilenstufenform ist. Die entsprechende Lösubngsmengen sind:

$$\emptyset, \{ \begin{pmatrix} -\frac{14}{3} \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}, \{x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_5 \in \mathbb{R}\},$$

Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ und $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$) gegeben. Die Aufgabe ist die **Unbekannte** $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ zu finden, so dass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2, \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Das ist ein **lineares Gleichungssystem in** $\mathbb{R}$.

Matrix- und Vektorschreibweise: mit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (als Spaltenvektor gesehen), und $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und Matrixmultiplikation-Notation ist das obere System umgeformt als

$$A \cdot x = b.$$

Definition Wenn $b = 0$, dann heißt das System **homogen**, wenn $b \neq 0$, dann heißt es **inhomogen** und in diesem Fall heißt das System $Ax = 0$ das **zugehörige homogene System**. Die Menge

$$\mathrm{Los}(A, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

heißt **Lösungsmenge des homogenen Systems**, und die Menge

$$\mathrm{Los}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

heißt die **Lösungsmenge des (inhomogenen) Systems**.

Satz (über der Lösungsmenge eines linearen homogenen Gleichungssystemes) Die Lösungsmenge einen linearen homogenen Gleichungsystemes in dem Körper K für n Unbekannten ist, als Teilmenge von K^n, ein Vektorraum über K, also ein Unterraum von K^n.

Beweis. Es reicht zu nachprüfen, dass für $x, y \in \mathrm{Los}(A, 0)$ und $\lambda \in K$ gelten

$$x + y, \lambda x \in \mathrm{Los}(A, 0)\ .$$

Wir rechnen mit Rechenregeln für Matrizen:

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0 + 0 = 0, A \cdot (\lambda x) = \lambda(A \cdot x) = A \cdot 0 = 0\ .$$

Damit gelten die oberen Aussagen. Die restliche Eigenschaften in der Definition eines Vektorraumes sind automatisch erfüllt. □

Satz Sei ein lineares Gleichungssystem mit einer Matrix A gegeben. Wir betrachten Umformungen der Matrix A durch endlich vielen EZUs und bezeichnen $\widetilde{A}$ die so erhaltene Matrix. Dann gilt

$$\mathrm{Los}(A, 0) = \mathrm{Los}(\widetilde{A}, 0) \ .$$

Beweis. Jede Umformung entspricht der Multiplikation von links mit einer Matrix Z_i bestimmter Form, welche zusätzlich invertierbar ist. Insgesamt entspricht die ganze Umformung der Multiplikation von links mit einer Matrix $Z = Z_k \cdot \dots \cdot Z_1$ welcher invertierbar ist. $\widetilde{A} = ZA$, $Z^{-1}\widetilde{A} = A$. Es gelten:

$$Ax = 0 \Rightarrow ZAx = Z0 = 0, \qquad \widetilde{A}x = 0 \Rightarrow Z^{-1}\widetilde{A}x = Z^{-1}0 = 0 \ .$$

Damit ist

$$x \in \mathrm{Los}(A, 0) \ \Leftrightarrow \ x \in \mathrm{Los}(\widetilde{A}, 0) \ .$$

□

Satz (über der Lösungsmenge eines linearen inhomogenen Gleichungssystemes) Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Die Menge $\mathrm{Los}(A, b)$ ist entweder leer, oder hat mindestens ein Element $x_s \in \mathrm{Los}(A, b)$ und in diesem Fall gilt

$$Ls(A, b) = \{x_s + x : x \in \mathrm{Los}(A, 0)\} \ .$$

Beweis: Es reicht den Fall ze betrachten, wenn es ein $x_s \in \mathrm{Los}(A, b)$ gibt. Sei $y \in \mathrm{Los}(A, b)$. Dann ist $A(y - x_s) = Ay - Ax_s = b - b = 0$, also $y - x_s \in \mathrm{Los}\, s(A, 0)$ und somit $y = x_s + y - x_s \in \{x_s + x : x \in \mathrm{Los}(A, 0)\}$.

Sei jetzt $y \in \{x_s + x : x \in \mathrm{Los}(A, 0)\}$. Dann gibt es $x \in \mathrm{Los}(A, 0)$ mit $y = x_s + x$. Es folgt $Ay = A(x_s + x) = Ax_s + Ax = b + 0 = b$, und deswegen ist $y \in (A, b)$. □

Satz Sei ein lineares Gleichungssystem mit einer Matrix A und rechte Seite b gegeben. Wir betrachten Umformungen der Matrix $A|b$ durch endlich vielen EZUs und bezeichnen $\widetilde{A}|\widetilde{b}$ die so erhaltene Matrix. Dann gilt

$$\mathrm{Los}(A, b) = \mathrm{Los}(\widetilde{A}, \widetilde{b}) \ .$$

Anwendung: Gegeben ein Gleichungssystem, wir können diese umformen und von den neuen System die Lösungsmenge einfacher berechnen. Das ist der Fall, wenn man die entsprechende Matrizen mit Hilfe von Gauß-Algorithmus auf eine Matrix in Zeilenstufenform bringt. Auf die Eiheitsmatrix zu bringen, wenn es geht, wäre ideal, die Zeilenstufenform ist aber auch gut genug. Dieser Weise kann man auch eine Basis der Lösungsmenge (diese heißt **Fundamentalsystem**) des homogenen Systems finden, bzw. ein $x_s \in \mathrm{Los}(A, b)$ (diese heißt **spezielle Lösung des inhomogenen Systems**). Eine allgemeine Lösung des homogenen Systems ist dann eine Linearkombination des Fundamentalsystemes, und eine allgemeine Lösung des inhomogenen Systemes ist Summe der speziuellen Lösung und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systemes.

Bemerkung: Man kann $\mathbb{R}$ durch einen anderen Körper K ersetzen. Dann sind $a_{i,j}$, $b_i \in K$, man sucht Elemente $x_j \in K$, und man rechnet mit den Rechenregeln des Körpers K. Die Mengen K^n, K^m sind als Vektorräume über K zu sehen.

11 Polynome

Wir definieren die Menge

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}(\mathbb{R}) =\{p : p & \text{ ist ein formaler Ausdruck} \\ & p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0, a_n \in \mathbb{R}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

ihre Elemente heißen **Polynome mit reellen Koeffizienten**. Wir definieren die binäre Operationen **Addition von zwei Polynomen** folgenderweise: für $p, q \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$, wir bezeichnen zuerst bei l die größere der Zahlen n, m, und der formaler Ausdruck

$$(a_l + b_l)x^l + \ldots (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

nennen wir $p \oplus q$. Wir definieren die binäre Operationen **Multiplikation von zwei Polynomen** folgenderweise: für $p, q \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$, wir bezeichnen zuerst $l = n \cdot m$, und der formaler Ausdruck

$$(a_n \cdot b_m)x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + \ldots (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_0 \cdot b_0)$$

nennen wir $p \odot q$. (Berechne $p(x) + q(x)$ bzw. $p(x) \cdot q(x)$ als ob $x \in \mathbb{R}$ wäre und forme das Resultat in einen Polynom um, um $p \oplus q$ bzw. $p \odot q$ zu bestimmen.) Der Einfachheit halber werden wir statt $\oplus$ nur $+$, und statt $\odot$ nur $\cdot$ oder ghar nichts schreiben.

Satz $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ mit $+$ und $\cdot$ ist ein kommutativer Ring.

Wir definieren **Multiplikation eines Polynomes mit einer rellen Zahl (Skalar)** folgenderweise: für $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, $p(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$, und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda \cdot a_n)x^n + \cdots + (\lambda \cdot a_1)x + (\lambda \cdot a_0)$$

und nennen diese $\lambda \cdot p$. Der Einfachheit halber lassen wir die Notation $\cdot$ weg.

Satz $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ mit Addition von zwei Polynomen und Multiplikation eines Polynomes mit einem Skalar ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Bemerkung: Wir können den Körper $\mathbb{R}$ durch einen anderen Körper ersetzen, und die obigen Aussagen bleiben gültig.

12 Lineare Abbildungen

Wenn wir eine Abbildung f aus der Menge M_1 in die Menge M_2 haben, und diese bijektiv ist, können wir sagen, dass M_1 und M_2 **genauso viele Elemente haben**. Wenn die Mengen M_1, M_2 zusätzlich eine algebraische Struktur haben, können wir untersuchen, ob die gegebene Abbildung diese Struktur überträgt. Zum Beispiel, wenn M_1 mit $\heartsuit$ eine Gruppe, und M_2 mit $\diamondsuit$ eine Gruppe ist, ob $f(x_1 \heartsuit y_1) = f(x_1) \diamondsuit f(y_1)$ für alle $x_1, y_1 \in M_1$ gilt. In der Geometrie war es wichtig, ob eine Abbildungen den Abstand (und andere geometrische Objekte) respektiert und bijektiv ist, diese hat man **Bewegung** genannt.

In diesem Kapitel werden wir nur Abbildungen zwischen Vektorräumen über dem (gleichen!) Körper betrachten.

Definition Sei K ein Körper, sei U mit (Vektoraddition) $\oplus_U$ und (Skalarmultiplikation) $\cdot_U$ ein Vektorraum über K, sei V mit (Vektoraddition) $\oplus_V$ und (Skalarmultiplikation) $\cdot_V$ ein Vektorraum über K, und sei $f : U \to V$ eine Abbildung mit Definitionsbereich U. f heißt **lineare Abbildung**, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

i) für alle $u_1, u_2 \in U$ gilt $f(u_1 \oplus_U u_2) = f(u_1) \oplus_V f(u_2)$,

ii) für alle $u \in U$ und für alle $\lambda \in K$ gilt $f(\lambda \cdot_U u) = \lambda \cdot_V f(u)$.

Beispiele.

- $\mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$; $f_S, f_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben:
  $f_S(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, Spiegelung an der x-Achse. f_S ist eine lineare Abbildung.
  $f_P(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, Projektion auf die x-Achse. f_P ist eine lineare Abbildung.
  Allgemein, für $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ sei $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f_A(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann ist f_A eine lineare Abbildung. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bekommen wir f_S, für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bekommen wir f_P.
- $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$; betrachte folgende Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$: f ist eine lineare Abbildung.

$f(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$: f ist keine lineare Abbildung (diese wird **affine Abbildung** heißen).

$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$: f ist keine lineare Abbildung (diese wird **quadratische Abbildung** heißen).

Allgemein, für $a \in \mathbb{R}$ ist $f_a(x) = ax, x \in \mathbb{R}$, eine lienare Abbildung.

- $f : \mathbb{R}^2_{\text{¸}} \to \mathbb{R}$, $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x$ ist eine lineare Abbildung. Allgemein, für $A \in \mathrm{Mat}(1 \times 2, \mathbb{R})$ sei $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben: $f_A(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, f_A ist eine lineare Abbildung aus $\mathbb{R}^2$ (Menge von Spaltenvektoren) in $\mathbb{R}$.

  Anderseits, für $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 1, \mathbb{R})$ sei $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben: $f_B(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot B$, f_A ist eine lineare Abbildung aus $\mathbb{R}^2$ (Menge von Zeilenvektoren) in $\mathbb{R}$.

  $f(x) = \begin{pmatrix} 2x & -3x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$, ist eine lineare Abbildung aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ (Zeilenvektoren).

Satz (Eigenschaften linearen Abbildungen)

a) Wenn $f : U \to V$ lineare Abbildung ist, dann gelten $f(0_u) = 0_V$, $f(-u) = -f(u)$ für $u \in U$, wobei $0_U \in U$ den Nullvektor in U und $0_V \in V$ den Nullvektor in V bezeichnet.

b) Wenn $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen sind, dann ist $g \circ f : U \to W$ eine lineare Abbildung.

c) Wenn $f : U \to V$ eine bijektive lineare Abbilung ist, dann ist $f_{-1} : V \to U$ auch eine lineare, bijektive Abbildung.

Beweis: Für einen beliebigen $u \in U$ gilt: $f(u) = f(u + 0_U) = f(u) + f(0_U)$, folglich ist $0_V = -f(u) + f(u) = -f(u) + (f(u) + f(0_U)) = (-f(u) + f(u)) + f(0_U) = 0_V + f(0_U) = f(0_U)$. Weiter gilt $f(-u) = f((-1)u) = (-1)f(u) = -f(u)$. Damit ist der Teil a) bewiesen.

c) ist ohne Beweis, siehe [Brill, Satz 11.3].

$\square$

Definition Seien U, V Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Die Menge

$$\{u \in U : f(u) = o\} = f_{-1}(\{0\})$$

heißt **Kern (Nullmenge)** der Abbildung f und wird durch Ker_f bezeichnet. Die Menge

$$W_f = f(U) = \{v \in V : \exists u \in U \text{ mit } f(u) = v\}$$

heißt **Bild** von f und wird durch Im_f bezeichnet.

Wenn M eine Menge ist und $f : M \to M$ eine Abbildung ist, dann heißt die Menge

$$\{v \in M : f(v) = v\}$$

die **Fixpunktmenge** der f. Wenn eine Menge $A \subset M$ die Eigenschaft

$$f(A) = A$$

hat, sagen wir, dass A **invariant unter** f ist, oder dass die Abbildung f **lässt die Menge** A **invariant**.

Beispiele

- Kern der Spiegelung f_S ist $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, Bild der Spiegelung f_S ist die Ebene, Kern der Projektion f_P ist die y-Achse, Bild der Projektion f_P ist die x-Achse. Die Fixpunktmenge der Spiegelung ist die x-Achse, die Fixpunktmenge der Projektion ist die x-Achse.

- $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R}$, $f(x) = A \cdot x$, $x \in \mathbb{R}^n$ (Spaltenvektoren), dann ist $\mathrm{Ker}_f = \mathrm{Los}(A, 0)$. Ausserdem gilt: $b \in \mathrm{Im}_f$ genau damm, wenn $\mathrm{Los}(A, b) \neq \emptyset$.

- In Krystallographie bestimmt man bijektive Abbildungen, welche die gegebene Figur invariant lassen. Diese Menge mit der Operation Komposition bildet eine Gruppe, die sogenannte **Symmetriegruppe der Figur**.

Satz (über Kern und Bild einer linearen Abbildung) Seien U und V Vektorräume über den Körper K und sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist Ker_f, als Teilmenge von U und mit der Struktur von U, ein Vektorraum über K (Uterraum von U). Im_f, als teilmenge von V und mit der Struktur von V, ist ein Vektorraum über K (Unterraum von V).

Wenn zusätzlich U und V endlich dimensional sind (d.h. besitzen jeweils eine Basis mit endlich vielen Elementen, deren Anzahl die **Dimension** des Vektorraumes heißt), dann gilt die **Dimensionsformel**:

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}_f + \mathrm{Dim}\,\mathrm{Im}_f = \mathrm{Dim}\,U \ .$$

Beweis der ersten Aussage. Um zu beweisen, dass Ker_f ein Vektorraum ist, genügt es zu zeigen, dass für $u_1, u_2 \in U$ und $\lambda \in K$ gelten

$$f(u_1 + u_2) \in \mathrm{Ker}_f, \quad f(\lambda u_1) \in \mathrm{Ker}_f \ .$$

Wir berechnen: $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = 0_V + 0_V = 0_V$, $f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1) = \lambda 0_V = 0_V$, damit ist diese Aussage bewiesen.

Der Rest der Aussagen ist ohne Beweis, da der Beweis der Dimensionsformel lang ist. Siehe [Muthsam, Lineare Algebra und ihre Anwendungen, Satz 4.4.1]. □

Anwendung

- In der Situation $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = A \cdot x$, $x \in \mathbb{R}^n$ (Spaltenvektoren) heißt die Zahl Dimension des Bildes der f **Rang der Matrix** A. Aus der Dimensionsformel bekommen wir

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Los}(A, 0) = n - \mathrm{Rang}(A) \ .$$

- In der gleichen Situation aber im speziellen Fall $m = n$, ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und es gilt die Beobachtung: wenn f injektiv ist, dann muss f schon bijektiv sein, und wenn f surjektiv ist, dann muss f schon injektiv sein.

- In unendlich dimensionalen Fall gilt die obere Beobachtung nicht. Betrachte $f((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_3, \dots)$, $g((a_1, a_2, \dots)) = (0, a_1, a_2, \dots)$ $h((a_1, a_2, \dots)) = (a_1, a_2, \dots, a_{100})$

Satz Seien U, V Vektorräume über K, sei B eine Basis von U ($B \subset U$), und sei die Abbildung $f : B \to V$ mit Definitionsbereich B gegeben.

Dann existiert genau eine Abbildung $\widetilde{f} : U \to V$ mit der Eigenschaften

i) $\widetilde{f}$ ist linear, und

ii) $\widetilde{f}(b) = f(b)$ für alle $b \in B$.

Beweis.

12.1 Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen Vektorräumen endlicher Dimension und Matrizen

Für diese Abschnitt sei U ein Vektorraum über K mit Basis $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$, und V ein Vektorraum über K mit Basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Satz

a) Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Dann ist die Abbildung $f : U \to V$ definiert durch $f(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j) = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$, wobei für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ die Skalare $\mu_1, \ldots \mu_m \in K$ durch folgende Matrixmultiplikation gegeben sind:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

eine lineare Abbildung.

b) Sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann existiert eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ so, dass f mit dieser A den obigen Gestalt hat.

Beweis. a) Da $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis ist, für jedes $u \in U$ existieren Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ so, dass $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$.

Sind $u, \widetilde{u} \in U$, dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_n \in K$ so, dass $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ und $\widetilde{u} = \sum_{j=1}^n \widetilde{\lambda}_j u_j$. Wir berechnen

$$f(u) + f(\widetilde{u}) = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i + \sum_{i=1}^m \widetilde{\mu}_i v_i = \sum_{i=1}^m (\mu_i + \widetilde{\mu}_i) v_i ,$$

wobei $\mu_i, \ldots, \mu_m$ bzw. $\widetilde{\mu}_i, \ldots, \widetilde{\mu}_m$ aus $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bzw. $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_n$ durch das Matrixmultiplikation oben entstanden sind, und in der zweiten Gliechheitzeichen Rechenreglen in einem Vektorraum benutzt sind. Wir berechnen jetzt $f(u + \widetilde{u})$. Dazu schreiben wir zuerst mit Hilfe von Rechenregeln in einem Vektorraum $u + \widetilde{u} = \sum_{i=1}^n (\lambda_j + \widetilde{\lambda}_j) u_j$. Dann benutzen wir die Rechenregeln für Matrixmultiplikation

$$A \cdot \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \widetilde{\lambda}_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ (\lambda_n + \widetilde{\lambda}_n) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \widetilde{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \widetilde{\mu}_n \end{pmatrix} ,$$

und bekommen

$$f(u+\widetilde{u}) = \sum_{i=1}^{m}(\mu_i + \widetilde{\mu}_i)v_i = f(u) + f(\widetilde{u}) \ .$$

Ähnlich prüft man nach, dass für $u \in U$ und $c \in K$ gilt $f(cu) = cf(u)$. Damit ist f linear.

b) Da $f(u)$ für alle $u \in U$ gegeben ist, ist insbesondere $f(u_1) \in V$ gegeben. Da $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von V ist, existieren Skalare $a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{m,1} \in K$, sodass

$$f(u_1) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,1} \cdot v_i.$$

Ähnlich sind $f(u_2)$ usw. bis $f(u_n) \in V$ gegeben, also existieren $a_{1,2}, a_{2,2}, \ldots, a_{m,2} \in K$, usw. bis $a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{m,n} \in K$ so, dass

$$f(u_2) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,2} \cdot v_i, \quad \text{usw. bis} \quad f(u_n) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,n} \cdot v_i \ .$$

Bilde die $m \times n$-Matrix von Elementen aus K:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K) \ .$$

Schliesslich müssen wir noch nachprüfen, dass diese Matrix passt. Sei dafür $u \in U$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ so, dass $u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$. Wir rechnen (und benutzen das Einsetzen, die linearität von f, die Definition von $a_{i,j}$, die Rechenregeln in einem Vektorraum und insbesondere die Kommutativität der Vektoraddition, und die Definition der Matrixmultiplikation):

$$\begin{aligned} f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(u_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot v_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j}\right) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i \ , \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix} \ .$$

Damit hat die Matrix A die gewünschte Eigenschaft.

$\square$

Definition Mit der obigen Notation heißt A die **Abbildungsmatrix der Abbildung f bezüglich der Basen $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ($= B_U$) und $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ($= B_V$)**. Bezeichnet wird sie durch A_{f,B_U,B_V}.

Satz Mit der Notation aus der Definition gilt:

a) Seien U, V bzw. W Vektorräume über K mit Basen B_U, B_V bzw. B_W und seien $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist

$$A_{g\circ f,B_U,B_W} = A_{g,B_V,B_W} \cdot A_{f,B_U,B_V} \ .$$

b) f ist bijektiv genau dann, wenn A_{f,B_U,B_V} Inverse bezüglich Matrixmultiplikation besitzt und in diesem Fall ist

$$A_{f_{-1},B_V,B_U} = (A_{f,B_U,B_V})^{-1} \ .$$

Ohne Beweis. Siehe [Muthsam, Lineare Algebra und ihre Anwendungen, Abschnitte 3.3, 3.5 und 4.3]

13 Vektorraum mit Skalarprodukt: eine geometrische Struktur

Motivation: Den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ kann man auf der Euklidischer Ebene veranschaulichen, aber es ist nicht wichtig, ob diese Ebene gerade, gedähnt, schreg, eventuell verbäugt ist. Ab jetzt wollen wir unterschied zwischen gedähte und nicht gedähte, gerade oder schrege Ebene aufnehmen (Die verbäugte Variante wird in Analysis betrachtet.)

Der Grundbegriff ist eine Abbildung mit speziellen Eigenschaften, welche Skalarprodukt genannt wird. Aus diesem werden wir die Begriffe Länge, Abstand, Winkel ableiten können.

Definition Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, und sei $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit Definitionsbereich $V \times V$. Sie heißt **Skalarprodukt auf** V, falls sie folgende Eigenschaften hat:

i) für jedes $u_0 \in V$ ist die Abbildung $v \mapsto f((u_0, v))$ eine lineare Abbildung (als Abbildung zwischen Vektorräumen über $\mathbb{R}$) und

ii) für jedes $v_0 \in V$ ist die Abbildung $u \mapsto f((u, v_0))$ eine lineare Abbildung (als Abbildung zwischen Vektorräumen über $\mathbb{R}$) (f mit i) mit ii) heißt **bilinear**),

iii) $\forall u, v \in V$ gilt $f((u, v)) = ((v, u))$ (**symmetrisch**),

iv) $f((0_V, 0_V)) = 0$ und für $u \in V$ mit $u \neq 0_V$ ist $f((u, u)) > 0$ (**positive Definitheit**).

Definition Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt f. Für $v \in V$ heißt die reelle Zahl $\sqrt{f((v, v))}$ **Länge (Norm)** des Vektors v bezüglich f. Für $P, Q \in V$ heißt $\sqrt{f((P - Q, P - Q))}$ **Abstand (Distanz)** zwischen P und Q.

Beispiele

- auf $\mathbb{R}^2$: $f\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ ist ein Skalarprodukt und heißt **Euklidisches Skalarprodukt**. Die Länge ist ... , Abstand ist ...
- Sei $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, und definiere $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f\left(\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right)\right) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen nach, dass f genau dann ein Skalarprodukt ist, wenn die Bedingungen $a_{1,2} = a_{2,1}$ (für Symmetrie), $a_{1,1} > 0, a_{2,2} > 0$ und $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 > 0$ (für positive Definitheit) erfüllt sind.

- Insbesondere ist $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 4x_1x_2 + 9y_1y_2$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und representiert die ausgedähnte Ebene (in Richtung x mit Faktor 2, in Richtung y mit Faktor 3). Die Lange des Vektors $(1,0)$ ist 2.

Notation: $\langle u, v\rangle$ für Skalarprodukt, $\|v\|$ für Länge, $dist(P,Q)$ für Abstand. Auf dem Vektorram $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist mit $f((x,y)) = x_1y1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, ein Skalarprodukt definiert (Beweis ist einfach), welcher **euklidisch** heißt. Die zugehörige Länge heißt **euklidische Länge**, der zugehöriger Abstand **euklidischer Abstand**.

Definition Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$ und seien $u, v \in V$. Wir sagen, dass die Vektoren u, v **senkrecht (orthogonal)** sind, wenn $\langle u, v\rangle = 0$. Notation: $u \perp v$.

Eine Teilmenge $M \subset V$ heißt **orthogonal**, wenn je zwei voneinander verschiedene Elemente der Menge M zueinander orthogonal sind. M heißt **orthonormal**, wenn sie orthogonal, und jedes $v \in M$ Länge gleich 1 hat.

Definition Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, und $u, v \in V$. Wir sagen, dass die Vektoren u, v **parallel** sind, wenn sie linear abhängig sind. Notation: $u \parallel v$.

Beobachtung: $u \parallel v$ genau dann, wenn u ein Vielfaches von v ist oder v ein Vielfaches von u ist.

Satz Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$ und seien $v, w \in V, w \neq 0_V$. Dann existiert genau ein Vektor $u \in V$ so,dass

$$u \parallel w \quad \text{und} \quad v - u \perp w.$$

Diesen Vektor u kann man durch die Formel

$$u = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

berechnen und er heißt **Orthogonalprojektion** von v auf $\mathrm{Lin}\{w\}$ (die lineare Hülle von $\{w\}$). Die Zerlegung $v = u + (v - u)$ heißt **Orthogonalzerlegung** von v entlang $\mathrm{Lin}\{w\}$.

Beweis. Wenn u existieren würde, dann sind u, w linear abhängig und folglich gibt es Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, nicht beide gleich 0, so, dass $\lambda_1 u + \lambda_2 w = 0_V$. Ist $\lambda_1 = 0$, dann ist $\lambda_2 w = 0_V$ und weil $w \neq 0_V$, folgt mit Rechenregeln für Vektorräume, dass $\lambda_2 = 0$. Dass kann aber nicht sein, also muss $\lambda_1 \neq 0$ sein. Damit folgt mit Rechenregeln für Vektorräume, dass $u = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} w$, d..h. u muss die Form $u = \mu w$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ haben.

Wir suchen also u in der Form $u = \mu w$, μ unbekannt. Berechne:

$$\langle v - u, w\rangle = \langle v - \mu w, w\rangle = \langle v, w\rangle - \mu\langle w, w\rangle \ .$$

Dieser Term ist genau dann gleich 0, wenn $\mu = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ (beachte, dass $\langle w, w\rangle \neq 0$, da $w \neq 0_V$).

Schließlich, der Vektor

$$u = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w \ ,$$

genügt den beiden Bedingungen und es ist der einziger Vektor, der diese Bedingungen erfüllt. □

Satz (Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$. Dann gilt für $v, w \in V$:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \ ,$$

wobei $\|.\|$ die Länge bezüglich des Skalarproduktes $\langle ., .\rangle$ ist. Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $v \parallel w$.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Wenn $v = 0_V$, dann ist $\langle v, w\rangle = \langle 0_V, w\rangle = 0$ (nach Eigenschaften linearen Abbildungen), und $\|v\| \cdot \|w\| = \|0_V\| \cdot \|w\| = 0 \cdot \|w\| = 0$ (nach Definition der Länge, Eigenschaft der Skalarprodukt und Rechenregeln in Körper). Folglich gilt die Ungleichung, sogar mit Gleichheit. Außerdem sind $0_V, w$ linear abhängig. Folglich gilt die Äquivalenz.

Wenn $v \neq 0_V$, dann ist $\langle v, v\rangle \neq 0$. Forme den Vektor $u = w - \frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle} v$ und der Schreibabkürzung wegen benenne $\mu = -\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle u, u\rangle = \langle w + \mu v, w + \mu v\rangle = \langle w, w + \mu v\rangle + \mu\langle v, w + \mu v\rangle \\
&\langle w, w\rangle + \mu\langle w, v\rangle + \mu\left(\langle v, w\rangle + \mu\langle v, v\rangle\right) \\
&= \langle w, w\rangle + 2\mu\langle v, w\rangle + \mu^2\langle v, v\rangle \\
&= \langle w, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle v, w\rangle + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle^2}\langle v, v\rangle \\
&= \langle w, w\rangle - 2\frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle} = \|w\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2} \ .
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $0 \leq \|w\|^2 - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2}$ äquivalent umgeformt lautet

$$\frac{\langle v, w\rangle^2}{\leq} \|w\|^2 \cdot \|v\|^2$$

was wiederum äquivalent zu unsere Aussage ist. Dabei gilt in der oberen Ungleichungen Gleichheit genau dann wenn $u = 0_V$ ist, und das bedeutet dass v, w linear abhängig sind. □

Folgerung Auf $\mathbb{R}^n$ nehmen wir das euklidische Skalarprodukt. Die zugehörige Abstand ist $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Der Satz besagt, dass für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ die Ungleichung

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

gilt, wobei Gleichheit gilt genau dann, wenn eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit entweder $x_1 = \lambda y_1, x_2 = \lambda y_2, \ldots, x_n = \lambda y_n$ oder $y_1 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2, \ldots, y_n = \lambda x_n$.

Vorbereitung: Die Funktion cos ist eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in Analysis eingeführt wird, und die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ auch. Für uns wird es jetzt genügend, dass die Abbildung $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $g(x) = \cos(x)$ für $x \in [0, \pi]$, eine bijektive Abbildung ist, $g(\frac{\pi}{2} = 0$. Folglich existiert für jede $y \in [-1, 1]$ genau ein Element $x \in [0, \pi]$ mit $g(x) = y$. Aus der Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung folgt, dass $\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \in [-1, 1]$, für $u, v \neq 0_V$.

Definition Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$ und entsprechender Länge $\|.\|$, und seien $v, w \in V$ von 0_V verschiedene Vektoren. Dann heißt die reelle Zahl $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$ **Größe des Winkels zwischen** v **und** w.

Satz von Pythagoras Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$, und bezeichne $\|.\|$ die zugehörige Länge. Für beliebige $v, w \in V$ gilt:

$$v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad \|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Beweis. Seien $v, w \in V$. Wir beweisen zwei Implikationen.

Es gelte $v \perp w$. Dann ist $\langle v, w\rangle = 0$ und wir berechnen

$$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v, v\rangle-\langle v, w\rangle-\langle w, v\rangle+\langle w, w\rangle = \|v\|^2-0-0+\|w\|^2.$$

Folglich gilt die Gleichheit.

Es gelte $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Wir berechnen mit Hilfe Eigenschaften des Skalarproduktes

$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|v\|^2 - 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$.

Wir setzen ein und stellen die Gleichung um, um $\langle v,w\rangle = 0$ zu bekommen, und dies bedeutet, dass $v \perp w$. $\square$

Anwendung In $\mathbb{R}^2$ mit euklidischen Skalarprodukt und euklidischer Länge: Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, betrachte den Dreieck mit Endpunkten A, B, C und bezeichne durch $a \in \mathbb{R}$ die Länge der Seite die gegenüber der Eckpunkt A liegt, b die Länge der Seite gegenüber B, und c die Länge der Seite gegenüber C. Mit $v = C-A, w = B-A$ ist $v-w = C-B$, $\|v\| = a$, $\|w\| = c$, $\|v-w\| = a$, und $v \perp w$ bedeutet, dass die Größe des Winkels bei A ist $\frac{\pi}{2}$ (also **rechter Winkel**)). Eingesetzt in die Aussage des Satzes von Pythagoras bekommen wir: Mit Worten: Ein Dreieck mit Eckpunkten ist genau dann rechteckig, wenn für ihm die entsprechende Aussage des Satzes von Pythagoras gilt.

Satz Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt und B eine Basis von V, dann existiert mindestens eine Orthogonalbasis (bezüglich des gegebenen Skalarprodukts) von V, und auch mindestens eine Orthonormalbasis des V.

Beweisidee für V mit Dimension 3. Sei $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von V. Insbesondere sind w_1, w_2, w_3 verschieden von 0_V (ansonst wären sie linear abhängig).

Wir konstruieren zuerst eine Orthogonalbasis. Sei $w_1 = u_1$. Sei $w_2 = u_2 + \lambda w_1$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ wird später bestimmt. Wir wollen, dass $4w_2 \perp w_1$, d.h. $\langle w_2, w_1\rangle = 0$, d.h. $\langle u_2, w_1\rangle + \lambda\langle w_1, w-1\rangle = 0$, d.h. $\lambda = ...$ Also ist

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\langle w-1, w_1\rangle} w_1$$

orthogonal auf w_1. Suche $w_3 = u_3 + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$, wobei $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ werden später bestimmt. Wir wollen, dass $w_3 \perp w_1$ und $w-3 \perp w_2$. Diese wird erreicht durch $\mu_1 = ...$, $\mu_2 = ...$ Also ist

$$w_3 = u_3 - ...w_1 - ...w_2$$

orthogonal auf w_1 und auf w_2. Damit ist die Menge $\{w_1, w_2, w_3\}$ orthogonal. Dass sie eine Basis ist, folgt aus der Tatsache, dass

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .. & 1 & 0 \\ ... & ... & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

mit einer invertierbaren Matrix. Also haben wir eine Orthogonalbasis. Eine Orthonormalbasis bekommen wir mit $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$, $v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$.$\square$

14 Euklidische Ebene und euklidischer Raum

Für diese Kapitel ist der Vektorraum über $\mathbb{R}$ entweder $V = \mathbb{R}^2$ (Ebene) oder $\mathbb{R}^3$ (Raum), beide mit dem entsprechender euklidischen Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ ausgestattet.

14.1 Geraden, Ebenen

Definition Eine Teilmenge $g \subset V$ heißt **Gerade**, falls Elemente $Q_0 \in V$, $w_0 \in V$ mit $w_0 \neq 0_V$ existieren so, dass

$$g = \{Q_0 + sw_0 : \quad s \in \mathbb{R}\} .$$

Diese Form heißt **Parameterdarstellung** der Gerade, Q_0 heißt **Aufpunkt**, w_0 heißt **Richtungsvektor**, t heißt **Parameter**. Wenn $Q_0 = 0_V$, dann ist

$$g = \{sw_0 : \quad s \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}\{w_0\}$$

ein Vektorraum (Unterraum von V) mit Basis $\{w_0\}$, also der Dimension gleich 1. Wir sagen dann, dass g **durch** 0_V **geht**.

Bemerkungen: Es gilt $Q_0 \in g$. Wenn $w_0 = 0_V$ wäre, dann $g = \{Q_0\}$ wäre ein entarteter Fall.

Definition Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^3$ heißt **Ebene im Raum**, falls Elemente $Q_0 \in \mathbb{R}^3$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $w_1 \neq 0_V$, $w_2 \neq 0$ und $w_1 \not\parallel w_2$ existieren so, dass

$$\mathcal{E} = \{Q_0 + t_1 w_1 + t_2 w - 2 : \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} .$$

Diese Form heißt **Parameterdarstellung** der Ebene, Q_0 heißt **Aufpunkt** , w_1, w_2 heißen **Richtungsvektoren**, t_1, t_2 heißen **Parametern**. Wenn $Q_0 = 0_{\mathbb{R}^3}$, dann ist

$$\mathcal{E} = \{t_1 w_1 + t_2 w_2 : \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}\{w_1, w_2\}$$

ein Vektorraum (Unterraum von V) mit Basis $\{w_1, w_2\}$, also der Dimension gleich 2. Wir sagen dann, dass $\mathcal{E}$ **durch** $0_{\mathbb{R}^3}$ **geht**.

Bemerkungen: Es gilt $Q_0 \in \mathcal{E}$.

Beispiele

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = ax + b$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Der Graph von f,

$$G_f = \{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in D_f\} = ... = \{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$$

ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. (Darstellung einer Gerade als Graph.)

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Dann existieren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so, dass
$$f(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} a_1 x \\ a_2 x \end{pmatrix}$$
, $x \in \mathbb{R}$ für geeignete $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und der Wertebereich von f,
$$W_f = \{y \in \mathbb{R}^2 : \exists x \in D_f : f(x) = y\} = \{x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$$
ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Darstellung einer Gerade als Bild.)

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, d.h. $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = a_1 x + a_2 y$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Menge (Urbild von $\{c\}$ bei f, heißt **Nivaulinie**),
$$f_{-1}(\{c\}) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : f(x, y) = c\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x + a_2 y = c\} \ .$$
Wenn $a_1 = a_2 = 0$, dann ist $f_{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^2$ und $f_{-1}(\{c\}) = \emptyset$ falls $c \neq 0$ (diese können wir als entartete Fälle sehen.) Wenn $a_1 \neq 0$, dann können wir umstellen und
$$f_{-1}(\{c\}) = ... = \{\begin{pmatrix} \frac{c}{a_1} \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\}$$
ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Wenn $a_2 \neq 0$, wir können ähnlich fortfahren und bekommen, dass die Nivaulinie eine Gerade ist (diesmal wird x der Parameter). (Darstellung einer Gerade als Nivaulinie.)

- Betrachten wir die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^2 + y^2$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, und sei $c \in \mathbb{R}$. Die Niveaulinie zu $c = 1$ ist
$$f_{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \ .$$
Wir zeigen, dass diese Menge keine Gerade ist. Dazu benutzen wir die Eigenschaft einer Geraden, welche in folgenden Lemma formuliert und bewiesen ist. Offensichtlich sind $A = (1, 0), B = (0, 1)$ und $C = (-1, 0)$ Elemente der Menge $f_{-1}(\{1\})$. Wenn diese eine Gerade wäre, müssten $B - A = (-1, 1)$ und $C - A = (-2, 0)$ linear abhängig sein. Sie sind es aber nicht, weswegen kann die betrachtete Menge keine Gerade sein.

Sei auf dem Rand bemerkt, dass f keine lineare Abbildung ist, und dass die Niveaulinie in Frage die Einheitskreislinie ist.

Lemma Wenn g eine Gerade ist und $A, B, C \in g$ sind, dann sind $B-A$ und $C-A$ parallel.

Beweis. Seien Q und w ein Aufpunkt und Richtungsvekor der Gerade. Da $A \in g$ ist, existiert $t_A \in \mathbb{R}$ so, dass $A = Q + t_A w$. Ähnlich sind $B = Q + t_B w$, $C = Q + t_C w$ für irgendwelche $t_B, t_C \in \mathbb{R}$. Wir berechnen $B - A = (Q + t_B w) - (Q + t_A w) = (t_B - t_A)w$, $C - A = (Q + t_C w) - (Q + t_A w) = (t_C - t_A)w$. Diese zwei Vektoren sind linear abhängig, also parallel. $\square$

- Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, also $f(x, y, z) = a_1 x + a_2 y + a_3 z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, für bestimmte $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Niveaulinien

$$f_{-1}(\{c\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 x + a_2 y + a_3 z = c\}$$

in den vier Fällen. Wenn $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, dann ist $f_{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^3$, und $f_{-1}(\{c\}) = \emptyset$ falls $c \neq 0$. Wenn $a_1 \neq 0$, dann wird die Niveaumenge eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ (Gleichung umstellen, auf x auflosen; y, z werden die Parametern). Wenn $a_2 \neq 0$, dann auch (Gleichung umstellen, auf y auflösen; x, z werden die Parametern), und wenn $a_3 \neq 0$, dannn auch (Gleichung umstellen, auf z auflosen; x, y werden die Parametern).

Satz Wenn g eine Gerade in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist, dann existieren $a_1, a_2, c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$g = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x + a_2 y = c\} .$$

Außerdem, wenn g mit Aufpunkt $Q = (q_1, q_2)$ und Richtungsvektor $w = (w_1, w_2)$ gegeben ist, dann ist der Vektor $n = (-w_2, w_1)$ orthogonal auf w und

$$g = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, n\rangle = 0\} .$$

Diese Darstellungen heißen **Normalendarstellung einer Gerade in der Ebene**. Jeder Vektor verschieden von $0_{\mathbb{R}^2}$ und orthogonal auf w heißt **Normalenvektor** der Gerade.

Beweis:

Satz Wenn $\mathcal{E}$ eine Ebene im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ ist, dann existieren $a_1, a_2, a_3, c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : a_1 x + a_2 y + a_3 z = c\} \ .$$

Außerdem, wenn $\mathcal{E}$ mit Aufpunkt $Q = (q_1, q_2, q_3)$ und Richtungsvektoren $w = (w_1, w_2, w_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ gegeben ist, dann ist der Vektor $n = (w_2 v_3 - w_3 v_2, -(w_1 v_3 - w_3 v_1), w_1 v_2 - w_2 v_1)$ orthogonal auf w und auf v und

$$\mathcal{E} = \{\big(x, y, z\big) \in \mathbb{R}^3 : \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, n\rangle = 0\} \ .$$

Diese Darstellungen heißen **Normalendarstellung einer Ebene im Raum**. Jeder Vektor verschieden von $0_{\mathbb{R}^3}$ und orthogonal auf w_1 und auf w_2 heißt **Normalenvektor** der Ebene.

Beweisidee: Lineares Gleichungssystem umstellen. Orthogonalität nachrechnen.

14.2 Lot

Satz Sei g eine Gerade in V (euklidische Ebene oder Raum) mit Aufpunkt Q_0 und Richtungsvektor w_0 gegeben, und sei $P \in V$. Dann hat das Element

$$P_g = Q_0 + \frac{\langle P - Q_0, w_0\rangle}{\langle w_0, w_0\rangle} w_0 \in V$$

folgende Eigenschaften:

i) $P_g \in g$,

ii) $P - P_g \perp w_0$,

iii) für alle $Q \in g$ gilt $\|P - P_g\| \leq \|P - Q\|$, und wenn zusätzlich $Q \neq P_g$ ist, dann gilt sogar $\|P - P_g\| < \|P - Q\|$.

Außerdem, P_g ist eindeutig gegeben mit den Eigenschaften i) und ii), und auch eindeutig gegeben mit der Eigenschaft iii). P_g heißt **Lotpunkt von P auf g**.

Beweis: Mit dem Begriff der Orthogonalprojektion bedeuten die Bedingungen i) und ii), dass für den gesuchten P_g ist $P_g - Q_0$ die Orthogonalprojektion von $P - Q_0$ entlang $Lin\{w_0\}$. Folglich ist

$$P_g - Q_0 = \frac{\langle P - Q_0, w_0\rangle}{\langle w_0, w_0\rangle} w_0$$

nach dem Satz über Orthogonalprojektion und dadurch ist P_g eindeutig gegeben.

Wir prüfen jetzt nach, dass diese P_g auch die Eigenschaft iii) erfüllt. Sei also $Q \in g$. Dann existiert $t \in \mathbb{R}$ so, dass $Q = Q_0 + tw_0$. Wir berechnen

$$\|P-Q\|^2 = \|P-P_g+P_g-Q\|^2 = \|P-P_g\|^2 + \|P_g-Q\|^2 \geq \|P-P_g\|^2 \ ,$$

wobei wir den Satz von Pythagoras benutzt haben (dies ist berechtigt, da $P_g - Q \parallel w_0$, $P - P_g \perp w_0$ und damit $P - P_g \perp P_g - Q$). Aus der Ungleichung $\|P-Q\|^2 \geq \|P-P_g\|^2$ folgt $\|P-Q\| \geq \|P-P_g\|$, und auch dass $Q \neq P_g$ impliziert $\|P-Q\| > \|P-P_g\|$, was zu beweisen war.

Als nächstes sollte man beweisen, dass wenn wir nur die Eigenschaft iii) betrachten, so ein Element P_g existiert und eindeutig ist. Diese Aussage werden wir hier nicht beweisen. □

Satz Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene im euklidischen Raum mit Aufpunkt Q_0 und Richtungsvektoren w_1, w_2 gegeben, und sei $P \in \mathbb{R}^3$. Dann existiert genau ein Element $P_\mathcal{E} \in \mathbb{R}^3$ so, dass

i) $P_\mathcal{E} \in \mathcal{E}$,

ii) $P - P_\mathcal{E} \perp w_1$ und $P - P_\mathcal{E} \perp w_2$,

iii) für alle $Q \in \mathcal{E}$ gilt $\|P - P_\mathcal{E}\| \leq \|P - Q\|$, und wenn zusätzlich $Q \neq P_g$ ist, dann gilt sogar $\|P - P_\mathcal{E}\| < \|P - Q\|$.

$P_\mathcal{E}$ heißt **Lotpunkt von P auf $\mathcal{E}$** und man kann es mithilfe einer Formel berechnen.

Beweisidee: Wegen i) suchen wir $P_\mathcal{E}$ in der Form $P_\mathcal{E} = Q_0 + t_1 w_1 + t_2 w_2$, mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ noch unbekannt. Aus ii) bekommen wir zwei Bedingungen, welche wir in Form von zwei Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} t_1\langle w_1, w_1\rangle + t_2\langle w_2, w_1\rangle &= \langle P - Q_0, w_1\rangle \\ t_1\langle w_1, w_2\rangle + t_2\langle w_2, w_2\rangle &= \langle P - Q_0, w_2\rangle \end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichnugssystem für die Unbekannte t_1, t_2. Dass sie genau eine Lösung hat, ist eine Folgerung der Bedingungen $w_1 \neq 0, w_2 \neq 0$. Wenn wir das Gleichungssystem lösen (z.B. durch Umstellung der 2. Gleichung auf t_2 und diese in die erste Gleichung eingesetzt), bekommen wir die Formel für den Lotpunkt. □

Bemerkung. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ kann man auf eine Ebene im Raum **orthogonal projezieren**, indem man jeden Punkt aus M projeziert. So kann man 3-dimensionale Objekte auf dem 2-dimensionalem Blatt darstellen. Es gibt auch andere, nicht-orthogonale oder nicht-“lineare” Projektionen.

14.3 Lagebeziehungen

14.3.1 Winkel

Definition Seien g_1, g_2 Geraden in V (die euklidische Ebene oder euklidischer Raum). Die **Größe des Winkels zwischen** g_1 **und** g_2 ist die Zahl $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, für welche

$$\cos(\alpha) = \frac{|\langle w_1, w_2 \rangle|}{\|w_1\| \, \|w_2\|}$$

gilt, wobei w_1 bzw. w_2 Richtungsvektor von g_1 bzw. g_2 ist. Wir sagen, dass $g_1 \parallel g_2$, wenn $\alpha = 0$, und dass $g_1 \perp g_2$, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Beobachtungen: $g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow w_1 \parallel w_2$, $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow w_1 \perp w_2$.

Definition Seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Ebenen im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Die **Größe des Winkels zwischen** $\mathcal{E}_1$ **und** $\mathcal{E}_2$ ist die Zahl $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, für welche

$$\cos(\alpha) = \frac{|\langle n_1, n_2 \rangle|}{\|n_1\| \, \|n_2\|}$$

gilt, wobei n_1 bzw. n_2 Normalenvektor von $\mathcal{E}_1$ bzw. $\mathcal{E}_2$ ist. Wir sagen, dass $\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_2$, wenn $\alpha = 0$, und dass $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2$, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Definition Sei g eine Gerade und $\mathcal{E}$ eine Ebene im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Die **Größe des Winkels zwischen** g **und** $\mathcal{E}$ ist die Zahl $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, für welche

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{|\langle w_g, n_{\mathcal{E}} \rangle|}{\|w_g\| \, \|n_{\mathcal{E}}\|}$$

gilt, wobei w_g Richtungsvektor von g und $n_{\mathcal{E}}$ Normalenvektor von $\mathcal{E}$ sind. Wir sagen, dass $g \parallel \mathcal{E}$, wenn $\alpha = 0$, und dass $g \perp \mathcal{E}$, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

14.3.2 Abstand

Auf einer Menge M, auf der man einen Abstand $d(.,.)$ hat (also Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten), kann man auch den Abstand zwischen zwei Teilmengen $P, Q \subset M$ als die "kleinste" Zahl von allen $d(p, q)$, mit $p \in P$ und $q \in Q$, definieren. Diese "kleinste" Zahl muss nicht immer existieren, siehe Analysis.

Wir betrachten zunächst $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt und mit der damit erzeugte euklidische Länge und definieren direkt den Abstand zwischen

- einem Punkt P und einer Gerade g in der Ebene oder im Raum als

$$d(P,g) = d(P,P_g) = \|P - P_g\| \ ,$$

wobei P_g ist der Lotpunkt von P auf g ist;

- einem Punkt P und einer Ebene $\mathcal{E}$ im Raum als ($P_{\mathcal{E}}$ ist der Lotpunkt)

$$d(P,\mathcal{E}) = d(P,P_{\mathcal{E}}) = \|P - P_{\mathcal{E}}\| \ ;$$

- zwei parallelen Geraden in der Ebene oder im Raum als ($Q_1 \in g_1$ ist ein beliebiger Punkt)

$$d(g_1,g_2) = d(Q_1,g_2) \ ;$$

- zwei parallelen Ebenen im Raum als ($Q_1 \in \mathcal{E}_1$ ist ein beliebiger Punkt)

$$d(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2) = d(Q_1,\mathcal{E}_2) \ ;$$

- einer Gerade und einer Ebene die parallel sind im Raum als ($Q_1 \in g_1$ ist ein beliebiger Punkt)

$$d(g_1,\mathcal{E}_2) = d(Q_1,\mathcal{E}_2) \ .$$

14.3.3 Durchschnitt

Satz Für beliebige Geraden g_1, g_2 in einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ der Dimension größer als 1 gilt genau eine von den folgenden Aussagen:

i) $g_1 \cap g_2 = \emptyset$

ii) $g_1 \cap g_2$ besteht aus genau einem Elementen.

iii) $g_1 \cap g_2$ ist eine Gerade (und zwar die $g_1 = g_2$).

Wenn $V = \mathbb{R}^2$, dann ist ii) äquivalent zu $g_1 \not\parallel g_2$. Wenn $V = \mathbb{R}^3$, dann ist i) äquivalent zu "Die zwei Geraden sind entweder windschief oder nicht identisch parallel.“.

Satz Für beliebige Ebenen $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ in einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ der Dimension größer als 2 gilt genau eine von den folgenden Aussagen:

i) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$

ii) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ besteht aus genau einem Elementen.

iii) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ist eine Gerade in V.

iv) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ist eine Ebene in V (und zwar die $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$).

Wenn $V = \mathbb{R}^3$, dann kommt ii) nicht vor, und i) ist äquivalent zu "$\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ sind nicht identisch parallel".

Diese Sätze werden wir hier nicht beweisen.

Beispiel: In $V = \mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $w_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_1 = (0, 1, 0, 0)$ linear unabhängig, folglich ist die Menge $\mathcal{E}_1 = \{sw_1 + tv_1 : t, s \in \mathbb{R}\} \subset V$ eine Ebene. Ähnlich $w_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 0, 1)$, $\mathcal{E}_2 = \{sw_2 + tv_2 : t, s \in \mathbb{R}\}$. Dabei gilt $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Sommersemester 2016

15 Die Euklidische Ebene

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ und seine Veranschaulichung in der Euklidischen Ebene. Wir erstatten diesen Vektorraum mit dem Euklidischen Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$.

Satz Seien $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$. Wenn u_1, u_2 linear unabhängig sind, dann ist $u_1 + u_2$, veranschaulicht in der Euklidischen Ebene, der Eckpunkt P des Parallelogramms Ou_1Pu_2, wobei $O = (0,0)$.

Beweis. Wir beschreiben die Geraden durch O und u_1 bzw. u_2: $g_1 = \{tu_1 : t \in \mathbb{R}\}$, $g_2 = \{tu_2 : t \in \mathbb{R}\}$. Die Gerade durch u_2 welche parallel zu g_1 ist, ist durch $\tilde{g}_1 = \{u_2 + tu_1 : t \in \mathbb{R}\}$ beschrieben. Die Gerade durch u_1, parallel zu u_2, ist $\tilde{g}_2 = \{u_1 + tu_2 : t \in \mathbb{R}\}$.

Wenn $Q \in \tilde{g}_1 \cap \tilde{g}_2$, dann existieren $t, s \in \mathbb{R}$ mit $Q = u_2 + tu_1 = u_1 + su_2$.

Als Nebenrechnung, lösen wir die Gleichung $u_2 + tu_1 = u_1 + su_2$ für die Unbekannte t, s. Diese Gleichung äquivalent umgestellt lautet

$$(1 - s)u_2 + (t - 1)u_1 = O \ .$$

Da u_2, u_1 linear unabhängig sind, folgt $1 - s = 0$ und $t - 1 = 0$. Also hat die Gleichung die einzige Lösung $t = 1, s = 1$.

Mit der Nebenrechnung erhalten wir $Q = u_1 + u_2$. Folglich ist $\tilde{g}_1 \cap \tilde{g}_2 \subset \{u_1 + u_2\}$. Anderseits, offensichtlich gelten $u_1 + u_2 \in \tilde{g}_1$ und $u_2 + u_1 \in \tilde{g}_1$. Folglich ist $\{u_1 + u_2\} \subset \tilde{g}_1 \cap \tilde{g}_2$. Da $\tilde{g}_2 \cap \tilde{g}_1$ der Eckpunkt P des Parallelogramms ist, folgt $P = u_1 + u_2$. $\square$

Definition Seien $u, v \in \mathbb{R}^2$. Wir nennen die Menge

$$\{su + tv : s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$$

auf u, v **aufgespanntes Parallelogramm mit Eckpunkt im** $(0,0)$. Falls u, v linear unabhängig sind, heißt dieses Parallelogramm **echt**, und falls u, v linear abhängig sind, heißt es **entartet**. Wenn $u \perp v$, dann heißt das Parallelogramm **Rechteck**. Für $Q \in \mathbb{R}^2$ heißt die Menge

$$\{Q + su + tv : s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$$

auf u, v **aufgespanntes Parallelogramm mit Eckpunkt im** Q.

Satz Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Dann ist das Bild eines Parallelogramms unter f wieder ein echtes oder entartetes Parallelogramm. Wenn f injektiv ist, dann ist das Bild eines echten Parallelogramms unter f wieder ein echtes Parallelogramm.

Beweis. Sei P das auf u, v aufgespanntes Parallelogramm mit Eckpunkt im Q. Dann ist

$$\begin{aligned} f(P) &= f(\{Q + su + tv : s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}) \\ &= \{f(Q + su + tv) : s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{f(Q) + sf(u) + tf(v) : s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}, \end{aligned}$$

weil f linear ist. Wir sehen, dass diese Menge auf $f(u), f(v)$ aufgespanntes Parallelogramm mit Eckpunkt im Q ist.

Jetzt seien u, v linear unabhängig und f injektiv. Wenn $\lambda f(u) + \mu f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, dann wegen Linearität des f gilt

$$f(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2} = \lambda f(u) + \mu f(v) = f(\lambda u + \mu v) \ .$$

Da f injektiv ist, folgt $0_{\mathbb{R}^2} = \lambda u + \mu v$. Da u, v linear unabhängig sind, folgt $\lambda = 0$ und $\mu = 0$. Wir haben bewiesen, dass $f(u), f(v)$ linear unabhängig sind. Wir sehen, dass in diesem Fall die Menge $f(P)$ ein echtes Parallelogramm ist. $\square$

Definition Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ und sei $l : V \to V$ eine lineare Abbildung. l heißt **orthogonal**, falls es gilt:

$$\forall v, w \in V \quad \langle l(v), l(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Beispiele in $\mathbb{R}^2$ mit Euklidischem Skalarprodukt:

- $f(x, y) = (x, -y)$, Spiegelung an der x-Achse, ist orthogonal.
- $f(x, y) = (-x, -y)$, Spiegelung am Punkt $(O, 0)$, ist orthogonal.
- $f(x, y) = (-y, x)$, Drehung um Punkt $(0, 0)$ um Winkel $\frac{\pi}{4}$ gegen Uhrzeigersinne, ist orthogonal.
- $f(x, y) = (2x, 2y)$, Streckung mit Faktor 2, ist nicht orthogonal.
- $f(x, y) = (2x, 3y)$ ist nicht orthogonal.
- $f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Scherung mit Achse x, ist nicht orthogonal.

- $f(x, y) = (x, 0)$, Projektion auf die x-Achse, ist nicht orthogonal und nicht injektiv.
- Bild des Einheitsquadrates $Q = \{se_1 + se_2 : t, s \in [0, 1]\}$, wobei $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, bei dieser Abbildungen.

Satz Jede orthogonale Abbildung ist längentreu, winkeltreu und injektiv. Insbesondere, wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, welche orthogonal bezüglich den Euklidischen Skalarproduktes ist, dann ist das Bild eines echten Rechteckes unter f wieder ein echtes Rechteck.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass f längentreu ist. Für $u \in V$ gilt:

$$\|l(u)\| = \sqrt{\langle l(u), l(u)\rangle\|} = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \|u\| \ .$$

Wir zeigen als nächstes, dass f injektiv ist. Wenn u, v mit $f(u) = f(v)$ ist, dann muss $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0_V$ sein, und

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = \langle f(u - v), f(u - v)\rangle = \langle 0_V, 0_V\rangle = 0 \ .$$

Daraus folgt, dass $u - v = 0_V$ ist, das heißt $u = v$.

Jetzt zeigen wir, dass f winkeltreu ist. Seien $u, v \in V$ mit $u, v \neq 0_V$. Der Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen $f(u), f(v)$ ist gegeben durch

$$\cos\alpha = \frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \ \|f(v)\|} \ .$$

Dabei die rechte Seite ist gleich

$$\frac{\langle u, \rangle v}{\|u\| \ \|v\|} \ ,$$

weil f orthogonal und längentreu ist. Dieser Term definiert genau den Winkel zwischen u, v. Folglich ist der Winkel zwischen $f(u), f(v)$ genauso groß wei der Winkel zwischen u, v.

In dem konkreten Fall $V = \mathbb{R}^2$ mit Euklidischen Skalarprodukt sei R auf u, v aufgespanntes echtes Rechteck. Dann sind u, v linear unabhängig. Wir wissen schon, dass $f(R)$ ein auf $f(u), f(v)$ aufgespanntes, möglicherweise entartetes, Parallelogramm ist. Da $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle = 0$, ist dieses Parallelogramm ein (möglicherweise entartetes) Rechteck. Da f injektiv, und u, v linear unabhängig sind, ist dies ein echtes Rechteck.

$\square$

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Innenwinkelgröße β und wollen die Zahl $\cos(\beta)$ interpretieren.

Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig und sei u die Orthogonalprojektion von v auf $\mathrm{lin}\{w\}$. Also u ist das Element des $\mathbb{R}^2$, welches $u \parallel w$ und $v - u \perp w$ erfüllt. Außerdem wissen wir, dass u durch die Formel

$$u = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

gegeben ist. Wir nennen $\alpha \in [0, \pi]$ den Winkel zwischen v und w. Mit Eckenpunkten $(0, 0)$, u, v haben wir ein rechtwinkliges Dreieck, rechter Winkel ist bei u, Hypothenuse ist die Strecke zwischen 0 und v, sie hat Länge $\|v\|$, Katheten haben Länge $\|u\|$ bzw. $\|v - u\|$. Wenn $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, dann ist α die Größe des Innenwinkels des Dreieckes bei $(0, 0)$, und wenn $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, dann ist $\pi - \alpha$ die Größe des Innenwinkels des Dreieckes bei $(0, 0)$.

Wir berechnen den Qutient der Länge der Kathete neben den Winkel und der Länge der Hypothenuse. Wir unterscheiden folgende drei Fälle. Wenn $\langle v, w\rangle > 0$, dann

$$\frac{\|u\|}{\|v\|} = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos\alpha\ .$$

Wenn $\langle v, w\rangle < 0$, dann

$$\frac{\|u\|}{\|v\|} = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{-\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = -\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)\ .$$

In dem übrigen Fall $\langle v, w\rangle = 0$ ist $u = 0$ und

$$\frac{\|u\|}{\|v\|} = 0 = \cos(\frac{\pi}{2})$$

(der Dreieck ist entartet).

Also der Winkel, welche für allgemeine Skalarprodukte eingeführt war, stimm in dem Fall des Euklidischen Skalarproduktes mit der aus der Schule bekannten Winkel überein.

An dem Vorzeichen von $\langle v, w\rangle$ (für $v \neq (0, 0), w \neq (0, 0)$) erkennen wir, ob der Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen v, w spitzer, rechter oder stumpfer ist:

- $\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|} \in (0, 1)$: $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, **spitzer** Winkel;
- $\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|} \in (-1, 0)$: $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, **stumpfer** Winkel;

- $\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|} = 1$: $\alpha = 0$, v und w sind parallel und zeigen in die gleiche Richtung, $w = cv$ mit $c > 0$;

- $\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|} = -1$: $\alpha = \pi$, v und w sind parallel und zeigen in entgegengesetzte Richtungen, $w = cv$ mit $c < 0$;

- $\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\ \|w\|} = 0$: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, rechter Winkel.

Andersrum aufgeschrieben: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$. Zunächts berechnen wir die cos von $0 = 0°, \frac{\pi}{6} = 30°, \frac{\pi}{4} = 45°, \frac{\pi}{3} = 60°, \frac{\pi}{2} = 90°$.

Für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a > 0$. Diese hat alle Innenwinkel der Größe $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Die Höhe schneidet die Seite in der Mitte. Mit den obigen Rechnungen und mithilfe von Satz von Pythagoras bekommen wir

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \qquad \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ betrachten wir einen gleichschenklichen Dreieck mit zwei Seiten der länge $a > 0$ und zwei Winkeln der Größe $\frac{\pi}{4}$. Der dritte Winkel hat Größe $\frac{\pi}{2}$. Mit dem Satz von Pythagoras bekommen wir

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Schließlich für $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ definieren wir den Wert $\cos(\alpha)$ als $\cos(2\pi - \alpha)$ und für die restlichen $\alpha \in (-\infty, 0) \cup [2\pi, +\infty)$ $\cos(\alpha)$ so, dass $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Abbildung wird.

16 Fläche

Definition Sei R auf u, v aufgespanntes Rechteck mit Eckpunkt $(0, 0)$. Wenn u, v linear unabhängig sind, nennen wir die reelle Zahl $\|u\| \cdot \|v\|$ **Flächeninhalt des Rechteckes** R. Wenn u, v linear abhängig sind, nennen wir die Zahl 0 **Flächeninhalt des Rechteckes** R. Notation $\mathcal{F}(R)$.

Wir wollen Flächeninhalt anderen Teilmengen A des $\mathbb{R}^2$ einführen. Wir erwarten folgende Eigenschaften:

- Wenn $\mathcal{F}(A)$ überhaupt definiert ist, dann ist es eine nichtnegative reelle Zahl.

- Wenn f eine Verschiebung ist, so soll $\mathcal{F}(f(A)) = \mathcal{F}(A)$ gelten.
- Wenn f eine Spiegelung oder Drehung ist, so soll $\mathcal{F}(f(A)) = \mathcal{F}(A)$ gelten.
- Für $A, B \subset \mathbb{R}^2$ erwarten wir, dass $\mathcal{F}(A \cup B) = \mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B) - \mathcal{F}(A \cap B)$.

Diesen Eigenschaften bestimmen schon den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes (Hälfte des Rechteckes), eines Dreieckes (Vereinigung zwei rechteckigen Dreiecken) und beliebiges Vieleckes (Vereinigung von Dreiecken).
Wir werden eine Fromel für ein Parallelogramm herleiten. Damit haben erhalten wir Flächeninhalt "geraden" Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, Flächeninhalt "gekrümmten" Teilmengen ist Stoff der Analysis.

Satz Der Flächeninhalt eines auf v, w aufgespannten (echten) Parallelogramms ist gleich

$$\|v\| \cdot \|w\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2 \|w\|^2}}$$

Beweis. Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Dann sind sie, insbesondere, ungleich den Nullvektor. Sei u die Orthogonalprojektion von v entlang w, das heißt,

$$u \parallel w, \quad v - u \perp w, \quad u = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w \;.$$

Eine Nebenrechnung zeigt, dass $v - u \perp u$. Mit dem Satz von Pythagoras für $v - u$ und u bekommen wir $\|v - u\|^2 + \|u\|^2 = \|v - u + u\|^2 = \|v\|^2$. Daraus folgt $\|v - u\| = \sqrt{\|v\|^2 - \|u\|^2}$. Aus der Formel für u berechnen wir $\|u\| = |\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}| \cdot \|w\| = \frac{|\langle v,w\rangle|}{\|w\|}$. Flächeninhalt des auf v, w aufgespannten Parallelogrammes soll gleich der Flächeninhalt des auf w, u aufgespannten Rechteckes sein. Diese ist laut Definition gegeben, wo wir die ausgerechnete Terme einsetzen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} =& \|w\| \cdot \|v - u\| = \|w\| \cdot \sqrt{\|v\|^2 - \|u\|^2} \\
&= \|w\| \cdot \sqrt{\|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}} \\
&= \|w\| \cdot \|v\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2 \cdot \|v\|^2}}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Im obigen Satz erkennen wir die Formel für Berechnung der Fläche eines beliebigen Dreieckes mit Hilfe zwei Seitenlängen und der Größe des eingeschlossenen Winkels.

17 Determinante

17.1 Motivation auf linearen Abbildungen der Ebene

Lineare Abbildungen können durch Matrizen gegeben sein. Sei dafür $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$, zwei ausgewähle Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$. Sie bilden eine Basis $B = \{e_1, e_2\}$, sogar Orthonormalbasis, die sogenannte Standardbasis. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basen B und B ist durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ respresentiert: $f(u) = A \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^2$ (Spaltenvektor).

Satz Sei $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Es gelten folgende Aussagen.

i) f ist bijektiv (und folglich invertierbar) genau dann, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii) Wenn P ein Parallelogramm ist, dann gilt
$$\mathcal{F}(f(P)) = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|\mathcal{F}(P) \ .$$

iii) Wenn f ist orthogonal ist, dann $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = 1$.

Beweis
i) Wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, definiere die Matrix
$$B = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$
Eine Probe zeigt, dass $A \cdot B = E$ und $B \cdot A = E$. Damit ist mit $g(u) = Bu, u \in \mathbb{R}^2$, die Inverse Abbildung zu f gegeben.

Beachte, dass f genau dann bijektiv ist, wenn das lineare Gleichungssystem
$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$
für beliebige rechte Seite $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ eine einzige Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Mit Gauß-Elimination und Fallunterscheidung (z.B. $a_{11} =\neq 0$ bzw. $a_{11} = 0$, und $a_{21} \neq 0$ bzw. $a_{21} = 0$) zeigt man, dass dies nur in dem Fall $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ möglich ist.

ii) In der Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms $f(P)$ setzen wir ein und nach eine längere Rechnungsfolge bekommen wir die Gleichheit.

iii) folgt aus ii). $\square$

Definition (Determinante einer 2×2-Matrix) Die Zahl $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ heißt **Determinante der Matrix** $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$. Notation $\det A$.

Satz $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, und $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ wenn $\det A \neq 0$ ist.

Beweis: Erste Aussage siehe Übung. Zweite Aussage folgt aus der ersten, weil $A \cdot A^{-1} = E$, die Einheitsmatrix, ist.

17.2 Determinante einer quadratischen Matrix

Definition (Determinante einer quadratischen Matrix) Sei K ein Körper. Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,n}$, $a_{i,j} \in K$, definiere das Element $\det A \in K$ folgenderweise:
für $n = 1$ setze $\det A = \det(a_{1,1}) = a_{1,1} \in K$,
und angenommen, dass der Begriff für $n = k$ schon definiert ist, setze für $n = k + 1$, $A \in \mathrm{Mat}((k+1) \times (k+1), K)$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det A_{1,1} + (-1)^{2+1} a_{2,1} \det A_{2,1} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n,1} \det A_{n,1} \in K,$$

wobei $A_{i,j} \in \mathrm{Mat}(k \times k, K)$ diejenige Matrix ist, welche aus A durch weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht (sie heißt **Minor**). $\det A$ heißt **Determinante** der Matrix A.

Beobachtung: Diese Definition stimmt in dem Fall $n = 2$ mit der ersten Definition überein.

Satz (Rechenregeln)

i) Für $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gilt $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

ii) Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gilt: $\det A \neq 0_K \Leftrightarrow A$ besitzt eine Inverse bezüglich Multiplikation $\Leftrightarrow$ die Abbildung $f : K^n \mapsto K^n$ definiert durch $f(x) = A \cdot x$, $x \in \mathbb{K}^n$ (Spaltenvektor), ist bijektiv.

iii) Verhalten bei EZU:

(EZU1) : Vertauscht man zwei verschiedene Zeilen (bzw. Spalten) der Matrix A, so ist die Determinante der neuen Matrix gleich $(-1) \cdot \det A$ (hier ist -1 die Inverse bezüglich Addition des Einselements 1 des Körpers K).

(EZU2) Multipliziert man alle Elemente in einer (genau einer!) Zeile (bzw. Spalte) der Matrix A mit einem $\lambda \in K$, so ist die Determinante der neuen Matrix gleich $\lambda \cdot \det A$.

(EZU3) Addiert man ein Vielfaches (d.h. λ-faches, $\lambda \in K$) einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen (verschiedenen!) Zeile (bzw. Spalte), ändert sich der Wert der Determinante nicht.

iv) Entwicklung nach beliebiger Spalte oder Zeile:

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1,j} \det A_{1,j} + (-1)^{2+j} a_{2,j} \det A_{2,j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{n,j} \det A_{n,j} \in K,$$

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2} \det A_{i,2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i,n} \det A_{i,n} \in K,$$

($A_{i,j}$ sind die Minoren). Mit der Summennotation aufgeschrieben:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j} \ .$$

Beweisidee: i) ist ohne Beweis, iv) auch, weil technisch kompliziert. Der Rest folgt aus i) und iv) und Matrixmultiplikationdarstellung von EZU.

17.3 Anwendungen

17.3.1 Zur Berechnung von Volumen

Für $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ heißt die Zahl

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Spatprodukt der Vektoren a, b, c und ist durch $[a, b, c]$ bezeichnet. Sein Betrag ist das **Volumen** des auf a, b, c aufgespannten Spates (Parallelepipeds). Vergleiche mit Flächneinhalt des auf $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogrammes:

$$\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2}} = \sqrt{(v_1 w_2 - w_1 v_2)^2} = |\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}| \ .$$

17.3.2 Zur Entscheidung linearen Abhängigkeit von Vektoren

n Elemente $v_1, v_2, \ldots v_n \in K^n$ (Spaltenvektoren) sind linear unabhängig genau dann, wenn die Determinante der Matrix, welche aus den Spalten $v_1, \ldots, v_n$ besteht, ungleich 0_K ist. Gilt auch mit Zeilen.

17.3.3 Zur Berechnung der inversen Matrix

Ist $\det A \neq 0_K$, so kann man die Inverse A^{-1} von A bezüglich Matrixmultiplikation durch folgende Formel berechnen:

$$(A^{-1})_{i,j} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A_{j,i}), \quad i = 1, \dots n, \; j = 1, \dots n$$

($A_{j,i}$ sind die Minoren).

17.3.4 Zur Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems

Wenn die Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine Inverse bezüglich Multiplikation besitzt (also wenn $\det A \neq 0_K$), dann hat das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $b \in K^n$ (Spaltenvektor) die Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \det B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

wobei man die Matrix $B_i \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ erhält, indem man in der Matrix A die i-te Spalte durch den Spaltenvektor $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ ersetzt, $i = 1, 2, \dots, n$.

17.3.5 Zur Entscheidung der Orientierung

Für $K = \mathbb{R}$ kann det positiv oder negativ sein, wenn nicht Null; siehe Übung.

17.3.6 Zur Berechnung des Normalenvektors einer Ebene im Raum

Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ heißt der Vektor

$$u = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Kreuzprodukt der Vektoren v, w und ist durch $v \times w$ bezeichnet (in dieser Reihenfolge!). $v \times w$ ist senkrecht auf v und auf w bezüglich des Euklidisches Skalarproduktes, und wenn zusätzlich v, w linear unabhängig sind, dann bilden $v, w, v \times w$ eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$.

18 Abbildungen der Ebene und algebraische Strukturen

Wir untersuchen die Menge der linearen, bijektiven Abbildungen der Ebene und einige Teilmengen dieser Menge.

Drehung. Sei $\beta \in [0, 2\pi)$. Wir wollen die Drehung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um Punkt $(0,0)$ um Winkel β gegen Uhrzeigersinne beschreiben. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ (Spaltenvektor), $v = (x_v, y_v)$. Sei $\alpha_v \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen v und e_1 wenn $y_v \geq 0$, und sei $\alpha_v \in (\pi, 2\pi)$ gleich 2π minus der Winkel zwischen v und e_1 wenn $y_v < 0$. Wir führen die (Skizze und die) Rechnungen für den Fall $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\alpha_v \in [0, \beta)$ durch, in den restlichen Fällen würde man den gleichen Resultat bekommen.

Der Vektor $f(v) \in \mathbb{R}^2$ beschliest mit e_1 den Winkel $\alpha_v + \beta$ und hat die gleiche Länge wie der Vektor v, also

$$\begin{aligned} f(v) &= \begin{pmatrix} \|v\| \cos(\beta + \alpha_v) \\ \|v\| \sin(\beta + \alpha_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|v\| (\cos\beta \cos\alpha_v - \sin\beta \sin\alpha_v) \\ \|v\| (\sin\beta \cos\alpha_v + \cos\beta \sin\alpha_v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|v\| \cos\alpha_v \\ \|v\| \sin\alpha_v \end{pmatrix} = D_\beta \cdot v \ . \end{aligned}$$

Die Abbildung bezeichnen wir d_β, ihre Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis D_β, $\beta \in [0, 2\pi)$.

Wir erkennen an d_π die Spiegelung am Punkt $(0,0)$, d_0 als die identische Abbildung.

Spiegelung. Sei $\beta \in [0, \pi)$, die Gerade durch $(0,0)$ mit Richtungsvektor $(\cos\beta, \sin\beta)$ wird die Spiegelachse der Spiegelung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Der Vektor $v = (\|v\| \cos\alpha_v, \|v\| \sin\alpha_v)$ (Spaltenvektor) ist abgebildet wie folgt:

$$\begin{aligned} f(v) &= \begin{pmatrix} \|v\| \cos(\beta + \beta - \alpha_v) \\ \|v\| \sin(\beta + \beta - \alpha_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|v\| (\cos(2\beta) \cos\alpha_v + \sin(2\beta) \sin\alpha_v) \\ \|v\| (\sin(2\beta) \cos\alpha_v - \cos(2\beta) \sin\alpha_v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|v\| \cos\alpha_v \\ \|v\| \sin\alpha_v \end{pmatrix} = S_\beta \cdot v \ . \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Abbildung $f = s_\beta$, ihre Abbildungsmatrix bezüglich der der Standardbasen ist S_β.

Satz

a) Die Drehungen d_β, $\beta \in [0, 2\pi)$, und die Spiegelungen s_β, $\beta \in [0, \pi)$, sind orthogonale Abbildungen bezüglich des Euklidischen Skalarproduktes.

b) Wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear und orthogonal bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts ist, dann ist f entweder eine Spiegelung s_β oder eine Drehung d_β.

Beweis:
a) In der Übung schon bewiesen.
b) Sei $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix der f bezüglich der Standardbasen.

Aus der Voraussetzung, dass f orthogonal ist, bekommen wir $\|f(e_1)\| = \|e_1\| = 1, \|f(e_2)\| = \|e_2\| = 1, \langle f(e_1), f(e_2)\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = 0$, und damit die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ &a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ &a_{12}a_{11} + a_{21}a_{22} = 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten diese als ein (nicht-lineares !) Gleichungssystem für die Unbekannte $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$.

Die dritte Gleichung multipliziert mit $a_{12}a_{11}$ minus die dritte Gleichung multipliziert mit $a_{21}a_{22}$ liefert

$$a_{11}^2 a_{12}^2 - a_{21}^2 a_{22}^2 = 0 \ .$$

In diese Gleichung setzen wir aus der zweiten und ersten Gleichung ein:

$$a_{11}^2(1 - a_{22}^2) - (1 - a_{11}^2)a_{22}^2 = 0$$

und stellen äquivalent um:

$$(a_{11} - a_{22})(a_{11} + a_{22}) = 0 \ .$$

Folglich gilt entweder $a_{11} = a_{22}$ oder $a_{11} = -a_{22}$. Außerdem auch $a_{11}^2 = a_{22}^2$.

Die erste Gleichung minus die zweite Gleichung, umgeformt, mit $a_{11}^2 = a_{22}^2$ impliziert

$$(a_{21} - a_{12})(a_{21} + a_{12}) = 0 \ .$$

Daraus folgt entweder $a_{21} = a_{12}$ oder $a_{21} = -a_{12}$.

Wir haben vier Fälle zu untersuchen:

- $a_{11} = a_{22}$ und $a_{21} = a_{12}$: Die dritte Gleichung liefert $2a_{12}a_{11} = 0$, also ist

  - entweder $a_{11} = 0$ und dann $a_{22} = 0$, $a_{12} = 1$ oder $a_{12} = -1$; wir bekommen $S_{\frac{\pi}{4}}$ oder $S_{\frac{3\pi}{4}}$;

- oder $a_{12} = 0$ und dann $a_{21} = 0$, $a_{11} = 1$ oder $a_{11} = -1$; wir bekommen D_0 oder D_π.

- $a_{11} = -a_{22}$ und $a_{21} = -a_{12}$: Die dritte Gleichung liefert $2a_{12}a_{11} = 0$, also ist
  - entweder $a_{11} = 0$ und dann $a_{22} = 0$, $a_{12} = 1$ oder $a_{12} = -1$; wir bekommen $D_{\frac{3\pi}{2}}$ oder $D_{\frac{\pi}{2}}$;
  - oder $a_{12} = 0$ und dann $a_{21} = 0$, $a_{11} = 1$ oder $a_{11} = -1$; wir bekommen S_0 oder $S_{\frac{\pi}{2}}$.

- $a_{11} = a_{22}$ und $a_{21} = -a_{12}$: Die dritte Gleichung ist automatisch erfüllt. Die erste Gleichung impliziert $-1 \leq a_{11} \leq 1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
  - wenn $a_{21} \geq 0$: Sei $\alpha \in [0, \pi]$ diejenige Zahl welche $\cos\alpha = a_{11}$ erfüllt. Dann ist $a_{21} = \sqrt{1 - a_{11}^2} = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = \sin\alpha$. Wir bekommen D_α.
  - wenn $a_{21} < 0$: Sei $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ diejenige Zahl welche $\cos\alpha = a_{11}$ erfüllt. Dann ist $a_{21} = -\sqrt{1 - a_{11}^2} = -\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$. Wir bekommen D_α.

- $a_{11} = -a_{22}$ und $a_{21} = a_{12}$: Die dritte Gleichung ist automatisch erfüllt. Die erste Gleichung impliziert $-1 \leq a_{11} \leq 1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
  - wenn $a_{21} \geq 0$: Sei $\alpha \in [0, \pi]$ diejenige Zahl welche $\cos\alpha = a_{11}$ erfüllt. Dann ist $a_{21} = \sqrt{1 - a_{11}^2} = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = \sin\alpha$. Wir bekommen $S_{\frac{\alpha}{2}}$.
  - wenn $a_{21} \leq 0$: Sei $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ diejenige Zahl welche $\cos\alpha = a_{11}$ erfüllt. Dann ist $a_{21} = -\sqrt{1 - a_{11}^2} = -\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2} = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$. Wir bekommen $S_{\frac{\alpha}{2}}$.

Wir haben in allen Fällen entweder eine Drehung d_α oder eine Spiegelung $s_{\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, bekommen. Damit ist b) bewiesen.$\square$

Satz

a) Die Menge aller Drehungen der Ebene um Punkt $(0, 0)$ mit Komposition $\circ$ bildet eine kommutative Gruppe. Diese Menge hat folgende Form

$$\mathrm{SO}(2; \mathbb{R}) = \{d_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

und heißt **spezielle orthogonale Gruppe**.

b) Die Menge aller orthogonalen Abbildungen der Ebene mit Komposition bildet eine nicht-kommutative Gruppe. Diese Menge hat folgende Form

$$\mathrm{O}(2;\mathbb{R}) = \{s_\beta : \ \beta \in [0,\pi)\} \cup \{d_\alpha : \alpha \in [0,2\pi)\}$$

und sie heißt **orthogonale Gruppe**.

Beweis.

Bemerkung. Die spezielle orthogonale Gruppe aller Drehungen des Raumes um Punkt $(0,0,0)$ mit Komposition bildet eine nicht-kommutative Gruppe.

19 Komplexe Zahlen

Wir bezeichnen e_r die Abbildung $e_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $e_r(u) = r \cdot u, u \in \mathbb{R}^2$, für $r > 0$; sie heißt **Streckung um Faktor** r. Abbildungen der Form $f = e_r \circ d_\alpha$, $\alpha \in [0,2\pi)$, heißen **Drehstreckungen**.

Satz Die Menge aller Drehstreckungen der Ebene, d. h. die Menge

$$G = \{e_r \cdot d_\alpha : \ r > 0, \alpha \in [0,2\pi)\}$$

mit Komposition $\circ$ bildet eine kommutative Gruppe.

Beweis.

Wiederholung. Wir haben auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Operationen $\oplus$ und $\odot$ eingeführt; sie bilden ein Körper. Insbesondere, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ mit $\odot$ bildet eine kommutative Gruppe. Wir schreiben $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $x + iy$ statt (x, y).

Wir haben die Menge $M = \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2;\mathbb{R}) : \exists x, y \in \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\}$ mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation; sie bilden ein Körper. Insbesondere $M \setminus \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ mit $\cdot$ bildet eine kommutative Gruppe.

Wir werden einsehen, dass die obigen drei Gruppen sind "prinzipiell gleich", wir sagen **isomorph**.

<u>Bezug zwischen Elementen</u> Zwischen $\mathbb{C}$ und M ist offensichtlich. Wenn $e_r \circ d_\alpha \in G$, dann sei $a = r\cos\alpha$ und $b = r\sin\alpha$; wir haben das Element $a + ib \in \mathbb{C}$. Wenn $a + ib \in \mathbb{C}$, sei $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und sei $\alpha \in [0,2\pi)$ diejenige Zahl, welche $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ erfüllt (in Analysis wird

bewiesen, dass genau eine solche reelle Zahl existiert); wir haben das Element $e_r \circ d_\alpha$.

Definition Sei $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $a+ib$ heißt **kartesische Form** der komplexen Zahl. Wir schreiben $re^{i\alpha}$ statt $e_r \circ d_\alpha$ und nennen dieses Symbol **Exponentialform** der komplexen Zahl. a, b heißen **kartesische Koordinaten** und r, α heißen **Polarkoordinaten** der komplexen Zahl $a + ib = re^{i\alpha}$.

<u>Bezug zwischen Operationen</u> Wir wissen schon, dass bei dem Bezug zwischen linearen Abbildung zu ihre Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis enstpricht die Komposition $\circ$ der Matrixmultiplikation $\cdot$.

Wir untersuchen zunächst den Bezug zwischen $\odot$ und $\circ$. Sei $r_1e^{i\alpha_1}$ die Exponentalform von a_1+ib_1 und $r_2e^{i\alpha_2}$ die Exponentalform von a_2+ib_2. Wir berechnen

$$(a_1 + ib_1) \odot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_2b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$$

und die Exponentialform dieser komplexen Zahl:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(a_1a_1 - b_2b_2)^2 + (b_1a_2 + a_1b_2)^2} = ... = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = r_1 \cdot r_2, \\ \cos\alpha &= \frac{a_1a_2 - b_1b_2}{r} = \frac{a_1}{r_1}\frac{b_2}{r_2} - \frac{b_1}{r_1}\frac{b_2}{r_2} = \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \sin\alpha &= \frac{b_1a_2 + a_1b_2}{r} = ... = \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \end{aligned}$$

folglich ist $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und die Exponentialform $r_1 \cdot r_2e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$. Diese ist die Drehstreckung $(e_{r_1 \cdot r_2} \circ d_{\alpha_1+\alpha_2}) = (e_{r_1} \circ d_{\alpha_1}) \circ (e_{r_2} \circ d_{\alpha_2})$. Das bedeutet, dass $\cdot$ entspricht der $\circ$.

Wir untersuchen zunächst den Bezug zwischen $\odot$ und $\cdot$. Die Zahl a_1+ib_1 enspricht der Matrix $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ und die Zahl $a_2 + ib_2$ enspricht der Matrix $\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$. Wir berechnen $(a_1+ib_1)\odot(a_2+ib_2) = (a_1a_2-b_2b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2)$, die entsprechende Matrix ist

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_2b_1 + b_2a_1 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix} .$$

Eine Nebenrechnung zeigt, dass diese gleich der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

ist. Das bedeutet, dass $\odot$ entspricht der Matrixmultiplikation $\cdot$, wie es zu erwarten war.

Wir haben die Beziehungen zwischen den drei Gruppen festgestellt. Wenn wir die Menge G um den Element o definiert durch $o((x,y)) = (0,0), (x,y) \in \mathbb{R}^2$ erweitern, und eine neue Operation $+$ auf der Menge $G \cup \{o\}$ entweder mithilfe $\mathbb{C}$ und $\oplus$, oder mithilfe M und $+$ definieren, sind die drei Körper "prinzipiell gleich".

Da die Exponentialform einer komplexen Zahl über Drehstreckung definiert ist, dürfen in der formaler Schreibweise mit dem Symbol $re^{i\alpha}$ die Rechenregeln für die Multiplikation und Potenzrechnung engewendet werden:

$$(r_1 e^{i\alpha_1}) \cdot (r_2 e^{i\alpha_2}) = r_1 \cdot r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad \frac{1}{re^{i\alpha}} = \frac{1}{r} e^{i(-\alpha)} \ .$$

Definition $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ heißt **goniometrische Form** der komplexen Zahl, $r > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Die Polarkoordinate $r \geq 0$ einer komplexer Zahl z heißt **absoluter Betrag**, bezeichnet $|z|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt **Argument**, und $\alpha \in [0, 2\pi)$ heißt **Hauptwert des Argumentes** der z, bezeichnet $\operatorname{Arg} z$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ veranschaulicht in kartesischen Koordinatensystem heißt **Gauß'sche Zahlenebene**. Für $z = a + ib$ heißt a **Realteil** von z, bezeichnet $\Re z$, und b **Imaginärteil** von z, bezeichnet $\Im z$. $a + ib$ heißt die **komplex konjugierte** von z, bezeichnet $\overline{z}$.

Insbesondere gelten

$$\begin{aligned} &e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha && \text{Eulersche Formel,} \\ &(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha), \quad n \in \mathbb{N}, && \text{De Moivre Formel.} \end{aligned}$$

Zu Berechnung der Inverse bezüglich Multiplikation einer komplexen Zahl in kartesischen Form (und auch beim Teilen) ist der Trickt "Erweiterung des Bruches um die komplex Konjugierte" zu benutzen.

20 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

Wir betrachten quadratische reelle Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$, sie stellen eine lineare Abbildung des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ ausgerüstet mit dem Standardbasis. Ziel ist eine andere Basis zu finden, welche zu A "passt".

Man kann die Matrix A als Elemenet der Menge $\mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ sehen; dass wird uns helfen, einige Rechnungen durchzuführen, aber am Ende schalten wir zu reelle Zahlen zurück.

Definition Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine (reelle, quadratische) Matrix. Eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **(reeller) Eigenwert** der Matrix A, falls es ein $v \in \mathbb{R}^n$ (Spaltenvektor) gibt mit $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ und $A \cdot v = \lambda v$. Dieser Vektor heißt zu λ gehöriger **(reeller) Eigenvektor** der Matrix A. Die Menge

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}$$

heißt zu λ gehöriger **(reeller) Eigenraum** der A.

Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **(komplexer) Eigenwert** der Matrix A, falls es ein $v \in \mathbb{C}^n$ (Spaltenvektor) gibt mit $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ und $A \cdot v = \lambda v$. Dieser Vektor heißt zu λ gehöriger **(komplexer) Eigenvektor** der Matrix A.

Die Menge aller (komplexen und reellen) Eigenwerten heißt **Spektrum** der Matrix A.

Satz

i) Ist λ ein reeller (bzw. komplexer) Eigenwert der (reellen quadratischen) Matrix A, dann ist der Eigenraum E_λ gleich $\mathrm{Los}(A-\lambda E, 0) \subset \mathbb{R}^n$ (bzw. $\subset \mathbb{C}^n$), wobei E die Einheitsmatrix mit n Zeilen und n Spalten ist. Folglich ist E_λ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (bzw. über $\mathbb{C}$).

   Ist λ kein Eigenwert der Matrix A, dann ist $E_\lambda = \mathrm{Los}(A-\lambda E, 0) = \{0\}$ (und hat keine besondere Bedeutung).

ii) λ ist ein Eigenwert der Matrix A genau dann, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$.

Beweis. i) $v \in E_\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot v = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow v \in \mathrm{Los}(A - \lambda E, 0)$. Gleiche Argumentation für komplexe Zahlen.

ii) λ ist Eigenwert genau dann, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)x = 0_{\mathbb{R}^n}$ nicht nur die triviale Lösung $x =_{\mathbb{R}^n}$ besitzt. Das ist äquivalent dazu, dass die Matrix $A - \lambda E$ nicht invertierbar ist. Dies gilt genau dann , wenn ihre Determinante gleich Null ist. Gleiche Argumente mit komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$ ist eine Körper). $\square$

Bemerkung. Wenn wir formal $\det(A - \lambda E)$ berechnen, entwickeln und in Potenzen von λ ordnen, wir bekommen ein Polynom in λ.

Definition $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ heißt **charakteristischer Polynom** der Matrix A.

Definition Sei $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ (oder $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$) und $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. λ_0 heißt **Nullstelle des Polynomes** p, wenn $p(x)$ ausgewertet für $x = \lambda_0$ die Zahl 0 ergibt, d.h. wenn $p(\lambda_0) = 0$ ist.

Zusammengfasst:

Satz λ_0 ist ein Eigenwert der Matrix A genau dann, wenn λ_0 eine Nullstelle des charkteristisches Polynomes der Matrix A ist.

Es ist ein tatsächliches Problem, Nullstellen eines Polynomes zu bestimmen. Wenn der Polynom Grades höchstens drei ist, es gibt allgemeine Formeln zur Berechnung der Nullstellen (z.B. $p-q$-Formel), sonst aber nicht. Man kann raten, tricks anwenden, Näherungen mit Hilfe der Analysis berechnen.

Wiederholung: $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ (oder $\mathrm{Pol}(\mathbb{C})$) ist ein Ring, kein Körper. Man kann Polynone addieren, Multiplizieren. Es gibt Nullelement, Einselement. Man kann Inversen bezüglich Addition berechnen deswegen auch Polynome subtrahieren.

Aber in allgemeinen nicht jeder Polynom Inverse bezüglich Multiplaktion besitzt, deswegen kann man in allgemeinen nicht Polynome dividieren. Man kann nur die **Division mit Rest** durchführen. (Vergleiche mit der Menge $\mathbb{Z}$, mit $+, \cdot$, Elemente $0, 1$; diese ist auch ein Ring).

Sei $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ (oder $\mathrm{Pol}(\mathbb{C})$) und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Dann ist $q(x) = x - \lambda_0$ auch ein polynom und sei nach Division mit Rest

$$p(x) = s(x)(x - \lambda_0) + r(x)$$

mit s, r Polynome, Grad von r kleiner als Grad von q, entstanden. Da Grad von q gleich 1 ist, ist $r(x) = a_0$ für ein $a_0 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Es ist leicht einzusehen, dass λ_0 genau dann eine Nullstelle von p ist, wenn p ohne Rest teilbar durch $x - \lambda_0$ ist (d.h. wenn $r = 0$):

Wenn λ_0 Nullstelle von p ist, dann $\Leftrightarrow p(\lambda_0) = 0$. Daraus folgt, dass $\Leftrightarrow s(\lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_0) + r(\lambda_0) = 0$, und $\Leftrightarrow r(\lambda_0) = 0$, $\Leftrightarrow r = 0$. Das bedeutet, dass p durch $(x - \lambda_0)$ ohre Rest Teilbar ist.

Umgekehrt, ist p durch $(x - \lambda_0)$ ohre Rest Teilbar, dann ist $r = 0$ und folglich $p(x) = s(x)(x - \lambda_0)$. Daraus folgt, dass $p(\lambda_0) = s(\lambda_0) \cdot (\lambda_0 - \lambda_0) = s(\lambda_0) \cdot 0 = 0$, das heißt, λ_0 ist eine Nullstelle von p.

Definition Sei $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ (oder $\mathbb{C}$), $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. k heißt

Vielfachheit der Nullstelle λ_0 von p wenn p ohne Rest durch $(x - \lambda_0)^k$ teilbar ist, aber nicht ohne Rest durch $(x - \lambda_0)^{k+1}$ teilbar ist.

Definition Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A und $k \in \mathbb{N}$. k heißt **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_0 der Matrix A, wenn k die Vielfachheit der Nullstelle λ_0 des charakteristischen Polynomes von A ist.

Die Zahl $g = \dim \mathrm{Los}(A - \lambda_0 E)$ heißt **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_0 der Matrix A.

Satz

i) Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist immer kleiner oder gleich seinen algebraischen Vielfachheit.

ii) Die Summe von Vielfachheiten allen (komplexen und reellen) Nullstellen eines Polynomes Grades n ist gleich n (**Fundamentalsatz der Algebra**).

iii) Jedes Polynom mit reellen oder komplexen Koeffizienten vom Grad größer oder gleich 1 hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Ohne Beweis. ii) und iii) sind tiefe Sätze der komplexen Analysis. Schwierig ist eigentlich iii), da ii) aus iii) elementar hergeleteitet werden kann. i) könnte man mit linearer Algebra beweisen.

Wiederholung. Zu $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, ist die komplex konjugierte Zahl $\overline{z} = a - ib$. Folgende Rechenregeln gelten und sind einfach zu beweisen:

- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$, $z \cdot \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Definition Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{C})$ heißt die Matrix $\overline{A} \in \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{C})$ die zu A **komplex konjugierte** Matrix. Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{C})$ (oder $\mathbb{R}$) heißt die Matrix $A^T \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{C})$ (oder $\mathbb{R}$) die zu A **transponierte** Matrix.

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ heißt **symmetrisch**, wenn $A^T = A$, und eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ heißt **hermitesch**, wenn $\overline{A}^T = A$.

Folgende Rechenregeln gelten und sind einfach zu beweisen:

i) $(A^T)^T = A$, $\quad \overline{\overline{A}} = A$, $\quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $\quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

ii) Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ (Spaltenvektoren) gilt folgende Formel:
$$(A^T \cdot x)^T \cdot y = x^T \cdot (A \cdot y) \ .$$

iii) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Spaltenvektoren) gilt folgende Beziehung zwischen Matrixmultiplikation und Euklidischem Skalarprodukt:
$$x^T \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y \rangle \ .$$

iv) Für $x \in \mathbb{C}^n$ (Spaltenvektor) mit $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ gilt:
$$\overline{x}^T \cdot x = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i x_i > 0 \ .$$

Lemma

i) Wenn $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ symmetrisch und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Wenn $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ hermitesch und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. i) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ symmetrisch, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Also ist insbesondere $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, $Av = \lambda v$. Eine kurze Nebenrechnung liefert:

$$\overline{\lambda} \cdot \overline{v} = \overline{\lambda \cdot v} = \overline{A \cdot v} = \overline{A} \cdot \overline{v} = A \cdot \overline{v} \ .$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass A reell ist. Die Formel von oben für $x = \overline{v}, y = v$ liefert:

$$(A^T \cdot \overline{v})^T \cdot v = \overline{v}^T \cdot (A \cdot v) \ .$$

In diesem Ausdruck berechnen wir jeweils die rechte und die linke Seite. Da v Eigenvektor zu λ ist, gilt

$$\overline{v}^T \cdot (A \cdot v) = \overline{v}^T \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda(\overline{v}^T \cdot v),$$

und wegen der Symmetrie von A, siehe die Nebenrechnung, gilt

$$(A^T \cdot \overline{v})^T \cdot v = (A \cdot \overline{v})^T \cdot v = (\overline{\lambda} \cdot \overline{v})^T \cdot v = \overline{\lambda}(\overline{v}^T \cdot v) \ .$$

Folglich ist

$$\overline{\lambda}(\overline{v}^T \cdot v) = \lambda(\overline{v}^T \cdot v) \ .$$

Diese Gleichung geteilt durch $\overline{v}^T \cdot v \neq 0$ impliziert $\overline{\lambda} = \lambda$, was $\lambda \in \mathbb{R}$ bedeutet.

Der Beweis von ii) ist analog, nur die Nebenrechnung lautet

$$\overline{\lambda} \cdot \overline{v} = \overline{\lambda \cdot v} = \overline{A \cdot v} = \overline{A} \cdot \overline{v} \ ,$$

und bei der Umformung der linken Seite wird die Hermitizität von A (statt Symmetrie), woraus $A^T = (\overline{A}^T)^T = \overline{A}$ folgt, benutzt. □

Lemma Wenn $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann gibt es auch einen reellem Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ zu λ. Insbesondere gilt dies für jeden Eigenwert einer symmetrischen Matrix.

Beweis. Sei $u \in \mathbb{C}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Wir schreiben $u = u_1 + iu_2$ mit $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$. $Au = \lambda u$ ist äquivalent zu $Au_1 + iAu_2 = \lambda u_1 + i\lambda u_2$. Da λ und A reell sind, ist die letzte Aussage äquivalent zu

$$Au_1 = \lambda u_1 \quad \wedge \quad Au_2 = \lambda u_2 \ .$$

Das bedeutet, dass auch u_1 oder u_2 Eigenvektor zu λ ist (eins davon ist ungleich $0_{\mathbb{R}^n}$). □

Lemma

i) Wenn $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ symmetrisch ist, dann gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^n$, welche nur aus Eigenvektoren von A besteht.

ii) Wenn $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ hermitesch ist, dann gibt es eine Basis von $\mathbb{C}^n$, welche nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Beweis von i) (ii) wäre analog). Wir wissen bereits: Jeder Eigenwert ist reell und zu jedem Eigenwert kann man reelle Eigenvektoren finden. Die Frage ist nun, ob man genügend viele Eigenvektoren finden kann. Sei

$$U = \mathrm{lin}\{u \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } Au = \lambda u\}$$

die lineare Hülle von allen Eigenvektoren zu allen möglichen Eigenwerten von A und der $0_{\mathbb{R}^n}$. $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir wollen beweisen, dass $U = \mathbb{R}^n$ ist. Erstmal bemerken wir, dass $0_{\mathbb{R}^n} \in U$ ist: Wir können z.B. $\lambda = 1$ wählen (beachte aber: $u = 0_{\mathbb{R}^n}$ ist kein Eigenwektor und 1 muss kein Eigenwert sein!). Weiterhin kann man ziemlich einfach beweisen, dass U ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist (dazu ist zu überprüfen, dass für beliebige $u_1, u_2 \in U$ und $\mu \in \mathbb{R}$ auch $u_1 + u_2$ und μu_1 in U liegen).

Die Aussage, dass $U \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ist wesentlich tiefer, sie folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra.

Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von U welche nur aus Eigenvektoren von A besteht, und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die entsprechende Eigenwerte.

Wenn jetzt $U \neq \mathbb{R}^n$ wäre, dann gibt es $v_0 \in \mathbb{R}^n \setminus U$ mit $v_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Mit etwas Mühe kann man einen anderen Vektor $v_0' \in \mathbb{R}^n \setminus U$ mit $v_0' \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ sogar so auswählen, dass $v_0' \perp U$ ist (d.h. $\forall u \in U :\ v_0' \perp u$); dazu sucht man Koeffizienten $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$ sodass $v_0' = v_0 - \sum_{i=1}^k \mu_i u_i$ die Bedingung erfüllt.

Sei

$$V = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp U\} \ .$$

Man kann zeigen, dass V auch ein Vektorraum ist, dass $V \cap U = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, und dass für $v \in V$ immer $Av \in V$ gilt.

Begründung der letzten Aussage: Sei $x \in V$ und $u \in U$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $\langle Ax, u\rangle = 0$. Mit Benutzung der Formeln und der Symmetrie von A folgt

$$\begin{aligned}\langle Ax, u\rangle &= (Ax)^T \cdot u = x^T \cdot (A^T u) = x^T \cdot Au = x^T \cdot A(\sum_{i=1}^k \mu_i u_i) = x^T \cdot (\sum_{i=1}^k \mu_i A u_i) \\ &= x^T \cdot (\sum_{i=1}^k \mu_i \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^k \mu_i \lambda_i (x^T \cdot u_i) = \sum_{i=1}^k \mu_i \lambda_i \cdot 0 = 0 \ .\end{aligned}$$

Begründung der vorletzten Aussage: Offensichtlich ist $0_{\mathbb{R}^n} \in V$, $0_{\mathbb{R}^n} \in U$. Anderseits, wenn $u_0 \in V \cap U$ ist, dann gilt für alle $u \in U$ $u_0 \perp u$, insbesondere auch für $u = u_0$. Daraus folgt $\langle u_0, u_0 \rangle = 0$, und schließlich, dass $u_0 = 0_{\mathbb{R}^n}$. Damit ist $V \cap U = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ bewiesen.

Als Übung bleibt zu zeigen, dass V ein Vektorraum ist.

Es folgt, dass die Abbildung $f : V \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f(x) = Ax$ für $x \in V$ eine lineare Abbildung von dem Vektorraum V in sich ist. Sie besitzt eine Darstellungsmatrix, welche mindestens einen Eigenwert λ_0 hat (hier ist die Benutzung des Fundamentalsatzes der Algebra versteckt!). Es ist dann einfach zu zeigen, dass dieser Wert auch ein Eigenwert von A ist, und der zugehörige Eigenvektor v_0 auch für A ein zugehöriger Eigenvektor ist. Dies ist dann ein Element der Menge $V \cap U$ und ist ungleich dem Nullvektor. Das ist ein Widerspruch. Folglich muss $U = \mathbb{R}^n$ sein. $\square$

Lemma Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ symmetrisch, λ_1, λ_2 Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2. Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, dann $v_1 \perp v_2$.

Bemerkung. Eine ähnliche Aussage gilt für komplexe hermitesche Matrix, man muss das Skalarprodukt (und damit Orthogonalität) in Vektorräumen über $\mathbb{C}$ entsprechend definieren.

Beweis. Wenn $Au_1 = \lambda_1 u_1$ und $Au_2 = \lambda_2 u_2$ ist, dann rechnen wir

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2 \rangle &= \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle - \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle = \langle \lambda_1 u_1, u_2 \rangle - \langle u_1, \lambda_2 u_2 \rangle \\
&= \langle Au_1, u_2 \rangle - \langle u_1, Au_2 \rangle = (Au_1)^T \cdot u_2 - u_1^T \cdot Au_2 \\
&= (Au_1)^T \cdot u_2 - (A^T u_1)^T \cdot u_2 = (Au_1)^T \cdot u_2 - (Au_1)^T \cdot u_2 = 0 \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit die Symmetrie von A benutzt haben. Daraus folgt $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ und wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, dann gilt $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Dies bedeutet, dass $u_1 \perp u_2$. $\square$

Satz Für jede reelle quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ gilt: wenn A symmetrisch ist (d.h. $A^T = A$), dann existiert eine Basis von $\mathbb{R}^n$, welche nur aus Eigenvektoren von A besteht und zusätzlich orthonormal ist.

Wenn wir zu den Eigenwerten (mit Multiplizität) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ zugehörigen orthonormalen Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ nennen, und die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \ldots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \ldots & v_{n2} \\ . & . & \ldots & . \\ v_{1n} & v_{2n} & \ldots & v_{nn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & . & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$$

formen, dann gilt: C ist invertierbar, $C^{-1} = C^T$, $A = CDC^{-1}$.

Beweis zusammengefasst: Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra, es gibt "genügend viele“ (komplexe) Eigenwerte. Aber es ist nicht klar, ob es zu jedem Eigenwert "genügend viele“ linear unabhängige Eigenvektoren gibt (d.h. ob geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen ist).

Wir haben Hilfsaussagen bewiesen:
a) Wenn A symmetrisch ist, dann ist jeder Eigenewert reell.
b) Wenn es weiniger Eigenvektoren gäbe als die Dimension des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$, dann zerlegen wir diesen Vektorraum in zwei Teilen. Auf den restlichen Teil bekommen wir ein Widerspruch mit Nutzung der Symmetrie der A.
c) Eventuelle komplexe Eigenvektoren können wir auf reelle Eigenvektoren tauschen.

Schlieslich müssen wir die so erhaltene Basis orthonormalisieren. In jedem Eigenraum können wir die Basisvektoren so verändern, dass sie eine orthonormale Basis dieses Eigenraumes bilden. Damit wird die gesammte Basis des $\mathbb{R}^n$ automatisch auch orthonormal, da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten für symmetrische Matrix orthogonal sind. $\square$

Bemerkung: Nach Einführung komplexen Vektorräume könnte man die analoge Aussage beweisen. Für jede komplexe quadratische Matrix gilt: wenn A hermitesch ist (d.h. $\overline{A}^T = A$), dann existiert eine Basis von $\mathbb{C}^n$, welche nur aus Eigenvektoren besteht, und zusätzlich orthonormal ist. Die entsprechende Matrizen C, D sind komplex und $C^{-1} = \overline{C}^T$.

Definition Wir sagen dass die Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ **ähnlich** sind, wenn eine invertierbare Matrix $C \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ existiert so, dass $A = CBC^{-1}$. Wir sagen, dass die Matrix A **diagonalisierbar** über $\mathbb{R}$ ist, wenn eine invertierbare Matrix $C \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ und eine diagonale Matrix $D \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ existieren so, dass $A = CDC^{-1}$.

Beobachtung: Wenn A ähnlich zu B ist, dann ist auch B ähnlich zu A.

Beweis. Sei A ähnlich zu B, d.h. existiert C invertierbar mit $A = CBC^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} C^{-1}A &= C^{-1}(CBC^{-1}) = (C^{-1}C)(BC^{-1}) = BC^{-1}, \\ C^{-1}AC &= (BC^{-1})C = B(C^{-1}C) = B. \end{aligned}$$

Folglich ist $B = C^{-1}AC = C^{-1}A(C^{-1})^{-1}$ mit C^{-1} invertierbar, d.h. B ist ähnlich zu A. $\square$

Bemerkung. Wenn A, B ähnlich sind, dann representieren sie die gleiche lineare Abbildung, nur bezüglich andere Basis (aber die gleiche Basis in Definitionsbereich und in Wertebereich!). Determinante charakterisiert

Flächenänderung, Spur **Excentrizität** der linearen Abbildung, deswegen sind folgende Resultate nicht überraschend.

Satz Wenn A, B ähnlich sind, dann gilt

$$\det A = \det B, \qquad \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$$

und A und B haben die gleiche Eigenwerte (mit gleicher Vielfachheit). Folglich, wenn A diagonalisierbar ist, und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seine Eigewerte mit Multiplizität aufgelistet sind, dann

$$\det A = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n, \qquad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + ... + \lambda_n \ .$$

Beweis. Für $n = 2$, da wir die nötige Rechenregeln nur für diesen Fall bewiesen haben. Sei $A = CBC^{-1}$ mit invertierbaren C.

Es gelten mit Hilfe von Sätze der Vorlesung bzw. Übung:

$$\begin{aligned}\det A = \det(CBC^{-1}) = \det C \cdot \det B \cdot \frac{1}{\det C} = \det B, \\ \operatorname{tr} A = \operatorname{tr}((CB)C^{-1}) = \operatorname{tr}(C^{-1}(CB)) = \operatorname{tr} B \ .\end{aligned}$$

Sei λ_A ein Eignewert von A mit zugehörigen Eigenvektor v_A. Dann ist $v_A \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ und $Av_A = \lambda_A v_A$. Es folgen

$$\begin{aligned}&CBC^{-1}v_A = \lambda_A v_A = \lambda_A CC^{-1}v_A = C\lambda_A C^{-1}v_A, \\ &C^{-1}CBC^{-1}v_A = C^{-1}C\lambda_A C^{-1}v_A, \\ &BC^{-1}v_A = \lambda_A C^{-1}v_A \ .\end{aligned}$$

Weil $C^{-1}v_A \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, ist λ_A ein Eigenwert von B mit zugehörigen Eigenvektor $C^{-1}v_A$.

Sei A ählich zu diagonalen D, wobei die Diagonalelemente der D durch $d_1, d_2, \ldots, d_n$ bezeichnet sind. Wir berechnen, dass D die Eigenwerte d_i hat (zugehöriger Eigenvektor ist e_i), $\det D = \prod_{i=1}^n d_i$ und $\operatorname{tr} D = \sum_{i=1}^n d_i$. Nach der ersten Teil des Satzes hat A die gleiche Eigenwerte wie D, also nach eventuellen Umordnung ist $\lambda_1 = d_1, \ldots, \lambda_n = d_n$. Folglich

$$\begin{aligned}\det A = \det D = \prod_{i=1}^n d_i = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \\ \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ .\end{aligned}$$

□

Definition Eine Matrix $C\,\mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn C invertierbar ist und $C^{-1} = C^T$ erfüllt.

Bemerkung. Orthogonale Matrizen sind die Abbildungsmatrizen von orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezüglich einer orthonormalen Basis. Wenn eine MAtrix orthogonal ist, dann sind ihre Spalten orthonormale Vektoren bezüglich des euklidischen Skalarproduktes. Dies gilt auch für Zeilen.

21 Lineare Differenzengleichungssysteme

Motivation Viele Größen $x_1, \ldots, x_n$ ändern sich in Zeitabständen k, z.B. Betrag auf Bankkonto, Anzahl der Glieder einer Population, Menge eines Stoffes bei einer chemischen Reaktion. Seien $x_1(k), \ldots, x_n(k)$ die Größen in der Zeitpunkt k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nehmen wir an, dass diese Größen sich nach folgenden Gesätze ändern:

$$\begin{array}{ll} x_1(k+1) & = a_{1,1}x_1(k) + a_{1,2}x_2(k) + \cdots + a_{1,n}x_n(k) \\ x_2(k+1) & = a_{2,1}x_1(k) + a_{2,2}x_2(k) + \cdots + a_{2,n}x_n(k) \\ \quad \ldots & \\ x_n(k+1) & = a_{n,1}x_1(k) + a_{n,2}x_2(k) + \cdots + a_{n,n}x_n(k) \end{array}.$$

Dies kann man mit Hilfe einer Matrix A und Spaltenvektor $u(k) = (x_1(k), \ldots x_n(k))$ kurz als

$$u(k+1) = A \cdot u(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

schreiben. Gegeben $x_1(0), \ldots, x_n(0)$ als Anfangswerte, man kann die Lösung mithilfe Matrixmultiplikation angeben: $u(k) = A^k u(0)$, $k \in \mathbb{N}$.

Die Matrix spielt hier die Rolle der Kodierung bestimmten (physikalischen, biologischen) Gesetzen. A priori ist sie nicht immer symmetrisch.

Wenn man die Matrix A diagonalisieren kann, vereinfachen sich wesentlich die Rechnungen, und man kann sogar Aussagen über das Verhalten des Systems für lange Zeiten ($k \to \infty$) machen.

Beispiel. Ein Räuber-Beute-Modell. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= 0,5R_k + 0,4B_k\ , \\ B_{k+1} &= -0,104R_k + 1,1B_k, \quad k = 0,1,2,\ldots \\ R_0 &= 300, \quad B_0 = 100. \end{aligned}$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar, mit $C = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$ und

$D = \begin{pmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 0,58 \end{pmatrix}$ ist $A = CDC^{-1}$. Folglich ist die Lösung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R(k) \\ B(k) \end{pmatrix} &= A^k \begin{pmatrix} R(0) \\ B(0) \end{pmatrix} = (CDC^{-1})^k \begin{pmatrix} R(0) \\ B(0) \end{pmatrix} = CD^kC^{-1} \begin{pmatrix} R(0) \\ B(0) \end{pmatrix} = \\ &= C \begin{pmatrix} 1,02^k & 0 \\ 0 & 0,58^k \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} R(0) \\ B(0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{55}(10 \cdot 1,02^k \cdot 200 + 5 \cdot 0,58^k \cdot 2900) \\ \frac{1}{55}(13 \cdot 1,02^k \cdot 200 + 1 \cdot 0,58^k \cdot 2900) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Mit Kenntnissen aus Analysis kann man beobachten, dass die Population für große k wächst, weil $1,02 > 1$. Weil noch $|0,58| < 1$, wird das Verhältnis $\frac{R(k)}{B(k)}$ für große k ungefähr $\frac{10}{13}$.

Algebraische Struktur der Lösungsmengen

Definition Sei M eine Menge. Abbildungen $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to M$ werden wir **Folge** von Elementen aus M nennen, und die Menge aller solchen Folgen als $\mathcal{F}(M)$ bezeichnen. Wir bezeichnen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definition Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ eine Matrix. Das System von Gleichungen

$$x(k+1) = A \cdot x(k), \quad k \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

für die Unbekannte $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ (Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren gesehen) werden wir **homogenes lineares Differenzengleichungssystem** nennen.

Sei noch b eine Folge von Spaltenvektoren, $b \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, gegeben. Das System von Gleichungen

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + b(k), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

für die unbekannte $x \in F(R^n)$ werden wir **inhomogenes lineares Differenzengleichungssystem** nennen.

Notation für die Lösungsmengen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)}) &= \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \ x(k+1) = x(k)\}, \\ \mathrm{Los}(A, b) &= \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \ x(k+1) = x(k) + b(k)\}. \end{aligned}$$

Beobachtung. Wenn V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, dann können wir auf der Menge $\mathcal{F}(V)$ die zweistellige Operation $\oplus$ (Vektoraddition) und eine Multiplikation mit Skalaren ($\odot$) folgenderweise definieren:

$$(f \oplus g)(k) = f(k) + g(k), \quad (\lambda \odot f)(k) = \lambda f(k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

für $f, g \in \mathcal{F}(V), \lambda \in \mathbb{R}$. Damit wird $\mathcal{F}(V)$ mit $\oplus$ und $\odot$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Der Einfachheit halber schreiben wir $+$ statt $\oplus$ und nichts statt $\odot$.

Satz (über der Struktur der Lösungsmenge des homogenen Systems) Die Lösungsmenge $\text{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$ als Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum. Dieser Vektorraum hat Dimension n.

Beweisidee. Zu zeigen ist, dass für $x, y \in \text{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $x + y$ und λx in $\text{Ls}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$ liegen. Die zweite wird später bewiesen.

Satz (über der Struktur der Lösungsmenge des inhomogenen Systemes) Wenn $y_p \in \text{Los}(A, b)$, dann

$$\text{Los}(A, b) = \{y_p + y : y \in \text{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})\}$$

(folglich ist $\text{Los}(A, b)$ ein affiner Raum).

Beweisidee. Zu zeigen sind zwei Teilmengenrelationen.

Definition Eine Basis von $\text{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$ heißt **Fundamentalsystem** von Lösungen des homogenen Systems. Eine Lösung des inhomogenen Systems heißt eine **partikuläre** Lösung des inhomogenen Systemes.

Bezeichnen mit $y_1, \dots, y_n$ eine Basis von $\text{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$ und y_p ein Element von $\text{Los}(A, b)$. Mit dieser Notation können wir von den Sätzen feststellen:

$$\begin{aligned} y \in \text{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)}) \ &\Leftrightarrow\ \exists c_1, \dots, c_n :\ y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \\ y \in \text{Los}(A, b) \ &\Leftrightarrow\ \exists c_1, \dots, c_n :\ y = y_p + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n\ . \end{aligned}$$

Beobachtungen.

- Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und definiere $y_i(k) = A^k e_i$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann sind $y_1, \dots, y_n \in \text{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$. Man kann außerdem zeigen, dass sie linear unabhängig sind und dass sie eine Basis von $\text{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$ bilden. Folglich bilden sie einen Fundamentalsystem.
- Definiere $y_p(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b_{k-1-i}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Man kann zeigen, dass $y_p \in \text{Los}(A, b)$. Folglich ist y_p eine partikuläre Lösung.
- Damit haben wir das inhomogene und homogene Differenzengleichungssystem vollständig gelöst.

- Wenn A diagonalisierbar ist, dann können wir einen passenderen Fundamentalsystem finden. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte (mit Vielfachheit aufgezählt) und $v_1, \ldots, v_n$ die zugehörige Eigenvektoren der Matrix A, welche eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Definiere $y_i(k) = \lambda_i^k v_i$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, n$. Man kann zeigen, dass $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$ und dass sie linear unabhängig sind und dass sie eine Basis von $\mathrm{Los}(A, 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)})$ bilden.

Definition Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Eine Lösung $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ des homogenen bzw. inhomogenen Systemes heißt **Trajektorie** mit Anfangswert x_0.

Beachte, dass für ein lineares Differenzengleichungssystem ist die Trajektorie mit dem Anfangswert eindeutig gegeben, und zwar $y(k) = A^k x_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, für das homogene, und $y(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i b(k-i-1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, für das inhomogene System.

Für $n = 2$ können wir die Trajektorien im Euklidischen Koordinatensystem veranschaulichen. Besonders gut kann man aber die Trajektorien des homogenen Systems, welche als Anfangswerte die Eigenvektoren haben, veranschaulichen. Das Verhalten dieser Lösungen ist wesentlich dadurch beeinflusst, ob der Eigenwert in Betrag kleiner oder Größer als 1 ist. Ein Bild, welche alle Trajektorien veranschaulicht, heißt **Phasenporträt** des homogenen Systems.

Betrachte ein lineares Differenzengleichungsystem (eine Gleichung, zweiter Ordnung)

$$x(k+2) = a_1 x(k+1) + a_2 x(k) + b(k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

für die Unbekannte $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, wobei $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ sind gegeben. Diese kann man mit folgenden Trick auf ein lineares Differenzengleichungssystem (von zwei Gleichungen, erster Ordnung) umschreiben: setze $z_1(k) = x(k), z_2(k) = x(k+1)$ und $z(k) = (z_1(k), z_2(k))$ (Spaltenvektor) für $k \in \mathbb{N}_0$. Mit dieser Notation ist unser System äquivalent umgeschrieben als

$$z(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} z(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ b(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

für die Unbekannte $z \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$. Beispiel: Seien $a_1 = a_2 = 1, b(k) = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Die Trajektorie X mit Anfangswert $x(0) = 1, x(1) = 1$ heißt **Fibonacci-Folge**.

22 Drehungen des Raumes und Quaternionen

Wir werden einige Teilmengen der Menge aller linearen bijektiven Abbildungen vom Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ betrachten. Auf $\mathbb{R}^3$ betrachten wir das euklidische Skalarprodukt. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(3;\mathbb{R}) &= \{f : \ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ linear, bijektiv, orthogonal }\}, \\ \mathrm{SO}(3;\mathbb{R}) &= \{f : \ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ linear, bijektiv, orthogonal, orientierungstreu }\}. \end{aligned}$$

Beide Mengen bilden mit Komposition eine nicht-kommutative Gruppe. Dies kann man direkt nachprüfen. Sie heißen die **orthogonale** und die **spezielle orthogonale Gruppe**.

Zum Rechnen in dieser Gruppen ist der Körper der Quaternionen hilfreich. Wir werden den Element $(x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4$ mit dem Symbol $x+y\mathrm{i}+z\mathrm{j}+v\mathrm{k}$ bezeichnen, wobei $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ Symbolen sind.

Definition Wir definieren die Menge

$$\mathbb{H} = \{x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + v\mathrm{k} : \ x, y, z, v \in \mathbb{R}\} \ .$$

Auf dieser Menge definieren wir die zweistellige Operation Addition $\oplus$ welche der Addition der Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ enspricht und die zweistellige Operation Multiplikation $\odot$ folgenderweise:

$$q_1 \odot q_2 = \ .$$

Für $q = x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + v\mathrm{k} \in \mathbb{H}$ heißt $x - y\mathrm{i} - z\mathrm{j} - v\mathrm{k} \in \mathbb{H}$ die **konjugierte von** q und wird durch $\overline{q}$ bezeichnet, und $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + v^2}$ heißt der **Betrag von** q und wird durch $|q|$ bezeichnet. Außerdem definieren wir die Multiplikation eines Quaternions mit einem Skalar aus $\mathbb{R}$, die der Multiplikation eines Vektors aus $\mathbb{R}^4$ mit einem Skalar entspricht.

Satz

i) $\mathbb{H}$ mit $\oplus$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $0_{\mathbb{H}} = 0 + 0\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 0\mathrm{k}$.

ii) $\mathbb{H} \setminus \{0_{\mathbb{H}}\}$ mit $\odot$ ist eine nicht-kommuative Gruppe mit neutralen Element $1_{\mathbb{H}} = 1 + 0\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 0\mathrm{k}$. Inverses zu q ist $\frac{1}{|q|^2}\overline{q}$.

iii) $\{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ mit $\odot$ bildet eine nicht-kommutative Gruppe (Untergruppe von $\mathbb{H} \setminus \{0_{\mathbb{H}}\}$ mit $\odot$).

iv) $\mathbb{H}$ mit $\oplus$ und $\odot$ bildet einen nicht-kommutativen Körper.

v) $\mathbb{H}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{1+0\mathrm{i}+0\mathrm{j}+0\mathrm{k}, 0+1\mathrm{i}+0\mathrm{j}+0\mathrm{k}, 0+0\mathrm{i}+1\mathrm{j}+0\mathrm{k}, 0+0\mathrm{i}+0\mathrm{j}+1\mathrm{k},\}$.

Beweisidee: Eigenschaften direkt nachprüfen.

Mit Hilfe der Multiplikation der Quaternionen kann man Drehungen des vierdimensional Raumes $\mathbb{R}^4$ beschreiben. Uns interessieren die Drehungen des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$. Deswegen identifizieren wir einen Quaternion $0+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k} \in \mathbb{H}$ mit einem Element $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Mit dieser Identifikation gilt folgender Satz (Beweis siehe z.B. [Gürlebeck, Habetha, Sprößig: Funktionentheorie in der Ebene und im Raum]).

Satz

i) Für $q \in \mathbb{H}$ mit $|q| = 1$ ist die Abbildung $d_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $d_q(x) = q \odot x \odot q^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$, ein Element von $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

ii) Jedes Element von $\mathrm{SO}(3;\mathbb{R})$ ist der Form d_q mit $q \in \mathbb{H}$, $|q| = 1$; dabei ist $d_q = d_{-q}$.

Wenn wir lineare Abbildung der $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ mit Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis angeben, entsprechen die orthogonale und die spezielle orthogonale Gruppe folgenden Mengen der Matrizen mit Matrixmultiplikation:

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(3;\mathbb{R}) &= \{A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3;\mathbb{R}) : \ A^{-1} = A^T\} \\ \mathrm{SO}(3;\mathbb{R}) &= \{A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3;\mathbb{R}) : \det A = 1, \ A^{-1} = A^T\} \ . \end{aligned}$$

Man kann weiter zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(3;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3;\mathbb{R}) : \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \\ A = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2ad+2bc & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix} \} \ , \end{aligned}$$

dass $A \cdot x = d_q(x)$ für $x \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ (Spaltenvektor) mit $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ und A wie oben, und dass jede spezielle orthogonale Abbildung der $\mathbb{R}^3$ eine Drehung um einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ um eine Gerade g durch den Punkt $(0, 0, 0)$ ist. Mit deiser Notation gelten:

- $\mathrm{tr}\, A = 1 + 2\cos(\theta)$,
- Wenn $A \neq E$ (d.h. f nicht die identische Abbildung ist), dann ist der Eigenvektor zu den Eigenwert 1 der Matrix A ein Richtungsvektor der Gerade g, und dieser ist (b, c, d).

Beispiel. Für $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 0\mathrm{k}$ ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d_q ist die Drehung um die x-Achse um Winkel $\frac{\pi}{2}$. $q^2 = 0+1\mathrm{i}+0\mathrm{j}+0\mathrm{k}$, die entsprechende Matrix ist $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, Drehung um π um die x-Achse. $-q^2$ gibt die gleiche Drehung.

23 Quadriken

In diesem Kapitel werden einige "nicht-gerade" Teilmengen der Ebene oder des Raumes (Verallgemeinerung von Geraden, Ebenen) mit Hilfe Diagonalisierung symmetrischen Matrizen untersucht.