Dr. Eva Fašangová, Institut für Analysis, TU Dresden
Grundlagen der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
WS 2015/16 und SS 2016

Themen

1. **Aussagen, Logik** Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz. Rechenregeln (kommutativ, assoziativ, distributiv, de Morgan). Beweis der Distributivität. Vergleich mit Mengenoperationen. Existenz- und Allquantor, Negation.

2. **Mengen** Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Teilmenge. Rechenregeln. Beweis der Distributivität. Vergleich mit Aussagen. Definition der Abbildung / bijektive Abbildung; Beispiele.

3. **Zahlen** Axiome der natürlichen Zahlen; Bildung von ganzen, rationalen Zahlen; Axiome der reellen Zahlen. Beweis, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Operationen $+, \cdot$, algebraische Strukturen. Relation $<$.

4. **Relationen, Abbildungen** Äquivalenz- und Ordnungsrelation, Beispiele. Abbildung, Bild, Urbild; injektiv, surjektiv, bijektiv. Beweis, dass die inverse Relation zu einer injektiven Abbildung eine Abbildung ist. Komposition. Zweistellige Operation, Beispiele.

5. **Gruppe** Definition, Rechenregeln, Beispiele. Beweis, dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ eine kommutative Gruppe ist. Anwendung: Gruppen von linearen Abbildungen der Ebene.

6. **Körper, Ring** Definition, Rechenregeln, Beispiele. Beweis der Nullteilerfreiheit (d.h. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$) in einem Körper. Beispiele: reelle Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, $\mathbb{Z}_n$, Polynome über einem Körper. Division mit Rest.

7. **Vektorraum über einem Körper** Definition, Rechenregeln, Beispiele. Beweis, dass sich die lineare Hülle unter elementaren Umformungen nicht ändert. Definition und Kriterien für lineare Unabhängigkeit, Anwendung der Determinante. Definition der Basis.

8. **Lineare Gleichungssysteme** Definition des homogenen / inhomogenen Systems, Lösungsmenge. Sätze über die Struktur der Lösungsmengen mit Beweisidee. Verhalten unter elementaren Umformungen. Lösungsmethode Gauß.

9. **Matrizen** Operationen $+, \cdot$, Rechenregeln. Beweis, dass $\{A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ mit Matrixmultiplikation eine (im Allgemeinen nichtkommutative) Gruppe bildet. Inverse Matrix bestimmen. Definition der Determinante. Anwendung: lineares Gleichungssystem aufschreiben, lineares Differenzengleichungssystem aufschreiben; Lösungsmethoden. Transponierte Matrix. Rang einer Matrix. Orthogonale Matrix.

10. **Lineare Abbildungen** Definition, Beispiele. Beweis, dass Komposition von linearen Abbildungen eine lineare Abbildung ist. Satz über Kern und Bild. Abbildungsmatrix, Satz über den Zusammenhang mit Matrizen. Beispiele: Abbildungen der Ebene.

11. **Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt** Definition von Skalarprodukt. Orthogonale Vektoren, parallele Vektoren. Definition von Norm. Satz von Pythagoras mit Beweis. Von Skalarprodukt erzeugter Abstand und Winkel. Orthogonale Abbildung, Beispiele.

12. **Orthogonalität** Satz über Orthogonalprojektion von einem Vektor auf einen Vektor in Vektorraum mit Skalarprodukt mit Beweis. Anwendung: Lot auf Gerade, Abstand von Gerade. Definition der Orthonormalbasis, Konstruktion in $\mathbb{R}^3$.

13. **Geraden und Ebenen** Definition, Parameterdarstellung. Satz über Normalendarstellung einer Gerade in der Ebene mit Beweis. Winkel zwischen zwei Geraden in der Euklidischen Ebene. Lot, Abstand, Lagebeziehung, Schnittmenge.

14. **Euklidische Ebene** Veranschaulichung, Parallelogramm, Fläche. Satz über Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Beweis. Winkelgröße in rechtwinkligem Dreieck.

15. **Lineare Abbildungen der Euklidischen Ebene** Spezielle lineare Abbildungen der Ebene, Gruppenstruktur $O(2, \mathbb{R}), SO(2, \mathbb{R})$ mit Beweis. Bezug zwischen Flächeninhaltsänderung und Determinante. Orientierung.

16. **Determinante** Definition, Rechenregeln, Methoden zur Berechnung. Einige Anwendungen. Beweis, dass $v \times u$ senkrecht auf v ist für Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Determinante und Spur diagonalisierbarer Matrizen.

17. **Komplexe Zahlen** Kartesische Form, algebraische Struktur. Beweis, dass Drehstreckungen der Ebene mit Komposition eine Gruppe bilden.

Zusammenhang mit kartesischer Form. Exponentialform, goniometrische Form, Rechenregeln erläutern. Komplex konjugierte Zahl. n-te Wurzel von 1.

18. **Polynome** Operationen $+, \cdot$, algebraische Struktur. Beweis, dass Pol($\mathbb{R}$) mit $+$ eine Gruppe bildet. Division mit Rest. Als Abbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, Nullstellen. Nullstellen bestimmen. Vielfachheit, Fundamentalsatz der Algebra.

19. **Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume** für eine Matrix, Satz über Diagonalisierbarkeit einer symmetrischen Matrix. Beweis, dass Eigenwerte einer symmetrischen Matrix reell sind. Anwendungen.

20. **Matrizen linearer Abbildungen** Ähnlichkeit, Diagonalisierbarkeit. Drehung, Spiegelung, Dehnung, Drehstreckung der Ebene. Determinante und Spur. Gruppen von Mengen von Matrizen mit Produkt, Beweis der Gruppenstruktur.

21. **Lineare Differenzengleichungssysteme** Aufschreiben mit Matrizen. Homogenes und inhomogenes System. Sätze über die Struktur der Lösungsmengen mit Beweis. Lösungsmethode für diagonalisierbare Matrix. Phasenporträt für das Räuber-Beute-Modell.

22. **Quadriken in der Ebene** Angabe mit Hilfe einer symmetrischen Matrix. Anwendung der Diagonalisierung, Rolle der Hauptachsentransformation. Beispiele (Ellipse, Parabel, Hyperbel, Gerade)