

# Vorlesungen über Differentialgleichungen

Eva Fašangová



31. März 2022



## Leitwort

“ ... Ebenso war ich nicht bestrebt, alle Teilgebiete der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zu behandeln. Aus der gesamten Theorie sind nur einige Probleme ausgewählt worden. Dafür habe ich mich bemüht, diese Probleme möglichst vollständig und exakt zu bringen, so wie man heute den größten Teil der mathematischen Disziplinen behandelt. ... ”

I. Petrowski, 1939, [1]



## Vorwort

Dieses Skript wurde geschrieben, nachdem ich dreimal die Vorlesung *Gewöhnliche Differentialgleichungen* für das Lehramt Mathematik an der Technischen Universität Dresden gehalten habe: im Sommersemester 2018 klassisch, in 2020 als gezwungener Online-Kurs und in 2021 als Hybrid-Lehrveranstaltung. Der Inhalt des Skriptes richtet sich größtenteils nach den dreizehn 90-minütigen Vorlesungen im Jahr 2021. Die Kapitel sind aber umgeordnet, gekürzt um das Kapitel über lineare Differentialgleichungen und ergänzt um das Kapitel über Modellierung mit Material aus den Jahren 2018 und 2020. Die Abbildungen sind, bis auf die letzten zwei, Ausschnitte aus den Tafelbildern der Live-Veranstaltungen.

Die Philosophie meiner Vorlesungen richtet sich nach dem Buch von I. G. Petrowski [1]. Daneben war ich bestrebt, anwendungsorientiert, auf dem neuesten Stand und auf dem Niveau eines Mathematiklehrers am Gymnasium zu bleiben. Voraussetzung ist das Verständnis der Differential- und Integralrechnung, inklusive Hauptsatz. Auch ohne Kenntnisse der unendlichen Reihen und mehrdimensionaler Differentialrechnung ist der Text verständlich.

Ich war den Hörern, die bei der Vorlesung im Sommersemester 2021 trotz Einschränkungen durch Hygienekonzepte anwesend waren, sehr dankbar. Besonders möchte ich mich bei Johannes Rolf Stojanow und Konrad Kitzing, meinen Assistenten, für die motivierte fachliche und technische Begleitung und bei Horst Ocholt, Lehrer, für das Folgen der Vorlesung und für erfahrungsreiche Rückmeldungen bedanken. Ohne ihnen wäre die Vorlesung nicht in diesem Skript ausgereift worden. Ich bedanke mich bei Hannes Nikulski für die sprachliche Korrektur des gesamten Textes.

Dresden, den 31. März 2022

Eva Fašangová

# Literaturverzeichnis

- [1] I. G. Petrowski, *Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Teubner Verlag, Leipzig, 1954 (übersetzt aus Russisch, erste Auflage in 1939).
- [2] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, Proceedings of the Royal Society of London. Series At, Vol. 115, No. 772, pp. 700-721 (1927).
- [3] Frankfurter Allgemeine Zeitung, 13.3.2020.
- [4] *Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Gesamtband 11/12, Sachsen*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2008.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Wiederholungen aus Analysis . . . . .	4
1.2	Das SIR-Modell für Epidemie . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Richtungsfeld</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Einfachste Differentialgleichungen</b>	<b>10</b>
3.1	Die Differentialgleichung $y' = h(x)$ . . . . .	10
3.2	Die Differentialgleichung $y' = g(y)$ . . . . .	13
3.3	Trennung der Variablen: die DGL $y' = h(x) \cdot g(y)$ . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Existenz von Lösungen</b>	<b>19</b>
4.1	Kompaktheitsätze . . . . .	19
4.2	Eulersche Polygonzüge . . . . .	21
4.3	Beweise der Existenz einer Lösung . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Eindeutigkeit der Lösung</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Lösungen auf größtmöglichen Intervallen</b>	<b>25</b>
6.1	Nicht-fortsetzbare Lösungen . . . . .	25
6.2	Verhalten nicht-fortsetzbarer Lösungen . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Differentialgleichungssysteme</b>	<b>29</b>
7.1	Historische Einbettung . . . . .	30
<b>8</b>	<b>Verlauf der Epidemiekurven im SIR-Modell</b>	<b>31</b>
8.1	Theoretische Vorbereitung . . . . .	31
8.2	Numerische Lösung . . . . .	34
8.3	Analytische Lösung . . . . .	34
<b>9</b>	<b>Differenzgleichungen</b>	<b>40</b>
9.1	Eulersche Polygonzüge einer DGL versus DFGL . . . . .	40
<b>10</b>	<b>Modellierung</b>	<b>43</b>
10.1	Wachstumsmodelle . . . . .	43
10.2	Zinsmodelle . . . . .	45
10.3	Aufgabe aus einem Schullehrbuch . . . . .	49

# 1 Einführung

Sei  $F : (-\infty, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Abbildung. Das Problem

$$f'(x) = F(x, f(x)), \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (1.1)$$

heißt eine **Differentialgleichung** (kurz: **DGL**) für die unbekannte Funktion  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn  $G : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Abbildung ist, dann heißt das Problem

$$g(k+1) - g(k) = G(k, g(k)), \quad k \in \mathbb{N}$$

eine **Differenzgleichung** für die unbekannte Folge  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es handelt sich in beiden Fällen um unendlich viele algebraische Gleichungen für unbekannte Zahlen  $f(x)$  bzw.  $g(k)$ , im zweiten Fall um abzählbar, im ersten um überabzählbar viele. Das zweite Problem heißt auch “diskret”, das erste “kontinuierlich”.

Die Abbildung  $G$  ist typischerweise auf dem ganzen  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$  definiert und die Aufgabe hat offensichtlich für gegebene  $g(0)$  eine eindeutige Lösung  $g$ , und zwar die durch das Problem rekursiv definierte Folge. Im Gegenteil dazu ist der Definitionsbereich der Abbildung  $F$  oft eine echte Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , und die Funktion  $f$  erfüllt nur für  $x$  aus einem Intervall  $I$  die Gleichheit  $f'(x) = F(x, f(x))$ . Die Bestimmung von einem solchen  $I$  kann sogar Teil der Aufgabe sein. Es ist nicht offensichtlich, ob diese Aufgabe eine Lösung hat und ob diese Lösung, zum Beispiel für gegebene  $f(0)$ , eindeutig ist.

Falls wir eine vektorwertige Funktion bzw. Folge suchen, d.h.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  bzw.  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  ist, redet man über ein **Differentialgleichungssystem** (**DGLS**) bzw. Differenzgleichungssystem. Dafür sind Abbildungen  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bzw.  $G : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nötig. Es kann wieder sein, dass diese Abbildungen nur auf einer Teilmenge definiert sind, oder dass die gesuchte Funktion  $f$  nur für  $x$  aus einem Intervall  $I$  die Gleichheit erfüllt und dass dieses Intervall  $I$  auch zu bestimmen ist.

Über den Fall, dass  $f$  eine Funktion von mehreren reellen Variablen ist, wird in diesem Text nicht gesprochen.

Gleichungen für die unbekannte Funktion  $f$  können auch mit allgemeineren Termen aufgeschrieben sein (zum Beispiel  $\sin(f'(x)) = x^2$ ) oder höhere Ableitungen enthalten (zum Beispiel  $f''(x) = \sin(f(x))$ ), weshalb werden wir das Problem (1.1) genauer **DGL erster Ordnung aufgelöst nach  $f'$**  nennen.

Wir werden uns die Aufgabe stellen, sowohl eine Funktion  $f$  wie auch ein Intervall  $I$  so zu bestimmen, dass für alle  $x \in I$  gilt  $f'(x) = F(x, f(x))$ . Zunächst irgendein  $f$  und irgendein  $I$ , dann alle  $f$  und alle  $I$  mit möglichst großem  $I$ . Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf offene Intervalle.

Wir werden auch Lösungen einer DGL mit einer zusätzlichen Bedingung der Form  $f(x_0) = y_0$  für gegebene  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  (beziehungsweise  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , wenn es sich um ein DGLS handelt) suchen. Natürlich soll  $I$  dann  $x_0$  enthalten. Diesen Aufgabentyp nennt man **Anfangswertproblem (AWP)**.

Da es nicht immer möglich sein wird, eine Lösung explizit zu bestimmen, werden wir uns auch mit folgender Aufgabe beschäftigen: wir bestimmen Eigenschaften der Lösung  $f$ , ohne diese Lösung explizit zu kennen. Solche Eigenschaften können zum Beispiel Monotonie von  $f$  auf einem Intervall  $J$ , Beschränktheit auf einer Menge  $M$  oder Existenz des (einseitigen) Grenzwertes von  $f$  in Intervallgrenzen (zum Beispiel im plus Unendlichen) sein.

Da es meistens nicht möglich ist, die Lösungen zu berechnen, obwohl numerische Verfahren zum Bestimmen von "approximativen Lösungen" (was das bedeutet, ist zu klären!) vorhanden sind, ist es äußerst wichtig zu wissen, ob eine Lösung überhaupt existiert und ob es nicht mehrere Lösungen geben kann. Deshalb werden wir abstrakte Sätze über Existenz und Eindeutigkeit formulieren und beweisen. Als natürlich stellt sich die Frage, ob die "approximative Lösung" die echte Lösung überhaupt approximiert, und wenn ja, wie gut. Die Antwort auf diese Frage liegt außerhalb des Rahmens dieses Textes.

Da es in der klassischen Literatur üblich ist, Lösungen von DGL (bzw. DGLS) als  $y$  zu bezeichnen, wird ab dem 2. Kapitel die Notation geändert:  $f$  wird durch  $y$  und  $F$  wird durch  $f$  bezeichnet und letzteres **rechte Seite** der DGL (bzw. DGLS) genannt.

### 1.1 Wiederholungen aus Analysis

In der Analysis, selbst wenn nicht als DGL formuliert, sind beispielweise folgende zwei Themen angesprochen.

Folgender Satz kann in der Analysis formuliert und bewiesen werden. Bevor er formuliert ist, ist die natürliche Exponentialfunktion (zum Beispiel und meistens) mit Hilfe von Potenzreihen eingeführt. Sie ist die gesuchte Funktion  $f$ .

**Satz 1.1** *Es gibt genau eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche folgende Eigenschaften erfüllt:*

- (i)  $D_f = \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $f(0) = 1$ ,
- (iii)  $f$  ist stetig und differenzierbar an jeder Stelle  $x \in \mathbb{R}$  und  $f'(x) = f(x)$ .

Die Aufgabe formuliert durch (i) - (iii) kann als eine DGL mit zusätzlichen Bedingungen gesehen werden. Der Satz besagt, dass diese Aufgabe eine Lösung besitzt und dass die Lösung eindeutig ist. In dieser Vorlesung werden wir den Satz mit anderen Methoden, ohne Verweis auf die Exponentialfunktion, beweisen können, siehe Beispiel B.1 in Kapitel 3. Damit, und unabhängig von der Einführung der Exponentialfunktion in der Analysis mit Hilfe von unendlichen Reihen, ist folgende Definition sinnvoll.

**Definition 1.2** Die Funktion  $f$  aus dem vorherigen Satz heißt **(natürliche) Exponentialfunktion** und wird mit **exp** bezeichnet.

In dem zweiten Thema sei eine Funktion  $h$  gegeben. Die Bestimmung von Stammfunktionen von  $h$  auf einem Intervall  $I$  kann als eine DGL gesehen werden. Unter welchen Bedingungen diese Aufgabe eine Lösung hat und wieviele Lösungen es gibt, beantwortet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Satz 1.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, HDI)** Seien  $a, b$  reelle Zahlen mit  $a < b$  und  $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen.

(a) Wenn  $f$  Riemann-integrierbar über  $[a, b]$  ist und die Ableitung von  $F$  die Funktion  $f$  ist (in Randpunkten  $a, b$  einseitig!), dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) .$$

(b) Wenn  $f$  stetig ist (in Randpunkten  $a, b$  einseitig!) und die Funktion  $G$  ist definiert durch  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$  für  $x \in [a, b]$ , dann gilt

$$G' = f .$$

## 1.2 Das SIR-Modell für Epidemie

Im Jahr 1927 haben Kermack und McKendrick folgendes Modell für die Verbreitung einer Epidemie vorgeschlagen, analytisch gelöst und die Lösung mit statistischen Daten verglichen, siehe [2]. Die Parameter  $\kappa > 0$  und  $l > 0$  sind gegeben. Gesucht sind Funktionen  $x, y, z : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  der Variable  $t$ , Lösungen eines entsprechenden Anfangswertproblems.

Abbildung 1.1: SIR-Modell, [2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\kappa xy \\ \frac{dy}{dt} &= \kappa xy - ly \\ \frac{dz}{dt} &= ly \end{aligned} \right\}$$

Dies ist tatsächlich ein DGLS mit  $n = 3$ . Nämlich, mit den Bezeichnungen

$$F \left( t, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\kappa \cdot x \cdot y \\ \kappa \cdot x \cdot y - l \cdot y \\ l \cdot z \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

sind  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  Funktionen und das Modell kann als

$$f'(t) = F(t, f(t)) \text{ für } t \in [0, +\infty) \text{ mit } f(0) = (s_0, i_0, r_0)$$

## 1 Einführung

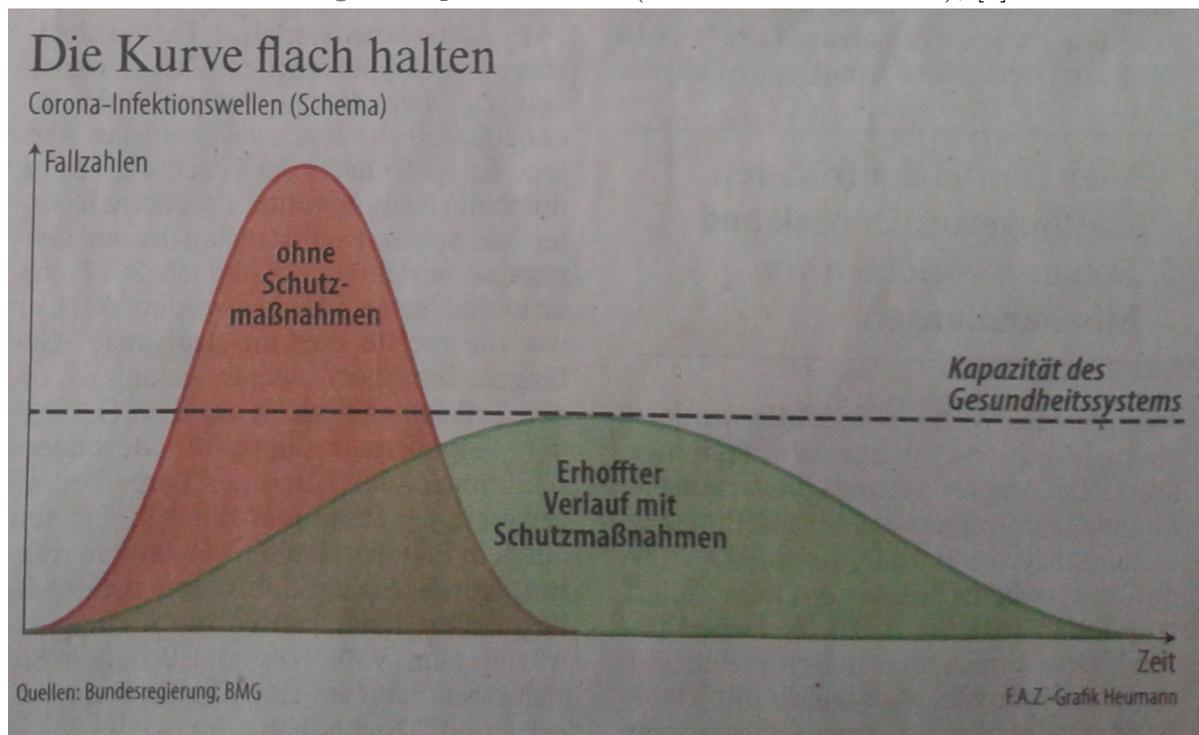
geschrieben werden.

Die Variable  $t$  modelliert die Zeit (deshalb die Bezeichnung durch  $t$  statt  $x$ ),  $x(t)$  die Anzahl der anfälligen Individuen in einer Population im Zeitpunkt  $t$ ,  $y$  die Infizierten und  $z$  die Genesenen. Die positive Zahl  $\kappa$  modelliert die Kontaktrate zwischen den Individuen in der Population und  $l$  ist eine Charakteristik der Krankheit.

Variationen dieses Modells wurden auch für die Modellierung der COVID-19-Pandemie benutzt. Sie können mit Hilfe einer mathematischen Software untersucht werden. Das ursprüngliche Modell mit drei Gleichungen ist einfach und der Verlauf der Lösung kann analytisch hergeleitet werden, siehe Beispiel B.2 in Kapitel 8. Für die aus viel mehr Gleichungen bestehende Variationen ist die analytische Herleitung problematisch.

Im Frühjahr 2020 wurden politische Entscheidungen auf der Basis des Verlaufes der Anzahl der infizierten Individuen getroffen. Die Abbildung aus der "Frankfurter Allgemeine Zeitung" am 16. 3. 2020 zeigt den erwarteten Verlauf der Anzahl der infizierten Individuen (Fallzahlen, Funktion  $y$ ) für zwei verschiedenen Werte der Kontaktrate: rot mit großer und grün mit kleiner Kontaktrate. Wichtig ist der Verlauf der Kurven, Monotonie, Extremstellen und Extremwerte und der Grenzwert im plus Unendlichen (der Flächeninhalt der bemalten Fläche ist irrelevant).

Abbildung 1.2: Epidemiekurve (Anzahl der Infizierten), [3]



## 2 Richtungsfeld

Wenn  $y$  Lösung einer DGL ist, dann ist für entsprechende  $x$  die Ableitung von  $y$  an der Stelle  $x$ , also die Steigung der Tangente zu den Graphen von  $y$  im Punkt  $(x, y(x))$ , gleich  $f(x, y(x))$ . Ob diese Zahl positiv, negativ oder gleich 0 ist, bedeutet Information über die Steigung der Tangente. Wir formulieren dies genauer.

Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $(x_0, y_0) \in D_f$  gegeben. Nehmen wir an, dass die Funktion  $f$  in einer kreisförmigen Umgebung von  $(x_0, y_0)$  definiert ist. Nehmen wir weiter an, dass eine Funktion  $y$  und ein offenes Intervall  $I$  bekannt sind so, dass

- (i)  $y(x_0) = y_0$ ,
- (ii)  $y$  ist in jedem  $x \in I$  differenzierbar und
- (iii) für alle  $x \in I$  gilt  $(x, y(x)) \in D_f$  und  $y'(x) = f(x, y(x))$ .

Wir werden die Funktion  $y$  **Lösung** (genauer: der DGL  $y' = f(x, y)$  auf  $I$  mit Anfangswert  $y_0$  in  $x_0$ ) nennen.

Für diesen Begriff ist keine weitere Voraussetzung über  $f$  nötig. Doch nehmen wir kurz an, dass  $f$  stetig ist. Wenn  $f(x_0, y_0) > 0$  ist, dann folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , dass  $f$  in irgendeiner Umgebung von  $(x_0, y_0)$  auch positiv ist. Außerdem ist  $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) > 0$  nach der Voraussetzung. Es folgt (aus der Stetigkeit von  $f$  und von  $y$ , nicht der von  $y'$ !), dass  $y'$  auch in irgendeiner Umgebung von  $x_0$  positiv ist. Nach dem Monotoniesatz ist also  $y$  auf irgendeinem Intervall um  $x_0$  streng monoton wachsend.

Sei  $f$  wieder wie oben, also ohne vorausgesetzte Stetigkeit. Wir zerlegen die Menge  $D_f$ , veranschaulicht in kartesischen Koordinaten mit Achsen  $x$  (waagrecht, von links nach rechts mit Stellen 0, 1 und einem Pfeil versehen) und  $y$  (senkrecht, von unten nach oben durch 0 und mit Stelle 1 und einem Pfeil versehen) in drei disjunkte Teilmengen je nach dem, ob  $f$  positiv, negativ bzw. gleich 0 ist. In die erste Menge skizzieren wir die Pfeile  $\nearrow$ , in die zweite  $\searrow$  und in die dritte Menge, d.h. die Nullmenge (genannt auch Nullniveaumenge) von  $f$ ,

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in D_f \text{ und } f(x, y) = 0\}$$

kann  $\rightarrow$  skizziert werden. Die so erhaltene Skizze werden wir **Richtungsfeld** der DGL  $y' = f(x, y)$  nennen.

Dieses Konzept ist nur für DGL, und nicht für DGLS, eingeführt, da die mehr als zweidimensionale Räume nicht direkt auf einem Papierblatt veranschaulicht werden können.

Es könnte auch die genauere Information, nämlich die Größe der Zahl  $f(x_0, y_0)$  als Steigung der Pfeile, veranschaulicht werden. Der Einfachheit halber tun wir das bei der handgefertigten Skizzen nicht.

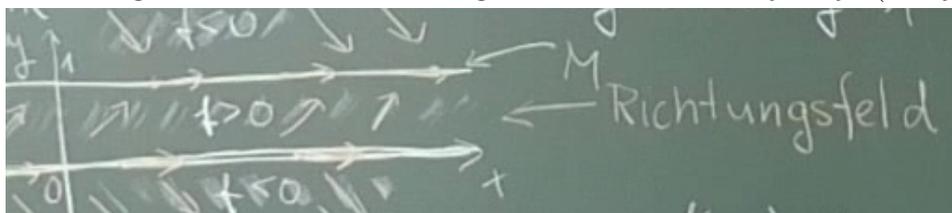
**Beispiel B.3**  $y' = y \cdot (1 - y)$

Mit  $f(x, y) = y(1 - y)$  ist offensichtlich

$$M = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, 1) : t \in \mathbb{R}\} .$$

Für  $y \in (-\infty, 0)$  und beliebige  $x \in \mathbb{R}$  ist  $f(x, y) < 0$ , für  $y \in (0, 1)$  und beliebige  $x \in \mathbb{R}$  ist  $f(x, y) > 0$  und für  $y \in (1, +\infty)$  und beliebige  $x \in \mathbb{R}$  ist  $f(x, y) < 0$ . Wir fertigen die Skizze mit der Hand an.

Abbildung 2.1: Skizze des Richtungsfeldes für die DGL  $y' = y \cdot (1 - y)$ .



□

**Beispiel B.4**  $y' = -y(-y + \ln(y) + 6)$

Hier ist  $f(x, y) = -y(-y + \ln(y) + 6)$  mit Definitionsbereich  $D_f = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Da  $f$  als Produkt geschrieben ist, ist die Untersuchung vereinfacht und entscheidend sind die zwei Faktoren.

Wir untersuchen zunächst die Funktion  $g$  definiert durch  $g(x) = -x + \ln(x) + 6$  für  $x > 0$ . Für welche  $x$  ist  $g(x) > 0$ ,  $g(x) < 0$  bzw.  $g(x) = 0$  ?

Die Funktion  $g$  ist auf dem Intervall  $(0, +\infty)$  stetig und differenzierbar, da sie die Summe von differenzierbaren Funktionen ist. Wir berechnen zuerst die Grenzwerte an den Intervallgrenzen. Mit den Sätzen über Grenzwerte gilt

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} (-x + \ln(x) + 6) = 0 + (-\infty) + 6 = -\infty .$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ , und aus den Sätzen für Grenzwerte folgt somit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{6}{x} \right) = -1 + 0 + 0 = -1 .$$

Aus den Sätzen für Grenzwerte folgt weiter, dass

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( -1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{6}{x} \right) = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty .$$

## 2 Richtungsfeld

Die Funktion  $g$  ist als Summe von differenzierbaren Funktionen differenzierbar und ihre Ableitung ist  $g'(x) = -1 + \frac{1}{x}$  für  $x \in (0, +\infty)$ . Folglich gilt für jedes  $x \in (0, 1)$ , dass  $g'(x) > 0$  ist, und aus dem Monotoniesatz folgt, dass  $g$  auf  $(0, 1)$  streng monoton wachsend ist. Ähnlich begründet ist  $g$  auf  $(1, +\infty)$  streng monoton fallend. Da  $g$  in 1 stetig ist, folgt aus den vorherigen Beobachtungen, dass  $g$  in 1 ihr globales Maximum hat. Dabei ist  $g(1) = -1 + \ln(1) + 6 = 5$ .

Da  $g(1) > 0$  und  $\lim_{x \searrow 0} g(x) = -\infty$  und  $g$  stetig in  $(0, 1]$  ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass  $g$  in  $(0, 1]$  mindestens eine Nullstelle hat. Da  $g$  auf  $(0, 1)$  streng monoton wachsend ist, hat sie somit genau eine Nullstelle in  $(0, 1)$ . Bezeichnen wir diese mit  $z_1$ . Ähnlich kann man begründen, dass  $g$  in  $(1, +\infty)$  genau eine Nullstelle hat. Diese wird mit  $z_2$  bezeichnet. Der Graph der Funktion  $g$  ist auf der Abbildung 2.2 skizziert.

Um zu entscheiden, wann  $f(x, y)$  positiv, negativ bzw. gleich Null ist reicht es uns die beiden Faktoren anzuschauen. Es ergibt sich die Skizze auf der Abbildung 2.3.

Abbildung 2.2: Skizze der Funktion  
 $g : x \mapsto -x + \ln(x) + 6$ .

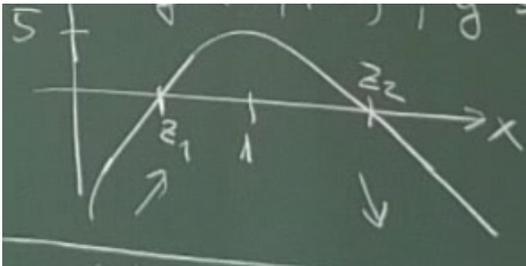
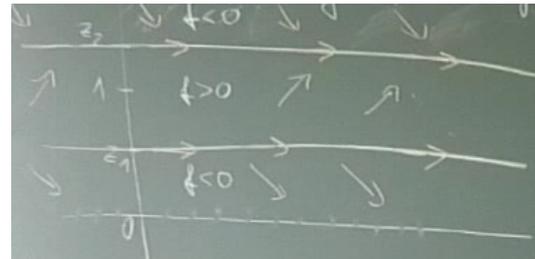


Abbildung 2.3: Skizze des Richtungsfeldes für die DGL  
 $y' = -y \cdot (-y + \ln(y) + 6)$ .

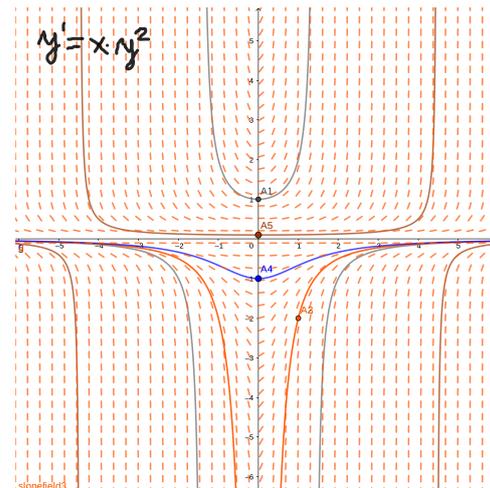


### Beispiel B.5

$$y' = x \cdot y^2$$

Die DGL ist mit Hilfe einer mathematischen Software (hier GeoGebra) untersucht. Das Richtungsfeld ist mit Strecken ohne Pfeile veranschaulicht. Die Kurven sind numerische "Lösungen". An dieser Stelle kann man nicht über (analytische) Lösungen reden, da die durch Software erstellten Kurven Graphen von Funktionen sind, die keine Lösungen (in unserem Sinne) sind. Sie sind Approximationen der Lösungen, den Unterschied sieht man aber wegen der Auflösung des Bildes nicht.

Abbildung 2.4: Richtungsfeld und Lösungskurven.



# 3 Einfachste Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden DGL mit sogenannten “getrennten Variablen” untersucht. Das ist einer von wenigen Typen von DGL, die analytisch gelöst werden können, angenommen, die dazu benötigte Integrale können berechnet werden. Da dies oft nicht der Fall ist, werden wir versuchen, den Verlauf der Lösungen auch dann zu bestimmen, wenn keine Lösungsformel vorhanden ist.

## 3.1 Die Differentialgleichung $y' = h(x)$

**Satz 3.1** Seien  $(a, b)$  ein offenes Intervall mit  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,  $a < b$ ,  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Nehmen wir an, dass  $h$  in  $(a, b)$  stetig ist. Dann existiert genau eine Funktion  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $y$  ist in  $(a, b)$  differenzierbar,
- (ii)  $y(x_0) = y_0$  und
- (iii) für alle  $x \in (a, b)$  gilt  $y'(x) = h(x)$ .

Diese Funktion ist mit folgender Formel gegeben:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x h(t) dt, \quad x \in (a, b) . \tag{3.1}$$

**Beweis** a) Sei  $y$  eine Funktion welche die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt. Dann ist, wegen (i),  $y$  trivialerweise eine Stammfunktion zu  $y'$  auf  $(a, b)$  und wegen (iii) auch zu  $h$  auf  $(a, b)$ . Die Funktion  $H$  definiert durch  $H(x) = \int_{x_0}^x h(t)dt$ ,  $x \in (a, b)$ , ist auch eine Stammfunktion zu  $h$  auf  $(a, b)$  laut HDI, da  $h$  stetig ist. Folglich existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  so, dass für alle  $x \in (a, b)$  gilt  $y(x) = H(x) + c$ . Wegen (ii) und  $H(x_0) = 0$  gilt dann  $y_0 = y(x_0) = H(x_0) + c = 0 + c = c$ . Folglich

$$y(x) = H(x) + c = \int_{x_0}^x h(t) dt + y_0, \quad x \in (a, b) .$$

Somit ist bewiesen, dass es nicht mehr als eine Funktion mit den Eigenschaften (i)-(iii) geben kann und falls es eine solche gibt, ist sie mit der Formel (3.1) gegeben.

b) Definiere jetzt die Funktion  $y$  durch  $y(x) = \int_{x_0}^x h(t)dt + y_0$ ,  $x \in (a, b)$ ; diese Definition ist korrekt, da  $h$  stetig nach unserer Voraussetzung ist und folglich existiert das Riemann-Integral. Aus dem HDI folgt, dass  $y$  differenzierbar in  $(a, b)$  ist und dass für alle  $x \in (a, b)$

### 3 Einfachste Differentialgleichungen

gilt  $y'(x) = h(x)$ . Außerdem ist  $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} h + y_0 = 0 + y_0 = y_0$ . Folglich erfüllt dieses  $y$  die Eigenschaften (i), (ii) und (iii).

Aus a) und b) folgt, dass eine Lösung des Problems formuliert durch (i) - (iii) existiert, dass sie eindeutig ist und dass sie mit der Formel (3.1) gegeben ist.  $\square$

Dieser Satz drückt eigentlich nicht mehr als der HDI aus, er ist nur mit Hinblick auf unsere weitere Theorie umformuliert worden.

Aus der Formel (3.1) können wir weitere Eigenschaften der Lösung feststellen, ohne das Integral explizit berechnen zu müssen.

Die Fallunterscheidung wird nach

$$b \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ = +\infty \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \nearrow b} h(x) \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ = +\infty \\ = -\infty \\ \text{existiert nicht} \end{cases}$$

gemacht, wobei im letzten, kompliziertesten Fall (Grenzwert existiert nicht) keine weitere Aussage getroffen werden kann.

Sei  $y$  durch (3.1) definiert. Wir bezeichnen weiter  $H(x) = \int_{x_0}^x h$  für  $x \in (a, b)$ .

**1. Fall:**  $b \in \mathbb{R}$  und  $B = \lim_{x \nearrow b} h(x) \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall kann  $h$  durch  $B$  in  $b$  stetig von links fortgesetzt werden und  $A = \lim_{x \nearrow b} H(x) = \int_{x_0}^b h$  existiert als reelle Zahl. Das ist nicht die typische Situation.

**2. Fall:**  $b \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \nearrow b} h(x) = +\infty$ . In diesem Fall ist  $h$  positiv auf einem Intervall  $(b-r, b)$  (für irgendein  $r > 0$ ). Aus dem HDI folgt, dass  $H' = h$  und aus dem Monotoniesatz folgt somit, dass  $H$  auf  $(b-r, b)$  streng monoton wachsend ist. Folglich existiert der Grenzwert  $A = \lim_{x \nearrow b} H(x) = \int_{x_0}^b h$  (verallgemeinertes Riemann-Integral, Flächeninhalt der Figur unter den Graphen).

Wir unterscheiden weitere zwei Fälle.

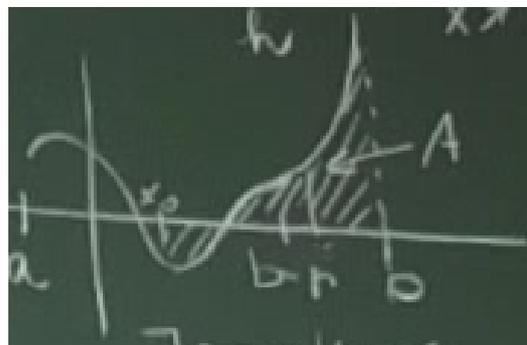
- 2a)  $H$  ist auf  $(b-r, b)$  beschränkt. Äquivalent gesagt  $A \in \mathbb{R}$ , der Flächeninhalt ist endlich. In diesem Fall hat also  $y$  in  $b$  von links einen reellen Grenzwert (und ist insbesondere beschränkt auf  $(b-r, b)$ ). Außerdem ist  $y' > 0$  und damit  $y$  streng monoton wachsend auf dem Intervall  $(b-r, b)$ ,

$$\lim_{x \nearrow b} y'(x) = \lim_{x \nearrow b} h(x) = +\infty$$

und dabei  $y$  von links in  $b$  stetig fortsetzbar.

- 2b)  $H$  ist auf  $(b-r, b)$  nach oben unbeschränkt. Äquivalent gesagt  $A = +\infty$ , der Flächeninhalt ist unendlich. In diesem Fall hat also  $y$  in  $b$  von links den Grenzwert

Abbildung 3.1: Flächeninhalt unter den Graphen von  $h$



### 3 Einfachste Differentialgleichungen

$+\infty$  (und kann insbesondere nicht in  $b$  stetig fortgesetzt werden). Weiter gilt  $y' > 0$  auf  $(b-r, b)$  und  $y$  ist auf  $(b-r, b)$  streng monoton wachsend.

Abbildung 3.2: Verhalten der Lösung in  $b$ , Fall 2a)

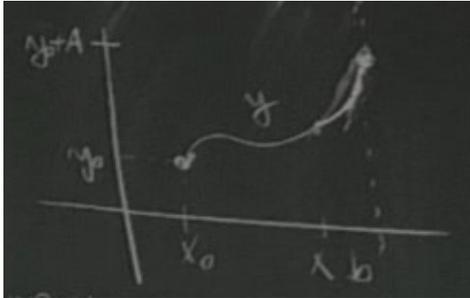
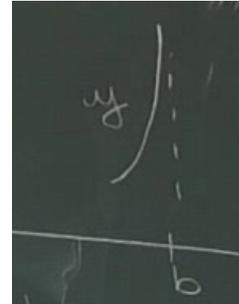


Abbildung 3.3: Verhalten der Lösung in  $b$ , Fall 2b)

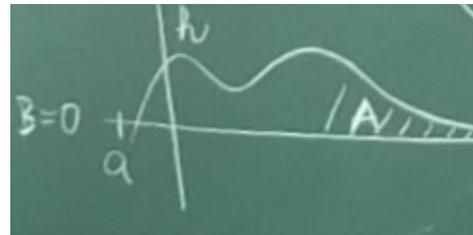


**3. Fall:**  $b \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \nearrow b} h(x) = -\infty$ . Die Untersuchung in diesem Fall ist ähnlich wie im 2. Fall und wird hier nicht gemacht.

**4. Fall:**  $b = +\infty$  und  $B = \lim_{x \nearrow b} h(x) \in \mathbb{R}$ . Je nach dem ob  $B$  positiv oder negativ ist, ist  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$  sowie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$  gleich  $+\infty$  oder  $-\infty$  und die Lösung  $y$  ist insbesondere unbeschränkt. Im Fall  $B = 0$  tritt einer von folgenden Unterfällen auf:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \int_{x_0}^{+\infty} h = \begin{cases} = A \in \mathbb{R} \\ = +\infty \\ = -\infty \\ \text{existiert nicht.} \end{cases}$$

Abbildung 3.4: Flächeninhalt unter den Graphen von  $h$



4a) Im ersten Unterfall, da  $y(x) = y_0 + H(x)$  für  $x \in (a, +\infty)$  ist, gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = y_0 + \lim_{x \nearrow b} \int_{x_0}^x h = y_0 + A \in \mathbb{R} .$$

4b) Im zweiten Unterfall gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = y_0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x h = +\infty .$$

4c) Im dritten Unterfall hat die Lösung  $y$  den Grenzwert  $-\infty$  im plus Unendlichen und ist insbesondere nach unten unbeschränkt.

4d) Im vierten Unterfall hat die Lösung  $y$  im plus Unendlichen keinen Grenzwert (aber wir wissen nicht, ob sie beschränkt ist oder nicht).

**5. Fall:**  $b = +\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ . Die Untersuchung dieses Falles ist ähnlich wie mit  $B > 0$  im 4. Fall. Insbesondere, da  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = +\infty$ , hat die Lösung  $y$  den Grenzwert  $+\infty$  im plus Unendlichen (und ist unbeschränkt).

**6. Fall:**  $b = +\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ . Dieser Fall wird nicht weiter erklärt. Die Lösung  $y$  ist unbeschränkt.

**Beispiel** Auch wenn eine positive Funktion  $h$  im plus Unendlichen den Grenzwert 0 hat, kann die Fläche unter dem Graphen sowohl endlich als auch unendlich sein. Folgende Funktionen  $h_1$  und  $h_2$  definiert durch

$$h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ und } h_2(x) = \frac{1}{x^2} \text{ für } x \in (0, +\infty)$$

sind dafür Beispiele, da für diese gelten

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \int_1^x h_1 = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_{t=1}^x = 2\sqrt{x} - 2, & \lim_{x \rightarrow +\infty} H_1(x) &= +\infty, \\ H_2(x) &= \int_1^x h_2 = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = [-\frac{1}{t}]_{t=1}^x = -\frac{1}{x} + 1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} H_2(x) &= 1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es stellt sich die Frage, wie ist es mit der Funktion  $h : x \mapsto \frac{1}{x}$  ( $h_2 < h < h_1$  auf  $(1, +\infty)$ ). Die Antwort ist mit der Kenntniss der Exponential- und Logarithmusfunktionen bekannt. Es kann aber auch ohne der Exponentialfunktion bewiesen werden, dass  $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt = +\infty$  (Vergleich mit der harmonischen Reihe, deren Divergenz mit Abschätzungen elementar bewiesen werden kann). Diese Information werden wir brauchen.  $\square$

### 3.2 Die Differentialgleichung $y' = g(y)$

**Satz 3.2** Seien  $(\alpha, \beta)$  ein offenes Intervall ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  mit  $\alpha < \beta$ ),  $g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in (\alpha, \beta)$ . Nehmen wir an, dass die Funktion  $g$  auf dem Intervall  $(\alpha, \beta)$  stetig ist und  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in (\alpha, \beta)$  gilt. Dann existiert genau ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und genau eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , welche folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i)  $y$  ist in  $I$  differenzierbar,
- (ii)  $x_0 \in I$ ,  $y(x_0) = y_0$  und für alle  $x \in I$  ist  $y(x) \in (\alpha, \beta)$ ,
- (iii) für alle  $x \in I$  gilt  $y'(x) = g(y(x))$  und
- (iv)  $I$  ist maximal (bezüglich  $\subseteq$ ).

Dieses Intervall und diese Funktion sind mit folgender Formel gegeben:

$$I = H((\alpha, \beta)) \text{ und } y = H^{-1} \text{ auf } I,$$

wobei

$$H(t) = x_0 + \int_{y_0}^t \frac{1}{g(s)} ds, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

(D.h.  $H$  ist die Stammfunktion zu  $\frac{1}{g}$  auf  $(\alpha, \beta)$  mit  $H(y_0) = x_0$  und  $y$  ist deren Umkehrfunktion. Aus der Stetigkeit und Monotonie von  $H$  folgt, dass die Menge  $I$  tatsächlich ein offenes Intervall ist.)

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen. Stattdessen wird die Idee des Beweises an einem konkreten Beispiel präsentiert. Der Satz ist ein Spezialfall des Satzes im folgenden Abschnitt.

**Beispiel B.1** Betrachte das Problem

$$y' = y \text{ auf } \mathbb{R} \text{ mit } y(0) = 1.$$

Mit der Bezeichnung  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $\alpha = 0$  und  $\beta = +\infty$  sowie  $g(s) = s$  für  $s \in (0, +\infty)$  sind wir in der Situation des Satzes, und zwar auf dem Intervall  $(0, +\infty)$ . Bezeichne

$$H(s) = x_0 + \int_{y_0}^s \frac{1}{g} = \int_1^s \frac{1}{t} dt, \quad s \in (0, +\infty),$$

was wegen der Stetigkeit von  $g$  wohldefiniert ist. (Wir berechnen das Integral nicht weiter, da wir uns vorgenommen haben, die Exponentialfunktion nicht zu kennen.) Nach dem HDI ist  $H$  auf  $(0, +\infty)$  differenzierbar mit  $H'(s) = \frac{1}{s}$  für  $s > 0$ . Aus dem Monotoniesatz folgt, dass  $H$  auf  $(0, +\infty)$  streng monoton wachsend ist. Außerdem ist  $H$  auf  $(0, +\infty)$  stetig. Nach dem Satz über die inverse Funktion besitzt  $H$  eine stetige Umkehrfunktion, welche wir mit  $H^{-1}$  bezeichnen. Die Grenzwerte

$$\lim_{s \searrow 0} H(s) = -\infty \text{ und } \lim_{s \rightarrow +\infty} H(s) = +\infty$$

kann man mit Hilfe von Abschätzungen elementar berechnen (wir tun dies hier nicht). Da  $H$  stetig ist, folgt dann aus dem Zwischenwertsatz, dass  $H((0, +\infty)) = \mathbb{R}$  ist. Somit ist die Funktion  $H : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton wachsend und bijektiv, und ebenso ist  $H^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ . Nach dieser Vorbereitung führen wir unsere Betrachtungen in drei Schritten fort.

**1. Schritt** Definiere  $y = H^{-1}$  auf  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $y$  eine Lösung.

**Beweis** Aus dem Satz über die Ableitung der inversen Funktion folgt, dass  $y$  differenzierbar ist und

$$y'(x) = \frac{1}{H'(H^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{H^{-1}(x)}} = H^{-1}(x) = y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist  $y(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  und  $y(0) = 1$ , denn  $H(1) = 0$ . Somit ist  $y$  eine Lösung. □

**2. Schritt** Wenn  $y$  eine Lösung der DGL mit Anfangswert auf einem offenen Intervall  $I$  mit  $x_0 \in I$  ist und für alle  $x \in I$   $y(x) > 0$  gilt, dann ist  $y(x) = H^{-1}(x)$  für alle  $x \in I$ .  
**Beweis** Aus der DGL  $y' = y$  auf  $I$  und weil  $y(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$  ist folgt, dass

$$\forall x \in I \quad \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = 1 .$$

Bezeichne

$$F(s) = x_0 + \int_{x_0}^s 1 = \int_0^s 1 dt = s, \quad s \in \mathbb{R} .$$

Betrachte die Funktion  $H \circ y - F$  auf  $I$ , die wohldefiniert und nach dem Satz über die Differenzierbarkeit der Verkettung differenzierbar ist ( $y$  hat Werte in  $(0, +\infty)$ !). Mit der Kettenregel folgt

$$(H \circ y - F)'(x) = H'(y(x)) \cdot y'(x) - F'(x) = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) - 1 = 0, \quad x \in I,$$

da  $y$  eine Lösung der DGL ist. Da  $I$  ein Intervall ist, ist  $H \circ y - F$  auf  $I$  konstant (auch das folgt aus dem Monotoniesatz!). Insbesondere gilt für alle  $x \in I$ :

$$(H \circ y - F)(x) = (H \circ y - F)(x_0) = H(y(x_0)) - F(x_0) = H(y_0) - F(x_0) = x_0 - x_0 = 0 .$$

Folglich ist  $H \circ y = F$  auf  $I$ . Da  $H$  auf  $(0, +\infty)$  invertierbar ist, folgt  $y = H^{-1} \circ F = H^{-1}$  auf  $I$ . □

**3. Schritt** Wenn  $y$  auf einem offenen Intervall  $(a, b)$  Lösung der DGL mit Anfangswert ist, dann gilt für jede  $x \in (a, b)$ , dass  $y(x) > 0$ .

**Beweis** Da  $y(0) = 1 > 0$  und  $y$  stetig, insbesondere in  $0$ , ist, existiert  $\varepsilon_1 > 0$  so, dass  $y(x) > 0$  für alle  $x \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ . Wir betrachten zunächst  $b$  und definieren

$$M = \{ \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0 \text{ und } \varepsilon < b \text{ und } \forall x \in [0, \varepsilon) \ y(x) > 0 \} .$$

Entweder ist  $M$  nach oben beschränkt, oder nicht. Wenn nicht, dann gilt  $b = \infty$  und wir sind mit  $b$  fertig. Ansonst sei  $\tilde{b} = \sup M \in \mathbb{R}$ . Wenn  $\tilde{b} = b$  gilt, dann sind wir mit  $b$  fertig. Wir zeigen, dass  $\tilde{b} < b$  zu einem Widerspruch führt. Aus der Stetigkeit von  $y$  in  $\tilde{b}$  ( $\tilde{b} \in (a, b)$ !) und mit dem 2. Schritt ( $y = H^{-1}$  auf  $(0, \tilde{b})$ !) folgt

$$y(\tilde{b}) = \lim_{x \nearrow \tilde{b}} y(x) = \lim_{x \nearrow \tilde{b}} H^{-1}(x) = H^{-1}(\tilde{b}) > 0 ,$$

was wiederum nicht sein kann, da  $\tilde{b}$  Supremum ist ( $y$  stetig in  $\tilde{b}$  und positiv, folglich positiv in einer Umgebung von  $\tilde{b}$ ). Damit sind wir mit  $b$  fertig, da folgt, dass  $y(x) > 0$  für alle  $x \in [0, b)$  ist. Ähnlich argumentiert man mit  $a$ . □

Die Schritte 1-3 zusammen implizieren, dass die Aufgabe die einzige Lösung  $H^{-1}$  hat. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Funktion, welche dann natürliche Exponentialfunktion genannt wird, ist damit ohne Verweis auf Potenzreihen bewiesen. □

### 3.3 Trennung der Variablen: die DGL $y' = h(x) \cdot g(y)$

**Satz 3.3 (TdV)** Seien  $(a, b)$  und  $(\alpha, \beta)$  offene Intervalle ( $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  mit  $a < b$  und  $\alpha < \beta$ ),  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen sowie  $x_0 \in (a, b)$  und  $y_0 \in (\alpha, \beta)$ . Nehmen wir an, dass  $h$  und  $g$  stetig sind und dass  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in (\alpha, \beta)$  ist. Dann gibt es genau ein Intervall  $I$  und genau eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $x_0 \in I$ ,  $I \subseteq (a, b)$  und  $I$  ist offen,
- (ii)  $y(x_0) = y_0$  und für alle  $x \in I$  gilt  $y(x) \in (\alpha, \beta)$ ,
- (iii) für alle  $x \in I$  ist  $y$  in  $x$  differenzierbar und es gilt  $y'(x) = h(x) \cdot g(y(x))$  und
- (iv)  $I$  maximal (bezüglich  $\subseteq$ ).

(Die Eigenschaften (i) - (iv) bedeuten, dass  $y$  Lösung der DGL  $y' = h(x)g(y)$  auf einem größtmöglichen offenem Intervall  $I$  mit Graphem in  $(a, b) \times (\alpha, \beta)$  durch  $(x_0, y_0)$  ist.) Die Lösung ist mit folgender Formel gegeben:

$$y = H^{-1} \circ F \text{ auf } I,$$

wobei

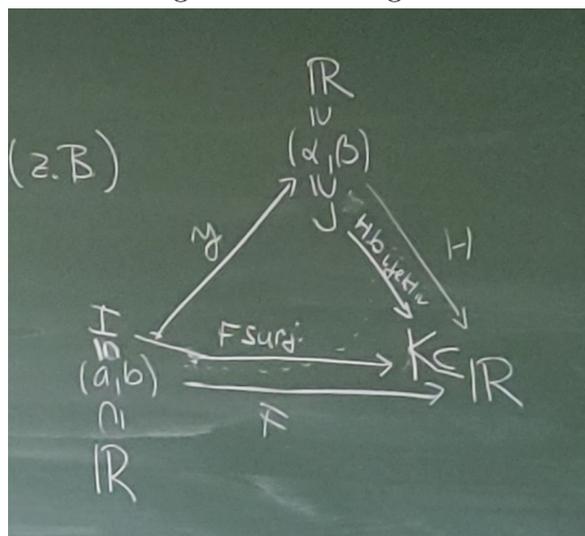
$$F(s) = x_0 + \int_{x_0}^s f(t) dt \text{ für } s \in (a, b),$$

$$H(s) = y_0 + \int_{y_0}^s \frac{1}{g(t)} dt \text{ für } s \in (\alpha, \beta)$$

und  $I$  ist das größtmögliche Intervall mit  $x_0 \in I$  und  $I \subseteq (a, b) \cap F^{-1}(H((\alpha, \beta)))$ .

Bezeichne  $K = F(I)$  und  $J = H^{-1}(K)$ . Dann sind  $K$  und  $J$  Intervalle (nicht notwendigerweise offene) und mit dieser Notation ist  $y : I \rightarrow J$  surjektiv.

Abbildung 3.5: Abbildungen bei TdV



**Beweis** Als Vorbereitung stellen wir fest, dass  $F$  und  $H$  wohldefiniert, stetig und differenzierbar sind,  $F' = h$  auf  $(a, b)$ ,  $H' = \frac{1}{g}$  auf  $(\alpha, \beta)$  (HDI).

Da  $g$  stetig und ungleich 0 auf  $(\alpha, \beta)$  ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass entweder  $g$  positiv auf  $(\alpha, \beta)$ , oder  $g$  negativ auf  $(\alpha, \beta)$  ist. Demzufolge ist  $H$  entweder streng monoton wachsend auf  $(\alpha, \beta)$  oder streng monoton fallend auf  $(\alpha, \beta)$ . In beiden Fällen ist  $H$  streng monoton und somit bijektiv von  $(\alpha, \beta)$  auf  $H((\alpha, \beta))$ . Da  $H$  stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass  $H((\alpha, \beta))$  ein Intervall ist. Aus der Monotonie und Stetigkeit von  $H$  und weil  $(\alpha, \beta)$  offen ist, kann bewiesen werden (mit Widerspruch), dass  $H((\alpha, \beta))$  ein offenes Intervall ist.

Da  $F$  stetig und  $(a, b)$  ein Intervall ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass  $F((a, b))$  ebenfalls ein Intervall ist. Es wird das Urbild der Menge  $F((a, b)) \cap H((\alpha, \beta))$  unter der Abbildung  $F$  betrachtet. Durch  $F^{-1}(B)$  wird das Urbild einer Menge  $B$  unter der Abbildung  $F$  bezeichnet. Die Abbildung  $F$  muss dabei nicht invertierbar sein.

Da  $H(y_0) = x_0$ , ist  $x_0 \in H((\alpha, \beta))$  und da  $F(x_0) = x_0$ , ist  $x_0 \in F((a, b))$ . Damit ist  $x_0 \in F((a, b)) \cap H((\alpha, \beta))$ . Da  $F(x_0) = x_0$ , folgt daraus, dass  $x_0 \in F^{-1}(F((a, b)) \cap H((\alpha, \beta)))$ . Weiter gilt (mit einer Übung in Mengenlehre,  $F^{-1}(A \cap B) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$ ):

$$\begin{aligned} F^{-1}(F((a, b)) \cap H((\alpha, \beta))) &= F^{-1}(F((a, b))) \cap F^{-1}(H((\alpha, \beta))) \\ &= (a, b) \cap F^{-1}(H((\alpha, \beta))) . \end{aligned}$$

Da  $H((\alpha, \beta))$  offen und  $F$  stetig ist, ist  $F^{-1}(H((\alpha, \beta)))$  ebenfalls eine offene Menge. Als Durchschnitt offener Mengen ist somit  $(a, b) \cap F^{-1}(H((\alpha, \beta)))$  auch offen. Diese Menge (wie jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ) kann als Vereinigung von paarweise disjunkten offenen Intervallen geschrieben werden:

$$(a, b) \cap F^{-1}(H((\alpha, \beta))) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \tilde{I}_i$$

( $\mathcal{I}$  ist eine Indexmenge; sie ist endlich oder abzählbar, was für uns irrelevant ist). Zwischen den paarweise disjunkten offenen Intervallen  $\tilde{I}_i$  gibt es genau eins, welches  $x_0$  enthält. Dieses nennen wir  $\tilde{I}$ . Aus der Konstruktion von  $\tilde{I}$  folgt, dass die Funktion  $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{y} = H^{-1} \circ F$  wohldefiniert ist.

Nun teilen wir den eigentlichen Beweis in drei Teile. Aus diesen folgen alle Aussagen des Satzes.

**1. Teil** Wir zeigen, dass  $\tilde{y}$  auf  $\tilde{I}$  Lösung der DGL mit Anfangswert ist.

Da  $F$  und  $H$  differenzierbar sind,  $H$  bijektiv ist und  $H'(s) = \frac{1}{g(s)} \neq 0$  für alle  $s \in (\alpha, \beta)$  ist, folgt aus den Sätzen über die Ableitung der inversen Funktion und über die Ableitung der Verkettung, dass  $H^{-1} \circ F$  differenzierbar in jeder Stelle ihres Definitionsbereiches ist und

$$\begin{aligned} (H^{-1} \circ F)'(x) &= (H^{-1})'(F(x)) \cdot F'(x) = \frac{1}{H'(H^{-1}(F(x)))} \cdot F'(x) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{g(H^{-1}(F(x)))}} \cdot h(x) = g((H^{-1} \circ F)(x)) \cdot h(x) \end{aligned}$$

für alle  $x$  im Definitionsbereich von  $H^{-1} \circ F$  (was übrigens gleich  $(a, b) \cap F^{-1}(H((\alpha, \beta)))$  und somit eine offene Menge ist). Insbesondere für alle  $x \in \tilde{I}$ . Somit ist  $\tilde{y}$  eine Lösung der DGL auf  $\tilde{I}$ . Trivialerweise gilt  $H^{-1}(F(x_0)) = H^{-1}(x_0) = y_0$ , da  $H(y_0) = x_0$  ist. Somit hat  $\tilde{y}$  auch den geforderten Anfangswert.

**2. Teil** Nehmen wir an, dass ein Intervall  $I$  und eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Eigenschaften (i) - (iii) erfüllen. Wir zeigen, dass dann  $I \subseteq \tilde{I}$  gilt und  $y$  gleich der Einschränkung von  $\tilde{y}$  auf  $I$  ist.

Da  $y$  eine Lösung der DGL auf  $I$  ist und  $y(x) \in (\alpha, \beta)$  und somit  $g(y(x)) \neq 0$  für alle  $x \in I$  ist, folgt, dass

$$\frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = h(x), \quad x \in I.$$

Da  $H$  Stammfunktion zu  $\frac{1}{g}$  ist, folgt aus der Kettenregel, dass

$$(H \circ y)'(x) = H'(y(x)) \cdot y'(x) = \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = \left( \frac{1}{g \circ y} \cdot y' \right) (x), \quad x \in I.$$

Weiter ist  $F$  Stammfunktion zu  $h$  und weil  $y$  (iii) erfüllt, gilt somit

$$(H \circ y - F)' = \frac{1}{g \circ y} \cdot y' - h = 0 \text{ auf } I.$$

Da  $I$  ein Intervall ist, folgt, dass  $H \circ y - F$  auf  $I$  konstant ist. Somit gilt für alle  $x \in I$ :

$$(H \circ y - F)(x) = (H \circ y - F)(x_0) = H(y(x_0)) - F(x_0) = H(y_0) - F(x_0) = x_0 - x_0 = 0,$$

d.h.  $H \circ y = F$  auf  $I$ . Daraus folgt  $F(x) = H(y(x)) \in H((\alpha, \beta))$  für alle  $x \in I$ , d.h.  $I \subseteq F^{-1}(H((\alpha, \beta)))$ . Da  $H$  invertierbar ist (bijektiv!), folgt weiter, dass

$$y(x) = H^{-1}(F(x)), \quad x \in I.$$

Da  $x_0 \in I$ ,  $I \subseteq (a, b)$ ,  $I$  offen und ein Intervall ist, folgt aus der Konstruktion von  $\tilde{I}$ , dass  $I \subseteq \tilde{I}$ . Zusammengefasst,  $y = \tilde{y}$  auf  $I$ , was zu beweisen war.

**3. Teil** Die Funktion  $H^{-1} \circ F$  kann nicht auf einem  $x_0$  enthaltenden, echt größeren Intervall als  $\tilde{I}$  definiert werden. Dies folgt aus der Konstruktion von  $\tilde{I}$ .

Der Beweis des Satzes ist beendet. □

**Bemerkung** Für allgemeine DGL  $y' = f(x, y)$  mit  $y(x_0) = y_0$  ist weder Existenz einer Lösung, noch Eindeutigkeit der Lösung und auch noch die Existenz einer Lösung auf dem größtmöglichen Intervall trivial, siehe später die Sätze von Peano, Osgood und die Definition einer nicht-fortsetzbaren Lösung. Für DGL mit getrennten Variablen (d.h.  $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$ ) haben wir diese drei Aussagen per Konstruktion direkt (und im Vergleich zu Peano, Osgood bzw. Zorn elementar) nachgewiesen. Die so erhaltene Lösung muss aber nicht eine nicht-fortsetzbare Lösung sein, insbesondere dann nicht, wenn die Funktion  $g$  auf einer größeren Menge definiert ist und auf dieser auch den Wert 0 annimmt. Auch die Eindeutigkeit ist beim Verlassen des Rechtecks  $(a, b) \times (\alpha, \beta)$  nicht mehr garantiert.

## 4 Existenz von Lösungen

Folgender Satz besagt, dass das Anfangswertproblem für DGL mit stetiger rechter Seite mindestens eine Lösung hat. Zu seinem Beweis wird der Satz von Arzelà und Ascoli aus der Analysis benutzt.

**Satz 4.1 (Peano)** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und  $(x_0, y_0) \in G$ . Nehmen wir an, dass  $f$  stetig in  $G$  ist. Dann existieren reelle Zahlen  $a, b$ ,  $a < b$ , so, dass  $x_0 \in (a, b)$  und es gibt mindestens eine Funktion  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $y$  Lösung der DGL  $y' = f(x, y)$  auf  $(a, b)$  mit  $y(x_0) = y_0$  ist.

Der Satz ist eine hinreichende aber keine notwendige Bedingung. Wie das folgende Beispiel zeigt, DGL mit unstetiger rechter Seite kann auch eine Lösung besitzen. Es gibt aber auch DGL (mit unstetiger rechter Seite), für welche das Anfangswertproblem keine Lösung besitzt. Zum Beispiel die DGL  $y' = D(x)$ , wobei  $D$  die sogenannte Dirichletfunktion (d.h.  $D(x) = 1$  für  $x$  rational und  $D(x) = 0$  für  $x$  irrational) ist.

**Beispiel B.6** Sei  $f(x, y) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $f(x, y) = 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$  für  $x > 0$  und alle  $y \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig (wähle z.B. die Folge  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n\pi}, 0)$ ). Jedoch hat die DGL  $y' = f(x, y)$  mit  $y(0) = 0$  eine Lösung  $y$  auf  $\mathbb{R}$ , nämlich  $y(x) = 0$  für  $x \leq 0$ ,  $y(x) = x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})$  für  $x > 0$ . □

### 4.1 Kompaktheitsätze

Folgende zwei Sätze können als hinreichende Kriterien für die Existenz einer konvergenten Teilfolge zu einer gegebenen Folge (von reellen Zahlen bzw. Funktionen) gesehen werden. Der zweite Satz wird im Beweis des Satzes von Peano benutzt, der erste im nächsten Kapitel.

**Satz 4.2 (Bolzano und Weierstraß)** Sei  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge. Wenn sie beschränkt ist, dann existieren mindestens eine streng monoton wachsende Folge  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und mindestens eine reelle Zahl  $A$  so, dass  $\lim_n a(k(n)) = A$ .

**Beweis** Wir fassen nur die Idee des Beweises und die dafür benötigten Kenntnisse zusammen.

Der Beweis beruht auf der Idee der Intervallhalbierung, benutzt das Schubfachprinzip, die Tatsache, dass die Menge  $\mathbb{N}$  unendlich viele Elemente hat sowie die Vollständigkeit

## 4 Existenz von Lösungen

von  $\mathbb{R}$ . Zuerst stellt man fest, dass es ein beschränktes Intervall  $I_1$  gibt, welches alle Folgenglieder  $a(n)$  enthält. Man konstruiert schrittweise ineinander eingebettete Intervalle  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , (d.h.  $I_{n+1} \subseteq I_n$ ) und betrachtet die Menge

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n .$$

Zu zeigen bleibt, dass diese Menge genau ein Element enthält und dass dieses der Grenzwert der Teilfolge ist. Die Teilfolge wird bei der Konstruktion der Intervalle  $I_n$  auch mitkonstruiert.  $\square$

**Satz 4.3 (Arzelà und Ascoli)** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen,  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wenn sie folgende zwei Eigenschaften (a) und (b) hat, dann existieren mindestens eine streng monoton wachsende Folge  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und mindestens eine stetige Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $\lim_n \max\{|f_{k(n)}(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\} = 0$  ist.

(a) Es gibt ein  $K > 0$  so, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \in [0, 1]$  gilt  $|f_n(x)| \leq K$ .

(b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x_0 \in [0, 1] \forall x \in [0, 1] :$

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon .$$

(Man sagt, dass die Teilfolge  $(f_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  bezüglich der Supremumsnorm, oder gleichmäßig, auf  $[0, 1]$  gegen  $g$  konvergiert.)

**Beweis** Einen Beweis findet man auch in [1]. Wir fassen nur seine Idee zusammen.

Zuerst stellt man fest, dass es ein beschränktes Rechteck in der Ebene gibt, welches die Graphen aller Funktionen enthält. Dieses wird in jedem Schritt feiner in kleinere Rechtecke zerlegt. Man konstruiert ineinander eingebettete Mengen  $F_n$  als Vereinigung von einigen kleinen Rechtecken und betrachtet die Menge

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n .$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Menge der Graph einer stetigen Funktion ist, welche der Grenzwert der Teilfolge wird. Beides muss bewiesen werden. Die Konstruktion der Mengen  $F_n$  erfolgt so, dass auch die Teilfolge dabei konstruiert wird.  $\square$

**Bemerkung** Wie wir sehen, haben beide Sätze eine gemeinsame Voraussetzung, und zwar die Beschränktheit der Folge. Diese Voraussetzung ist bei reellen Zahlen sogar hinreichend, aber in allgemeineren Fällen nicht. Beispielsweise hat die Folge von Funktionen definiert durch  $g_n(x) = \sin(n \cdot x)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , keine konvergente Teilfolge (das folgt nicht einfach aus dem Blick auf den Graphen, sondern müsste bewiesen werden!), obwohl sie beschränkt ist.

## 4.2 Eulersche Polygonzüge

Wir betrachten das Problem

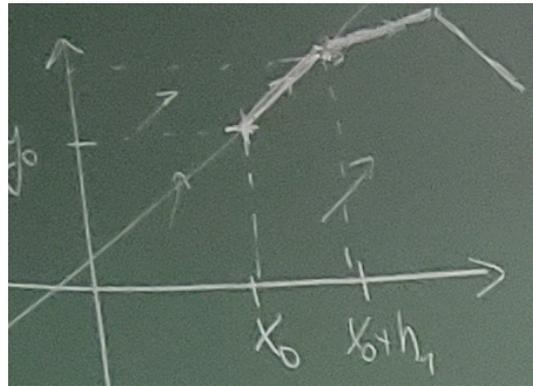
$$y' = f(x, y) \text{ mit } y(x_0) = y_0$$

und der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $f$  auf dem ganzen  $\mathbb{R}^2$  definiert ist. Aber wir stellen keine weiteren Voraussetzungen an  $f$ . Dann ist das Richtungsfeld überall definiert. Wir betrachten die Gerade durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  mit Steigung  $f(x_0, y_0)$ , das heißt den Graph der Funktion  $g_1$  definiert durch

$$g_1(x) = f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + y_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sei jetzt  $h_1 > 0$  und betrachte den Punkt  $(x_1, y_1)$  definiert durch  $x_1 = x_0 + h_1$  und  $y_1 = g_1(x_1)$ . Mit der Steigung  $f(x_1, y_1)$  konstruieren wir eine Gerade durch  $(x_1, y_1)$ , die Graph einer linearen Funktion, genannt  $g_2$ , ist. Wir wählen zunächst  $h_2 > 0$  und wiederholen die Konstruktion, und so weiter. Wenn  $T > 0$  am Anfang fixiert ist und  $n \in \mathbb{N}$ , dann können wir mit der einfachen Wahl  $h_1 = \frac{T}{n}$ ,  $h_2 = \frac{T}{n}$ , u.s.w.,  $x_n = x_0 + T$  erreichen.

Abbildung 4.1: Polygonzug.



**Definition 4.4** Seien  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  und  $T > 0$  gegeben. Der Graph der Funktion  $g$  definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{wenn } x \in [x_0, x_1] \text{ (wobei } x_1 = x_0 + h_1 > x_0), \\ g_2(x) & \text{wenn } x \in (x_1, x_2] \text{ (wobei } x_2 = x_1 + h_2 > x_1), \\ \dots & \\ g_n(x) & \text{wenn } x \in (x_{n-1}, x_n] \text{ (wobei } x_n = x_0 + T), \end{cases}$$

heißt **Eulerscher Polygonzug** (auf  $[x_0, x_0 + T]$ ).

Zu gegebenen  $x_0, y_0$  und  $T > 0$  gibt es viele Eulersche Polygonzüge, da man  $h_i > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  wählen kann.

## 4.3 Beweise der Existenz einer Lösung

In den meisten Büchern über gewöhnliche Differentialgleichungen ist ein Beweis des Satzes von Peano zu finden, deshalb wird hier der komplette Beweis nicht aufgeschrieben. Die Idee ist, nach einer technischen Vorbereitung (Einschränkung der Menge, wo dann

alle Graphen liegen werden) Polygonzüge mit gegen 0 konvergierender Schrittweite zu konstruieren. Nennen wir diese Funktionen  $\varphi_n$ . Mit Hilfe des Satzes von Arzelà und Ascoli kann man aus der Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge wählen, deren Grenzwert Kandidat für eine Lösung ist. Es muss zusätzlich bewiesen werden, dass der Grenzwert eine Lösung ist.

Wie aus der Beweisidee zu entnehmen ist, liefert sie keine Eindeutigkeit der Lösung. Es können zwei Teilfolgen zwei verschiedene Grenzwerte haben und diese beide Lösungen sein.

Der Satz gilt ohne die Voraussetzung der Stetigkeit der rechten Seite im Allgemeinen nicht.

Eine andere Beweisidee der Aussage über Existenz einer Lösung ist die Konstruktion einer anderen Folge, die sogenannte Picardsche Iterationen (**sukzessive Approximationen**).

Die Idee hinter numerischen Verfahren ist gleichfalls die Konstruktion von Folgenglieder einer Funktionenfolge. Solche Folgenglieder können nur dann als “approximative Lösung” bezeichnet werden, wenn die komplette Folge konvergent ist, und nicht wenn nur eine konvergente Teilfolge existiert. Ohne die Information, dass das Problem nicht mehrere Lösungen hat, kann es nämlich passieren, dass zwei Teilfolgen zwei verschiedene Grenzwerte haben und somit die Folgenglieder von beiden Teilfolgen nicht nah aneinander (bezüglich einer Metrik) sind. Somit können auch nicht beide nah an ein und derselben Lösung sein! Deshalb ist ein Beweis der Eindeutigkeit der Lösung und ein Beweis der Existenz der Lösung immer erforderlich, bevor eine numerische Methode, und konkret ein mathematische Software, zum Lösen einer DGL eingesetzt wird.

# 5 Eindeutigkeit der Lösung

**Beispiel B.7** Das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \cdot \sqrt{|y|} \text{ auf } \mathbb{R} \text{ mit } y(0) = 0$$

hat mehr als eine Lösung, da beide Funktionen  $y_1$  und  $y_2$ ,  $y_1(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $y_1(x) = x^2$  für  $x > 0$ ,  $y_2(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , Lösungen sind (dies kann man durch Berechnung der Ableitungen von  $y_1$  und  $y_2$  nachweisen).  $\square$

Abbildung 5.1: Zwei Lösungen eines AWP.



Folgender Satz ist ein hinreichendes Kriterium für die Eindeutigkeit der Lösung.

**Satz 5.1 (Osgood)** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}$  eine offene Menge,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und  $(x_0, y_0) \in G$ . Nehmen wir an, dass  $f$  die folgende Bedingung (E) erfüllt.

(E) Es gibt eine Hilfsfunktion  $\varphi : [0, +\infty)$  so, dass

(i)  $\varphi$  ist stetig (in 0 von rechts),

(ii)  $\forall x \in [0, +\infty) \varphi(x) > 0$  und  $\varphi(0) = 0$ ,

(iii)  $\lim_{r \searrow 0} \int_r^1 \frac{1}{\varphi} = +\infty$  und

(iv)  $\forall (x, y_1) \in G \forall (x, y_2) \in G \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varphi(|y_1 - y_2|)$ .

Dann gilt für jedes offene Intervall  $I$  mit  $x_0 \in I$ , dass folgendes Problem (P) höchstens eine Lösung hat.

(P)  $y' = f(x, y)$  auf  $I$  mit  $y(x_0) = y_0$  und für alle  $x \in I$  gilt  $(x, y(x)) \in G$ .

Die Bedingung (E) ist insbesondere erfüllt, wenn die Funktion  $f$  folgende Eigenschaft hat:

$$(E0) \quad \forall (x, y_1) \in G \forall (x, y_2) \in G \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2|.$$

Tatsächlich kann  $\varphi(s) = s$  für  $s \geq 0$  gewählt werden. Auch jede lineare Funktion  $\varphi(s) = a \cdot s$ ,  $s \geq 0$ , mit  $a > 0$  erfüllt die Eigenschaften (i) - (iii).

**Beweis** Wir führen den Beweis mit Widerspruch und nehmen an, dass  $I$  ein offenes Intervall mit  $x_0 \in I$  ist,  $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen sind und  $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$  für irgendein  $x_1 \in I$ . Offensichtlich gilt  $x_1 \neq x_0$ , deshalb gibt es zwei Fälle: entweder

## 5 Eindeutigkeit der Lösung

$x_1 > x_0$  oder  $x_1 < x_0$ . Wir werden nur den ersten Fall betrachten und überlassen den zweiten Fall dem tüchtigen Leser. Es gilt also  $x_1 > x_0$  für die weiteren Betrachtungen. Es gibt wieder zwei Fälle, entweder  $y_1(x_1) > y_2(x_1)$  oder  $y_1(x_1) < y_2(x_1)$ . Hier können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass  $y_1(x_1) > y_2(x_1)$ , sonst würden wir die zwei Lösungen umbenennen (wir müssen nichts dem Leser überlassen!).

Sei  $z_1 = y_1(x_1) - y_2(x_1)$  und betrachte das Hilfsproblem

$$z' = 2 \cdot \varphi(z) \text{ mit } z(x_1) = z_1 .$$

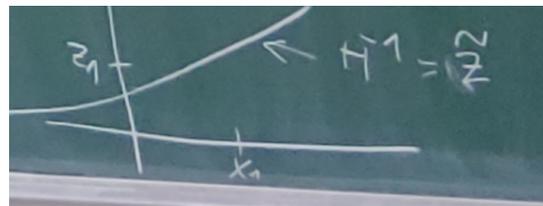
Da  $\varphi$  stetig ist und ungleich 0 auf dem Intervall  $(0, +\infty)$  und  $z_1 \in (0, +\infty)$ , hat dieses Problem nach dem Satz über TdV (eigentlich Satz 3.2) eine Lösung, und zwar  $\tilde{z} = H^{-1}$  auf  $\tilde{I}$ , wobei  $H(s) = x_1 + \int_{z_1}^s \frac{1}{2\varphi}$  für  $s \in (0, +\infty)$  und  $\tilde{I} = H((0, +\infty))$ .

Wir brauchen den Verlauf von  $\tilde{z}$ .  $H$  ist auf  $(0, +\infty)$  streng monoton wachsend, da  $H'(s) = \frac{1}{2\varphi(s)} > 0$  für alle  $s \in (0, +\infty)$  ist. Weiter ist nach der Voraussetzung (iii)

$$\lim_{s \searrow 0} H(s) = \lim_{s \searrow 0} \left( x_1 - \frac{1}{2} \int_s^1 \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{2} \int_1^{z_1} \frac{1}{\varphi} \right) = -\infty .$$

Abbildung 5.2: Verlauf von  $\tilde{z}$ .

Da  $H$  stetig ist, ist das Bild  $H((0, +\infty))$  ein Intervall der Form  $(-\infty, b)$  mit einem  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Da  $x_1 = H(z_1)$ , ist  $b > x_1$ . Da  $H(z_1) = x_1$  und  $x_0 < x_1$  folgt somit, dass  $x_0$  im Wertebereich von  $H$  und damit im Definitionsbereich von  $\tilde{z}$  liegt. Die Funktion  $\tilde{z}$  ist streng monoton wachsend auf  $(-\infty, b)$  und  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \tilde{z}(s) = 0$ .

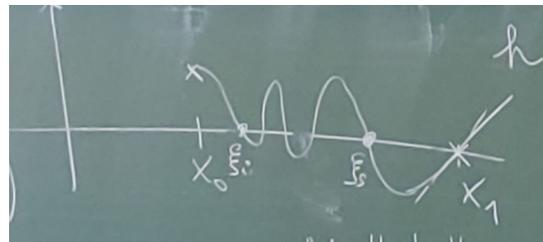


Nun betrachten wir die Funktion  $h = \tilde{z} - (y_1 - y_2)$  auf dem Intervall  $[x_0, x_1]$  um ein Widerspruch zu erreichen. Wir berechnen ihre Werte in den Endpunkten des Intervalles und die Ableitung in  $x_1$ , die mit Hilfe von (iv) abgeschätzt wird:

$$\begin{aligned} h(x_0) &= \tilde{z}(x_0) - (y_1(x_0) - y_2(x_0)) = \tilde{z}(x_0) > 0, \\ h(x_1) &= \tilde{z}(x_1) - (y_1(x_1) - y_2(x_1)) = z_1 - z_1 = 0, \\ h'(x_1) &= \tilde{z}'(x_1) - (y_1'(x_1) - y_2'(x_1)) = 2\varphi(\tilde{z}(x_1)) - (f(x_1, y_1(x_1)) - f(x_1, y_2(x_1))) \\ &\geq 2\varphi(\tilde{z}(x_1)) - \varphi(|y_1(x_1) - y_2(x_1)|) = 2\varphi(z_1) - \varphi(z_1) = \varphi(z_1) > 0 . \end{aligned}$$

Aus  $h'(x_1) > 0$  und  $h(x_1) = 0$  folgt, dass  $h$  auf einem Intervall  $(x_1 - \varepsilon, x_1)$  (mit  $\varepsilon > 0$ ) negative Werte hat. Da  $h$  stetig ist, folgt aus dem Nullstellensatz, dass  $h$  in  $(x_0, x_1)$  mindestens eine Nullstelle besitzt. Bezeichne mit  $\xi_i$  die kleinste Nullstelle von  $h$  in  $(x_0, x_1)$  (die existiert!). Genauso wie bei der Berechnung von  $h'(x_1)$  kann man zeigen, dass  $h'(\xi_i) > 0$ .

Abbildung 5.3: Verlauf der Funktion  $h$ .



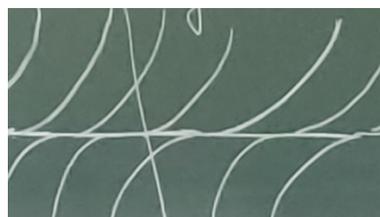
Argumentiert man nun für  $\xi_i$  genauso wie für  $x_1$ , folgt, dass  $h$  mindestens eine Nullstelle in  $(x_0, \xi_i)$  haben muss, was der Wahl von  $\xi_i$  widerspricht. □

# 6 Lösungen auf größtmöglichen Intervallen

## 6.1 Nicht-fortsetzbare Lösungen

**Beispiel B.7** Betrachte wieder das Problem  $y' = 2 \cdot \sqrt{|y|}$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $y(0) = 0$ . Durch Berechnung der Ableitung kann man nachweisen, dass jede Funktion aus der Menge  $L$  unten eine Lösung des Problems ist. Mit Hilfe der TdV und zusätzlichen Argumenten kann man nachweisen, dass die obige DGL auf  $\mathbb{R}$  keine weiteren Lösungen als die Funktionen in  $L$  haben kann.

Abbildung 6.1: Alle Lösungen einer DGL



$$L = \{y : y \text{ ist eine Funktion so, dass entweder } \forall x \in \mathbb{R} y(x) = 0$$

$$\text{oder } \exists c_1 \in \mathbb{R} \forall x \geq c_1 y(x) = 0 \wedge \forall x < c_1 y(x) = -(x - c_1)^2,$$

$$\text{oder } \exists c_2 \in \mathbb{R} \forall x \geq c_2 y(x) = (x - c_2)^2 \wedge \forall x < c_2 y(x) = 0,$$

$$\text{oder } \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } c_1 \leq c_2 \forall x \leq c_1 y(x) = -(x - c_1)^2 \wedge \forall x \in (c_1, c_2) y(x) = 0$$

$$\wedge \forall x \geq c_2 y(x) = (x - c_2)^2\}$$

Nach diesen Informationen ist es nicht mehr schwierig festzustellen, dass die DGL  $y' = 2 \cdot \sqrt{|y|}$  sehr viele Lösungen, gesehen als Paare von einem offenen Intervall  $I$  und von einer auf  $I$  definierten Funktion, hat. Zum Beispiel sind es Einschränkungen einer beliebigen Funktion  $y$  aus  $L$  auf ein beliebiges offenes Intervall  $I$ .  $\square$

**Definition 6.1** Gegeben sei eine Funktion  $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das Paar  $(I, y)$  werden wir **nicht-fortsetzbare** (kurz: **n.-f.**) Lösung der DGL  $y' = f(x, y)$  nennen, falls folgende zwei Aussagen wahr sind.

- (i)  $y$  ist Lösung auf  $I$ .
- (ii) Wenn  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $z : J \rightarrow \mathbb{R}$  Lösung auf  $J$  ist und  $I \subseteq J$  und  $z|_I = y$  ist, dann ist  $I = J$  und  $z = y$ .

Kurz: wir betrachten diejenige Lösungen, die als Lösung der DGL auf kein größeres Intervall fortgesetzt werden können. Offensichtlich ist  $(\mathbb{R}, y)$  für jede  $y \in L$  eine n.-f.

Lösung der obigen DGL,  $(I, y|_I)$  für  $y \in L$  und  $I \neq \mathbb{R}$  aber nicht. Mit TdV für diese DGL kann keine n.-f. Lösung gefunden werden!

**Bemerkung** Elegant kann man in der Menge aller Lösungen mit dem Begriff Ordnungsrelation die Lösungen sortieren. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{L}_f = \{(I, y) : I \subseteq \mathbb{R} \text{ offenes Intervall, } y : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lösung auf } I\}$$

und die Relation  $\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{L}_f$  durch

$$((I, y), (J, z)) \in \mathcal{R} \text{ genau dann, wenn } I \subseteq J \wedge z|_I = y.$$

Man kann leicht nachweisen, dass  $\mathcal{R}$  eine Ordnungsrelation auf  $\mathcal{L}_f$  ist. N.-f. Lösungen werden dann die maximalen Elemente der Menge  $\mathcal{L}_f$  bezüglich  $\mathcal{R}$  sein.

## 6.2 Verhalten nicht-fortsetzbarer Lösungen

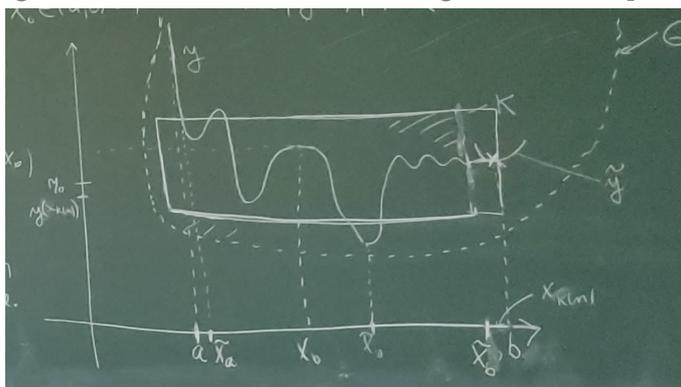
**Satz 6.2** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der DGL  $y' = f(x, y)$  auf einem offenen Intervall  $(a, b)$ . Wenn  $f$  stetig in  $G$  ist und  $((a, b), y)$  eine n.-f. Lösung ist, dann gilt Folgendes.

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  eine beschränkte abgeschlossene Menge so, dass  $(x_0, y(x_0)) \in K$  für irgendein  $x_0 \in (a, b)$  und  $K \subseteq G$  gelten. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Es gibt mindestens ein  $\tilde{x}_0 \in (a, b)$  so, dass  $(\tilde{x}_0, y(\tilde{x}_0)) \notin K$ .
- (ii) Es gibt ein  $\tilde{x}_b \in (a, b)$  so, dass für alle  $x \in (\tilde{x}_b, b)$  gilt  $(x, y(x)) \notin K$  und es gibt ein  $\tilde{x}_a \in (a, b)$  so, dass für alle  $x \in (a, \tilde{x}_a)$  gilt  $(x, y(x)) \notin K$ .

(Kurz: N.-f. Lösungen verlassen jede kompakte Menge.)

Abbildung 6.2: Nicht-fortsetzbare Lösung verläßt kompakte Mengen



**Beweis** Wir beweisen die Aussage (i) mit Hilfe der Sätze Bolzano-Weierstraß und Peano.

Wir führen den Beweis mit Widerspruch und nehmen an, dass  $((a, b), y)$  n.-f. ist und dass  $(x, y(x)) \in K$  für alle  $x \in (a, b)$ . Aus der Beschränktheit von  $K$  folgt dann die Beschränktheit von  $(a, b)$ , d.h.  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wähle eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die von links gegen  $b$  konvergiert (z.B.  $x_n = b - \frac{1}{n}$ ). Da  $K$  beschränkt ist, ist die Folge  $(y(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  auch beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß existiert mindestens eine streng monoton wachsende Folge  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und mindestens eine reelle Zahl  $\eta_0$  so, dass  $\eta_0 = \lim_n y(x_{k(n)})$ . Da  $(x_{k(n)}, y(x_{k(n)})) \in K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt und  $K$  abgeschlossen ist, folgt  $(b, \eta_0) \in K$ . Da  $K \subseteq G$ , ist somit  $(b, \eta_0) \in G$ .

Nach dem Satz von Peano hat die DGL  $y' = f(x, y)$  mit Anfangsbedingung  $y(b) = \eta_0$  mindestens eine Lösung ( $f$  ist stetig in der Umgebung von  $(b, \eta_0)$  nach Voraussetzung), d.h. existieren  $\tilde{\varepsilon} > 0$  und eine Funktion  $\tilde{y} : (b - \tilde{\varepsilon}, b + \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche Lösung der DGL  $y' = f(x, y)$  auf  $(b - \tilde{\varepsilon}, b + \tilde{\varepsilon})$  ist und den Anfangswert  $\tilde{y}(b) = \eta_0$  hat. Wir definieren die Funktion  $z$  wie folgt:

$$z(x) = \begin{cases} y(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ \eta_0 & \text{für } x = b, \\ \tilde{y}(x) & \text{für } x \in (b, b + \tilde{\varepsilon}). \end{cases}$$

Ziel ist es zu zeigen, dass  $z$  Lösung der DGL auf  $(a, b + \tilde{\varepsilon})$  ist. Das wird ein Widerspruch dazu sein, dass  $y$  nicht-fortsetzbar ist.

Dass für  $x \in (a, b)$  bzw.  $x \in (b, b + \tilde{\varepsilon})$  die Gleichheit  $z'(x) = f(x, z(x))$  gilt, ist offensichtlich, da  $y$  und  $\tilde{y}$  Lösungen sind. Außerdem ist  $\tilde{y}$  differenzierbar und folglich stetig in  $b$ , deshalb ist  $z$  in  $b$  von rechts stetig. Für den Nachweis der Stetigkeit von  $z$  in  $b$  von links betrachte eine beliebige Folge  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die gegen  $b$  von links konvergiert. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion  $y$  existiert  $\zeta_n$  zwischen  $\xi_n$  und  $x_n$  so, dass

$$y(\xi_n) - y(x_n) = y'(\zeta_n) \cdot (\xi_n - x_n) \text{ für } n \in \mathbb{N} .$$

Für die Teilfolge  $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$  können wir somit, und weil  $y$  die DGL an der Stelle  $\xi_{k(n)}$  erfüllt, schreiben

$$\begin{aligned} z(\xi_{k(n)}) &= y(\xi_{k(n)}) = y(\xi_{k(n)}) - y(x_{k(n)}) + y(x_{k(n)}) = y'(\zeta_{k(n)}) \cdot (\xi_{k(n)} - x_{k(n)}) + y(x_{k(n)}) \\ &= f(\zeta_{k(n)}, y(\zeta_{k(n)})) \cdot (\xi_{k(n)} - x_{k(n)}) + y(x_{k(n)}) . \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck, gesehen als Folge der Variable  $n$ , hat den Grenzwert  $\eta_0$ , denn  $\lim_n y(x_{k(n)}) = \eta_0$ ,  $\lim_n (\xi_{k(n)} - x_{k(n)}) = 0$  und  $f(K)$  ist beschränkt ( $f$  ist stetig und  $K$  ist kompakt). Da  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beliebig war, folgt die Stetigkeit von  $z$  in  $b$  von links.

Für den Nachweis der Differenzierbarkeit von  $z$  in  $b$  berechnen wir zunächst den Grenzwert von rechts:

$$\lim_{x \searrow b} \frac{z(x) - z(b)}{x - b} = \lim_{x \searrow b} \frac{\tilde{y}(x) - \tilde{y}(b)}{x - b} = \tilde{y}'(b) = f(b, \tilde{y}(b)) = f(b, \eta_0) = f(b, z(b)) .$$

Für  $x < b$  können wir mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für ein geeignetes  $\zeta_x$  zwischen  $x$  und  $b$  schreiben

$$\frac{z(x) - z(b)}{x - b} - f(b, \eta_0) = z'(\zeta_x) - f(b, \eta_0) = y'(\zeta_x) - f(b, \eta_0) = f(\zeta_x, y(\zeta_x)) - f(b, \eta_0) ,$$

denn  $y$  erfüllt die DGL an der Stelle  $\xi_x$ . Da  $\lim_{x \nearrow b} \zeta_x = b$ ,  $z$  stetig in  $b$  und  $f$  stetig in  $(b, \eta_0)$  ist, folgen

$$\lim_{x \nearrow b} y(\zeta_x) = \lim_{x \nearrow b} z(\zeta_x) = z(b) = \eta_0 \text{ und}$$

$$\lim_{x \nearrow b} f(\zeta_x, y(\zeta_x)) = f(b, \eta_0) .$$

Somit ist  $z$  differenzierbar in  $b$  mit Ableitung  $f(b, \eta_0)$ . Folglich ist  $z$  Lösung auf  $(a, b + \tilde{\varepsilon})$ .

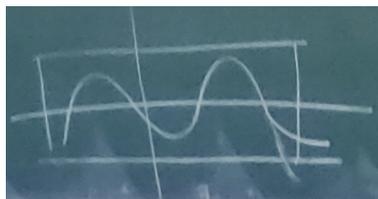
Die Aussage (i) ist somit bewiesen. Der Beweis der Aussage (ii) beruht auf dem gleichen Prinzip. Man muss die Voraussetzung für den Widerspruchsbeweis entsprechend formulieren.  $\square$

**Bemerkungen** Der Satz findet Anwendung zum Beispiel wenn es nachgewiesen werden soll, dass eine Lösung auf dem ganzen  $(0, +\infty)$  existiert. Man beweist zum Beispiel, dass Lösungen beschränkt sein müssen. Dann muss jede n.-f. Lösung auf einem unbeschränkten Intervall eine Lösung sein.

In konkreten Beispielen kann man nachweisen, dass die konkret gefundene Lösung n.-f. ist (zum Beispiel, wenn sie auf ganz  $\mathbb{R}$  eine Lösung ist, oder wenn sie auf einem beschränkten Intervall  $(a, b)$  eine Lösung ist und unendliche einseitige Grenzwerte an den Intervallenden  $a$  und  $b$  hat).

Die Existenz von n.-f. Lösungen im Allgemeinen haben wir nicht betrachtet. Die Aussage über die Existenz (mindestens) einer nicht-fortsetzbaren Lösung eines AWP's kann man mit Hilfe des Lemmas von Zorn beweisen, welche äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Heutige Mathematik setzt größtenteils die Wahrheit des Auswahlaxioms voraus.

Abbildung 6.3:



# 7 Differentialgleichungssysteme

Bezeichne  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $n$  eine natürliche Zahl größer oder gleich 1 und  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion, die gegeben ist. Bezeichne die Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  die gesuchte Lösung des Problems

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ für } x \in I .$$

Ein Anfangswertproblem ist mit der zusätzlichen Bedingung  $y(x_0) = y_0$  formuliert, wobei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  gegeben sind.

Wenn  $n > 1$  ist, dann kann man das "Richtungsfeld in der Ebene" nicht skizzieren und TdV hat keinen Sinn. Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit und Verhalten n.-f. Lösungen gelten auch für DGLS. Die Beweise des Satzes von Peano und des Satzes über das Verhalten nicht-fortsetzbaren Lösungen für DGLS (d.h.  $n > 1$ ) sind analog zu den Beweisen für DGL (d.h.  $n = 1$ ). Der Beweis des Satzes von Osgood ist für DGLS etwas schwieriger als für DGL. Auch mit anderen Beweisideen (von Picard und Lindelöf) können Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit getroffen werden. Die Beweise findet man zum Beispiel in [1].

**Satz 7.1 (Existenz; nach Peano)** Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion und  $(x_0, y_0) \in G$ . Wenn  $f$  in  $G$  stetig ist, dann existiert (mindestens) ein offenes Intervall  $I$  mit  $x_0 \in I$  und (mindestens) eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  so, dass

(i)  $y(x_0) = y_0$  und

(ii) für alle  $x \in I$  ist  $(x, y(x)) \in G$  und  $y$  ist in  $x$  differenzierbar mit  $y'(x) = f(x, y(x))$ .

**Satz 7.2 (Eindeutigkeit; nach Osgood)** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$  und bezeichne

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon \text{ und } \|y - y_0\| < \eta\} .$$

Sei weiter  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion. Nehmen wir an, dass  $f$  folgende Eigenschaft hat

(L)  $\exists K > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$(\|y_1 - y_0\| < \eta \wedge \|y_2 - y_0\| < \eta) \Rightarrow \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq K \cdot \|y_1 - y_2\| .$$

Dann hat das AWP  $y' = f(x, y)$  mit  $y(x_0) = y_0$  und mit Graphen in  $G$  höchstens eine Lösung.

**Satz 7.3 (Existenz und Eindeutigkeit; nach Picard und Lindelöf)** Seien  $x_0, y_0, \eta, \varepsilon, G$  wie im vorherigen Satz und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nehmen wir an, dass  $f$  folgende drei Eigenschaften

(S)  $f$  stetig in  $G$ ,

(L) (die Eigenschaft von oben) und

(M)  $\exists M > 0 \forall (x, y) \in G: \|f(x, y)\| \leq M$  (d.h.  $f$  ist auf  $G$  beschränkt)

hat. Sei  $\alpha = \min\{\varepsilon, \frac{\eta}{M}\}$  und  $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ . Dann hat das Anfangswertproblem  $y' = f(x, y)$  auf  $I$  mit  $y(x_0) = y_0$  genau eine Lösung.

**Beweis** Wir formulieren die Beweisidee der Einfachheit halber für  $n = 1$ . Statt der DGL stellt man eine Integralgleichung auf und zeigt, dass diese zwei Probleme äquivalent sind. Die Lösung der Integralgleichung wird der Grenzwert einer rekursiv definierten Funktionenfolge  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sein, die wie folgt definiert ist. Wähle  $\phi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige stetige Funktion mit Graphen in  $G$ , zum Beispiel die konstante Funktion  $x \mapsto y_0$ , und

$$\phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_k(t)) dt \text{ für } x \in I \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

□

Diese Funktionenfolge ist nicht gleich der von Peano konstruierten Funktionenfolge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Polygonzügen. Die Funktionen  $\phi_k$  sind differenzierbar,  $\varphi_n$  nicht. Die Funktionen  $\phi_k$  heißen auch **sukzessive Approximationen** und die Bedingung (L) **Lipschitz-Bedingung**.

**Satz 7.4 (Verhalten n.-f. Lösungen)** Sei  $(I, y)$  mit offenem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine n.-f. Lösung des DGLS  $y' = f(x, y)$ . Wenn  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion und  $K \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) Menge mit  $K \subseteq G$  sind, dann kann der Graph von  $y$ , falls er in  $G$  liegt, nicht ganz in  $K$  liegen.

## 7.1 Historische Einbettung

Der Satz von Peano wurde im Jahr 1890 veröffentlicht (für DGLS, auch mit Aussage über Eindeutigkeit). Der Satz von Osgood für DGL erschien im Jahr 1898 (und beinhaltet auch eine Aussage über Existenz). Die Arbeit von Picard erschien im Jahr 1890 und die von Lindelöf im 1894. Die Polygonzüge hat Euler schon im Jahr 1768 formuliert und Cauchy hat im Jahr 1824 eine Aussage über Existenz und Eindeutigkeit (unter stärkeren Bedingungen als Peano bzw. Osgood) veröffentlicht. Der Satz von Picard und Lindelöf heißt auch Satz von Cauchy und Lipschitz.

# 8 Verlauf der Epidemiekurven im SIR-Modell

**Beispiel B.2** Gegeben sind zwei positive Konstanten  $k$  und  $l$ . Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} S'(t) &= -k \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= k \cdot S(t) \cdot I(t) - l \cdot I(t) \\ R'(t) &= l \cdot I(t) \end{cases} \quad \text{für } t \in (0, +\infty) \quad (8.1)$$

für die gesuchten stetigen Funktionen  $S, I$  und  $R : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit gegebenen Anfangswerten  $s_0, i_0$  und  $r_0$  an der Stelle 0. Die Variable  $t$  bezeichnet die Zeit,  $S(t)$  den Anteil der Anfälligen,  $I(t)$  der Infizierten und  $R(t)$  der Genesenen in der Population in der Zeit  $t$ .

Mit den Bezeichnungen

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f \left( x, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -k \cdot y_1 \cdot y_2 \\ k \cdot y_1 \cdot y_2 - l \cdot y_2 \\ l \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

ist  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Abbildung und das SIR-Modell ist ein Anfangswertproblem für das DGLS  $y' = f(x, y)$ . Gesucht ist die Funktion  $y : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die stetig und eine Lösung des DGLS auf  $(0, +\infty)$  ist.  $\square$

## 8.1 Theoretische Vorbereitung

Wir stellen fest, dass  $f$  stetig auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  ist (Polynomfunktion). Damit ist der Satz von Peano anwendbar und folglich hat der zugehörige Anfangswertproblem mindestens eine Lösung auf einem Intervall, der 0 enthält. Zunächst werden wir beweisen, dass  $f$  die Eigenschaft (L) hat. Damit folgt aus dem Satz von Osgood, dass das Anfangswertproblem nicht mehr als eine Lösung haben kann.

**Satz 8.1** Für jedes  $R > 0$  und  $T > 0$  existiert (mindestens) ein  $K > 0$  so, dass

$$\forall x \in [0, T] \quad \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } \|y\| \leq R, \|\tilde{y}\| \leq R \quad \text{gilt: } \|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq K \cdot \|y - \tilde{y}\| .$$

**Beweis** Nach der Definition der Euklidischen Norm ist

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|^2 = \underbrace{(-ky_1y_2 + k\tilde{y}_1\tilde{y}_2)^2}_{I_1} + \underbrace{(ky_1y_2 - ly_2 - k\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + l\tilde{y}_2)^2}_{I_2} + \underbrace{(ly_2 - l\tilde{y}_2)^2}_{I_3},$$

wo wir die einzelnen Terme abschätzen. Offensichtlich ist

$$I_3 = l^2(y_2 - \tilde{y}_2)^2 \leq l^2\|y - \tilde{y}\|^2.$$

Mit Hilfe der Ungleichung  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  ist

$$\begin{aligned} I_1 &= (-ky_1y_2 + k\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + ky_1\tilde{y}_2 - ky_1\tilde{y}_2)^2 = (ky_1(-y_2 + \tilde{y}_2) + k\tilde{y}_2(\tilde{y}_1 - y_1))^2 \\ &\leq 2(k^2y_1^2(-y_2 + \tilde{y}_2)^2 + k^2\tilde{y}_2^2(\tilde{y}_1 - y_1)^2) \leq 2(k^2R^2\|y - \tilde{y}\|^2 + k^2R^2\|y - \tilde{y}\|^2) \\ &= 4k^2R^2\|y - \tilde{y}\|^2. \end{aligned}$$

Ähnlich, und mit der Hilfe der Dreiecksungleichung und der Monotonie der Quadratfunktion auf  $[0, +\infty)$  ist

$$\begin{aligned} I_2 &= (|(ky_1y_2 - k\tilde{y}_1\tilde{y}_2) + (l\tilde{y}_2 - ly_2)|)^2 \leq (|ky_1y_2 - k\tilde{y}_1\tilde{y}_2| + |l\tilde{y}_2 - ly_2|)^2 \\ &\leq 2(|ky_1y_2 - k\tilde{y}_1\tilde{y}_2|^2 + |l\tilde{y}_2 - ly_2|^2) \leq 2(4k^2R^2\|y - \tilde{y}\|^2 + l^2\|\tilde{y} - y\|^2) \\ &= 2(4k^2R^2 + l^2)\|y - \tilde{y}\|^2. \end{aligned}$$

Aufsummiert folgt

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq K \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

mit der Konstante  $K = \sqrt{4k^2R^2 + 2(4k^2R^2 + l^2) + l^2}$ , die von  $R$  abhängt.  $\square$

**Satz 8.2** Wenn  $y$  eine Lösung auf einem Intervall  $J$  ist, dann ist die Funktion  $e : x \mapsto y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$ ,  $x \in J$ , konstant.

**Beweis**  $e$  ist differenzierbar, und da  $y$  Lösung des DGLS ist, gilt

$$e'(x) = y_1'(x) + y_2'(x) + y_3'(x) = -ky_1(x)y_2(x) + ky_1(x)y_2(x) - ly_2(x) + ly_2(x) = 0$$

für alle  $x \in J$ . Da  $J$  ein Intervall ist, ist  $e$  somit konstant.  $\square$

Diese Aussage umformuliert impliziert, dass die Menge

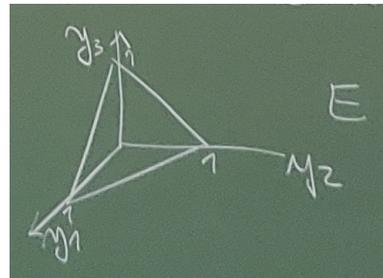
$$E = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 1\}$$

(eine Ebene im Raum) **invariant unter der Lösung des DGLS** in folgendem Sinne ist:

$$y(0) \in E \Rightarrow \forall x \in J y(x) \in E$$

für jede Lösung  $y$  auf  $J$  mit  $0 \in J$ .

Abbildung 8.1: Die Menge  $E$ .



**Satz 8.3** Die Menge  $P$  ist invariant, wobei

$$P = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0\} .$$

**Beweis** Wir führen den Beweis mit Widerspruch und nehmen an, dass die Lösung  $y$  die Menge  $P$  verlässt. Dann verlässt sie  $P$  in irgendeinem  $t_1 \in J$  über den Rand von  $P$ . Der Rand von  $P$  besteht aus drei Oberflächen, nach welchen wir die Fallunterscheidung machen.

Fall 1:  $y_2(t_1) = 0$ . Die Funktion  $\tilde{y}$  definiert durch

$$\tilde{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(t_1) \\ 0 \\ y_3(t_1) \end{pmatrix} \text{ für } x \in \mathbb{R} ,$$

ist offensichtlich Lösung auf  $\mathbb{R}$ . Wegen der Eindeutigkeit ist  $y = \tilde{y}$  in einer Umgebung von  $t_1$ . Da  $\tilde{y}$  offensichtlich  $P$  nicht verlässt, führt dieser Fall zum Widerspruch.

Fall 2:  $y_1(t_1) = 0$ . Wir konstruieren wieder eine Lösung. Diesmal ist sie komplizierter (man löst die zweite DGL für  $y_1 = 0$ , setzt ihre Lösung in die dritte DGL ein und löst diese):

$$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2(t_1)e^{-l(x-t_1)} \\ y_3(t_1) + \int_{t_1}^x ly_2(t_1)e^{-l\xi}d\xi \end{pmatrix} \text{ für } x \in \mathbb{R} .$$

Auch direkt kann nachgewiesen werden, dass  $\bar{y}$  eine Lösung ist. Außerdem kann man direkt nachweisen, dass  $\bar{y}$  die Menge  $P$  nicht verlässt. Aus der Eindeutigkeit folgt, dass  $y$  mit  $\bar{y}$  in einer Umgebung von  $t_1$  übereinstimmt, was zum Widerspruch führt.

Fall 3:  $y_3(t_1) = 0$ . Wir können weiter voraussetzen, dass  $y_2(t_1) > 0$  und  $y_1(t_1) > 0$ , da wir sonst in den ersten zwei Fällen wären. Da  $y_2$  stetig ist, existiert eine Umgebung  $U$  von  $t_1$  so, dass  $y_2(x) > 0$  für alle  $x \in U$  ist. Da  $y$  die Menge  $P$  verlässt, existiert ein  $t_2 > t_1$  so, dass  $y_3(t_2) < 0$  und  $t_2 \in U$ . Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet auf die Funktion  $y_3$  auf dem Intervall  $[t_1, t_2]$  existiert ein  $\xi$  zwischen  $t_1$  und  $t_2$  mit

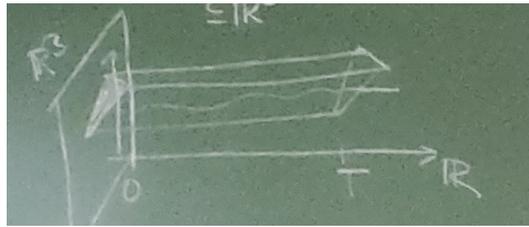
$$ly_2(\xi) = y_3'(\xi) = \frac{y_3(t_2) - y_3(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{y_3(t_2)}{t_2 - t_1} < 0 .$$

Es folgt  $y_2(\xi) < 0$ , was zum Widerspruch führt, da  $\xi \in U$  ist. □

**Satz 8.4** Wenn  $(J, y)$  eine n.-f. Lösung mit  $0 \in J$  ist, dann ist  $y$  Lösung auch auf  $(0, +\infty)$ .

**Beweis** Sei  $T > 0$  und wir betrachten die Menge  $[0, T] \times (P \cap E)$ , die als Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  abgeschlossen und beschränkt ist. Nach dem Satz über das Verhalten von n.-f. Lösungen ( $f$  ist stetig) verlässt jede n.-f. Lösung  $(J, y)$  diese Menge. Aus der Invarianz der Mengen  $P$  und  $E$  folgt, dass  $y$  diese Menge nicht über ihren Mantelfläche verlassen kann. Somit muss  $y$  diese Menge über  $\{T\} \times P \cap E$  verlassen.

Abbildung 8.2: Verlassen der kompakten Menge.



Das impliziert  $[0, T] \subseteq J$ . Da  $T$  beliebig war, folgt daraus, dass  $[0, +\infty) \subseteq J$  ist.  $\square$

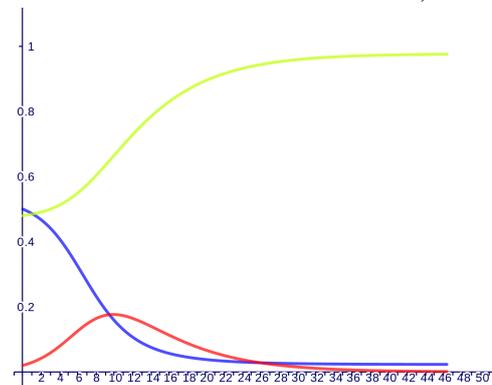
## 8.2 Numerische Lösung

Zusammengefasst, eine Lösung des Anfangswertproblems für das SIR-Modell existiert, ist eindeutig und global. Außerdem sind für jedes  $T > 0$  die Eulersche Polygonzüge auf  $[0, T]$  Approximationen der eindeutigen Lösung. Damit ist sichergestellt, dass numerische Methoden angewendet werden dürfen und Approximation der echten Lösung liefern.

Die Abbildung wurde für  $k = 3$ ,  $l = \frac{1}{3}$ ,  $r_0 = 0$ ,  $i_0 = 0.1$  auf dem Zeitintervall  $[0, 50]$  mit GeoGebra erstellt. Blau ist für  $S$  (Anfällige), rot für  $I$  (Infizierte) und grün für  $R$  (Genesene) verwendet.

Die Epidemiekurven auf der Abbildung 1.2 entsprechen vermutlich dem Verlauf der roten Linie (für zwei verschiedene Werte  $k$ ).

Abbildung 8.3: Epidemiekurve numerisch berechnet (rot ist die Anzahl der Infizierten)



## 8.3 Analytische Lösung

Wir werden hier den Verlauf der Graphen der Funktionen  $S$ ,  $I$  und  $R$  analytisch per Hand herleiten.

Seien  $s_0 \geq 0$ ,  $i_0 \geq 0$  und  $r_0 \geq 0$  gegeben mit  $s_0 + i_0 + r_0 = 1$ , die die Anteile der Anzahl der Anfälligen ( $S$ ), Infizierten ( $I$ ) und Genesenen ( $R$ ) in einer Population am Anfang der Epidemie bezeichnen und sei  $(S, I, R) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  die (einzige) Lösung des DGLS (8.1) mit  $(S(0), I(0), R(0)) = (s_0, i_0, r_0)$ .

Für die weiteren Rechnungen nehmen wir an, dass  $s_0 > 0$ . Im Fall  $s_0 = 0$  gilt nämlich für die (eindeutige) Lösung, dass  $S(t) = 0$  und  $I(t) = i_0 e^{-lt}$  für alle  $t \geq 0$  und es gibt nichts zu untersuchen. Auch  $i_0 > 0$  können wir von Anfang an voraussetzen (für  $i_0 = 0$  gilt  $I(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ ).

Satz 8.2 impliziert, dass für alle  $t \geq 0$  gilt  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ . Folglich kann  $R$  aus  $S$  und  $I$  durch  $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$  berechnet werden. Das DGLS von drei Gleichungen kann somit auf das DGLS von zwei Gleichungen

$$\begin{cases} S' = -kSI \\ I' = kSI - lI \end{cases} \quad (8.2)$$

reduziert werden: wenn  $(S, I, R)$  eine Lösung von (8.1) ist, dann ist  $(S, I)$  eine Lösung von (8.2); wenn  $(S, I)$  eine Lösung von (8.2) ist und  $R$  wie oben aus  $S$  und  $I$  berechnet ist, dann ist  $(S, I, R)$  eine Lösung von (8.1).

**Satz 8.5** Die Funktion  $m$  definiert durch  $m(t) = S(t) + I(t) - \frac{l}{k} \ln(S(t))$  für  $t \geq 0$  ist konstant auf  $[0, +\infty)$ .

**Beweis** Zuerst ist festzustellen, dass  $m$  wohldefiniert ist. Das folgt daraus, dass  $P$  invariant und  $S(0) > 0$  ist. Weiter ist  $m$  differenzierbar und mit den Regeln der Differentialrechnung und aus den Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} m'(t) &= S'(t) + I'(t) - \frac{l}{k} \frac{1}{S(t)} S'(t) \\ &= -kS(t)I(t) + kS(t)I(t) - lI(t) - \frac{l}{k} \frac{1}{S(t)} \cdot (-kS(t)I(t)) = 0. \end{aligned}$$

□

Dieser Satz impliziert, dass  $I(t) = s_0 + i_0 - \frac{l}{k} \ln(s_0) - S(t) + \frac{l}{k} \ln(S(t))$  für  $t \geq 0$  gilt. Somit kann das DGLS (8.2) von zwei Gleichungen auf eine DGL (DGLS mit einer Gleichung) reduziert werden:

$$\begin{cases} S' = -k \cdot S \cdot (s_0 + i_0 - \frac{l}{k} \ln(s_0) - S + \frac{l}{k} \ln(S)) \end{cases} \quad (8.3)$$

Diese DGL kann mit der Methode TdV genauso wie das Beispiel B.4 betrachtet werden.

Die Untersuchung der Hilfsfunktion  $\tilde{g}$  definiert durch

$$\tilde{g}(s) = s_0 + i_0 - \frac{l}{k} \ln(s_0) - s + \frac{l}{k} \ln(s) \text{ für } s > 0$$

zeigt, dass  $\tilde{g}$  genau zwei Nullstellen hat. Man betrachtet  $\tilde{g}'(s) = -1 + \frac{l}{s}$  und das Monotonieverhalten von  $\tilde{g}$ . Eine Nullstelle hat  $\tilde{g}$  im Intervall  $(0, \frac{l}{k})$  genannt  $z_1$ , und eine im Intervall  $(\frac{l}{k}, +\infty)$ , genannt  $z_2$ . Außerdem ist  $\tilde{g}$  auf dem Intervall  $(z_1, z_2)$  positiv. Wir schreiben die DGL (8.3) als

$$S' = -kS\tilde{g}(S) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{-kS\tilde{g}(S)} \cdot S' = 1$$

um, bezeichnen  $h(z) = \frac{1}{-kz\tilde{g}(z)}$  und  $f(z) = 1$ , bestimmen die Stammfunktionen  $H$  zu  $h$  und  $F$  zu  $f$  und untersuchen ihren Verlauf.

## 8 Verlauf der Epidemiekurven im SIR-Modell

Nebenrechnung: Wir zeigen, dass  $s_0 \in (z_1, z_2)$  ist. Wenn  $s_0 \leq z_1$  wäre, dann (denn  $\tilde{g}$  ist auf  $(0, \frac{l}{k})$  monoton wachsend) gälte

$$i_0 = s_0 + i_0 - \frac{l}{k} \ln(s_0) - s_0 + \frac{l}{k} \ln(s_0) = \tilde{g}(s_0) \leq \tilde{g}(z_1) = 0 .$$

Somit wäre  $i_0 \leq 0$ , ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung  $i_0 > 0$ . Deshalb ist  $s_0 > z_1$ . Ähnlich zeigt man, dass  $s_0 < z_2$  ist.

Wir setzen  $H(z) = \int_{s_0}^z h$  für  $z \in (z_1, z_2)$  (diese Funktion  $H$  ist wohldefiniert, denn  $h$  ist stetig in  $(z_1, z_2)$ ). Da  $H' = h$  und  $h < 0$  auf  $(z_1, z_2)$  ist, ist  $H$  streng monoton fallend. Außerdem ist  $H(s_0) = 0$ .

Abbildung 8.4: Verlauf von  $\tilde{g}$

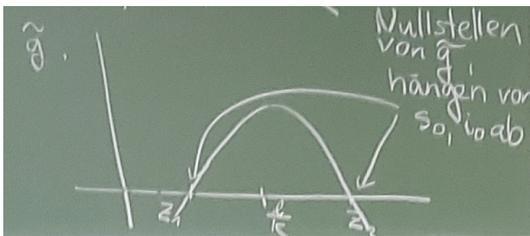
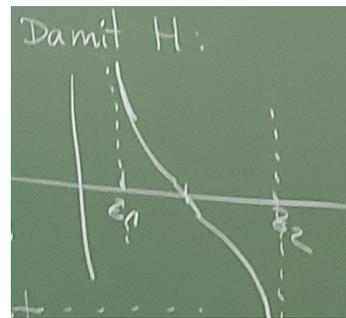


Abbildung 8.5: Verlauf von  $H$



Wir untersuchen noch den Verlauf von  $H$  an den Randpunkten seines Definitionsbereiches. Konkreter, es interessiert uns, ob der Flächeninhalt unter dem Graphen von  $h$  endlich oder unendlich ist. Zu bestimmen ist

$$\begin{aligned} \lim_{z \searrow z_1} H(z) &= \lim_{z \searrow z_1} \int_{s_0}^z \frac{1}{-k\sigma \left( s_0 + i_0 - \frac{l}{k} \ln(s_0) - \sigma + \frac{l}{k} \ln(\sigma) \right)} d\sigma \\ &= \lim_{z \searrow z_1} \int_{s_0}^z \frac{1}{-k\sigma \tilde{g}(\sigma)} d\sigma . \end{aligned}$$

Da dieses Integral nicht explizit berechnet werden kann, wird die Funktion  $\tilde{g}$  mit der Summe ihres Taylorpolynoms erster Ordnung in  $z_1$  und ihres Restterms in der Lagrange-Darstellung ersetzt ( $\tilde{g}$  ist zweimal stetig differenzierbar in der Umgebung von  $z_1$ ): für jedes  $\sigma$  in einer Umgebung von  $z_1$  existiert (mindestens) ein  $\xi_\sigma$  zwischen  $\sigma$  und  $z_1$  so, dass

$$\tilde{g}(\sigma) = \tilde{g}(z_1) + \tilde{g}'(z_1)(\sigma - z_1) + \frac{\tilde{g}''(\xi_\sigma)}{2}(\sigma - z_1)^2 = (\sigma - z_1) \left( \tilde{g}'(z_1) + \frac{\tilde{g}''(\xi_\sigma)}{2}(\sigma - z_1) \right) ,$$

da  $z_1$  Nullstelle von  $\tilde{g}$  ist. Weiter ist  $\tilde{g}'(\sigma) = -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{\sigma}$  für  $\sigma > 0$  und somit  $\tilde{g}'(z_1) = -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1}$ . Da  $z_1 < \frac{l}{k}$  ist, gilt  $-1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} > 0$ . Da  $\tilde{g}''$  stetig und somit beschränkt auf einer Umgebung von  $z_1$  ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$  so, dass

$$\forall \sigma \in [z_1, z_1 + \varepsilon) \quad \left| \frac{\tilde{g}''(\xi_\sigma)}{2}(\sigma - z_1) \right| < \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right) .$$

Folglich gelten für alle  $\sigma \in [z_1, z_1 + \varepsilon)$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(z_1) + \frac{\tilde{g}''(\xi_\sigma)}{2}(\sigma - z_1) &\geq \tilde{g}'(z_1) - \left| \frac{\tilde{g}''(\xi_\sigma)}{2}(\sigma - z_1) \right| \\ &> \tilde{g}'(z_1) - \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right) > 0, \\ \tilde{g}'(z_1) + \frac{\tilde{g}''(\xi_\sigma)}{2}(\sigma - z_1) &\leq \tilde{g}'(z_1) + \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right) = \frac{3}{2} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right). \end{aligned}$$

Somit können wir den Integranden für  $\sigma \in [z_1, z_1 + \varepsilon)$  wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{k\sigma\tilde{g}(\sigma)} &= \frac{1}{k\sigma(\sigma - z_1) \left( \tilde{g}'(z_1) + \frac{\tilde{g}''(\xi_\sigma)}{2} \cdot (\sigma - z_1) \right)} \\ &\geq \frac{1}{k(z_1 + \varepsilon)(\sigma - z_1)^{\frac{3}{2}} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right)} \end{aligned}$$

und für  $z \in (z_1, z_1 + \varepsilon)$  das Integral wie folgt

$$\begin{aligned} \int_z^{z_1+\varepsilon} \frac{1}{k\sigma\tilde{g}(\sigma)} d\sigma &\geq \int_z^{z_1+\varepsilon} \frac{1}{\sigma - z_1} d\sigma \frac{1}{k(z_1 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right)} \\ &= (\ln(\varepsilon) - \ln(z - z_1)) \frac{1}{k(z_1 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right)} \end{aligned}$$

abschätzen. Da  $\lim_{z \searrow z_1} \ln(z - z_1) = -\infty$  und  $\frac{1}{k(z_1 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}} \left( -1 + \frac{l}{k} \frac{1}{z_1} \right)} > 0$ , folgt daraus, dass  $\lim_{z \searrow z_1} \int_z^{z_1+\varepsilon} \frac{1}{k\sigma\tilde{g}(\sigma)} d\sigma = +\infty$ . Somit können wir schreiben

$$\begin{aligned} \lim_{z \searrow z_1} H(z) &= \lim_{z \searrow z_1} \int_{s_0}^z \frac{1}{-k\sigma\tilde{g}(\sigma)} d\sigma \\ &= \lim_{z \searrow z_1} \int_z^{z_1+\varepsilon} \frac{1}{k\sigma\tilde{g}(\sigma)} d\sigma + \int_{z_1+\varepsilon}^{s_0} \frac{1}{k\sigma\tilde{g}(\sigma)} d\sigma = +\infty. \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man, dass  $\lim_{z \nearrow z_2} H(z) = -\infty$  ist und der Verlauf von  $H$  ist somit bekannt. Insbesondere ist  $H$  eine bijektive Abbildung von  $(z_1, z_2)$  auf  $\mathbb{R}$  (Zwischenwertsatz,  $H$  ist stetig) und die inverse Abbildung  $H^{-1}$  ist bijektiv von  $\mathbb{R}$  auf  $(z_1, z_2)$ .

Bezeichnet  $F(z) = z$  für  $z \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion zu  $f$ , ist nach dem Satz über TdV  $S = H^{-1} \circ F = H^{-1}$  die Lösung der DGL (8.3). Diese Funktion bildet  $\mathbb{R}$  bijektiv und streng monoton fallend auf  $(z_1, z_2)$  ab.

Insbesondere folgt aus dem Verlauf von  $H$ , dass die Funktion  $S$  auf  $[0, +\infty)$  streng monoton fallend ist,  $S(0) = s_0$  und dass  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = z_1$  ist. Dabei ist  $z_1 > 0$ . Wir können den Verlauf der Funktion  $S$  skizzieren, siehe Abbildung 8.6.

## 8 Verlauf der Epidemiekurven im SIR-Modell

Den Verlauf der Funktion  $I$  auf  $[0, +\infty)$  bekommen wir aus der Gleichheit

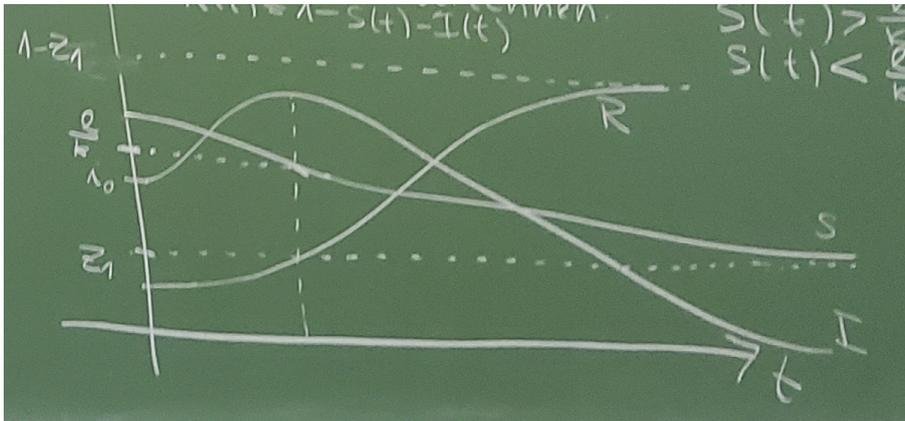
$$I(t) = s_0 + i_0 - \frac{l}{k} \ln(s_0 - S(t)) + \frac{l}{k} \ln(S(t)) = (\tilde{g} \circ S)(t) \text{ für } t \geq 0 .$$

Der Grenzwert ist  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \tilde{g}(z_1) = 0$ . Für das Monotonieverhalten sind zwei Fälle zu beachten.

1. Fall:  $s_0 \leq \frac{l}{k}$ . Für  $t > 0$  ist hier  $S(t) < S(0) = s_0 \leq \frac{l}{k}$ . Da  $\tilde{g}$  auf  $(0, \frac{l}{k})$  streng monoton wachsend ist, ist  $I$  auf  $[0, +\infty)$  streng monoton fallend.
2. Fall:  $s_0 > \frac{l}{k}$ . Da  $\frac{l}{k} > z_1$ , folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz eines  $t_c > 0$  mit  $S(t_c) = \frac{l}{k}$ . Aus dem Monotonieverhalten von  $S$  folgt, dass dieses  $t_c$  eindeutig ist, dass  $S(t) > \frac{l}{k}$  für  $t \in (0, t_c)$  und  $S(t) < \frac{l}{k}$  für  $t \in (t_c, +\infty)$  ist. Aus dem Monotonieverhalten von  $\tilde{g}$  und der Stetigkeit von  $S$  und  $I$  in  $t_c$  folgt, dass  $I$  auf  $[0, t_c]$  streng monoton wachsend und auf  $[t_c, +\infty)$  streng monoton fallend ist. Die Skizze in diesem Fall ist auf der Abbildung 8.6 zu sehen.

Den Grenzwert von  $R$  bekommen wir aus der Gleichheit  $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$  und das Monotonieverhalten von  $R$  aus der dritten Gleichung des DGLS (8.1):  $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 1 - z_1 - 0 = 1 - z_1 < 1$ ,  $R'(t) = lI(t) > 0$  und somit ist  $R$  streng monoton wachsend auf  $[0, +\infty)$ .

Abbildung 8.6: Epidemiekurve analytisch berechnet ( $I$  ist die Anzahl der Infizierten)



Die numerischen Resultate auf der Abbildung 8.3 zeigen die gleichen Verläufe der Epidemiekurven. Die rote Kurve auf der Abbildung 8.3 sowie der Kurvenverlauf der Funktion  $I$  auf der Abbildung 8.6 bestätigen grob die Verläufe beider Kurven auf der Abbildung 1.2.

**Bemerkung** Die Bedingung  $s_0 > \frac{k}{l}$  kann als Bedingung für die Anzahl der Anfälligen (falls  $r_0 = 0$ , äquivalent als Anzahl der Infizierten) am Anfang der Epidemie (Zeit  $t = 0$ ) bei gegebenen Parametern  $k$  und  $l$  gesehen werden. Sie kann aber auch als Bedingung für

## 8 Verlauf der Epidemiekurven im SIR-Modell

die Kontaktrate  $k$  bei gegebenen Anfangswerten für die Population und bei gegebenem  $l$  (Charakteristik der Krankheit) gesehen werden. Wenn  $k < s_0 \cdot l$  (zu klein), dann wächst die Anzahl der Infizierten  $I$  bis zu einer kritischen Zeit  $t_c$ , danach fällt sie und konvergiert gegen Null. Wenn  $k > s_0 \cdot l$  (groß genug), dann fällt die Anzahl der Infizierten und konvergiert gegen 0.

Wir haben die kritische Zeit  $t_c$  nicht explizit berechnet, nur ihre Existenz gezeigt. Hätte man diese in Abhängigkeit von  $k$  untersucht, hätte man den Unterschied zwischen den zwei Kurven auf der Abbildung 1.2 herleiten können.

# 9 Differenzengleichungen

Ein **Anfangswertproblem** (kurz: **AWP**) für eine **Differenzengleichung** (**DFGL**) ist

$$g(k+1) - g(k) = h(k, g(k)) \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } g(0) = y_0,$$

wobei  $h : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Abbildung und  $y_0 \in \mathbb{R}$  eine gegebene Zahl ist. Im Gegeteil zum AWP für Differentialgleichungen, wo es im Allgemeinen weder Existenz noch Eindeutigkeit der Lösung gilt, hat jede AWP für DFGL eine eindeutige Lösung, und zwar die durch das Problem rekursiv definierte Folge  $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . (Dass ein rekursiver Vorschrift eindeutig eine Folge definiert, ist übrigens mit vollständiger Induktion zu beweisen!)

Wenn man einen Zusammenhang zwischen Differenzengleichungen (DFGL) und Differentialgleichungen (DGL) sucht, sind schon verschiedene Fragenstellungen möglich. Entweder hat man eine DGL auf  $[0, +\infty)$ , ihre Lösung bezeichnet durch  $y$  (eine Funktion), und fragt nach einer DFGL, ihre Lösung bezeichnet durch  $g$  (eine Folge), so dass für  $n \in \mathbb{N} \subseteq [0, +\infty)$ ,  $y(n) = g(n)$  gelten soll. Oder hat man eine DGL auf einem beschränkten Intervall  $[0, T]$  und fragt nach vielen DFGL so, dass für alle  $n$  gilt:  $y$  an der Stellen  $\frac{k}{n}T$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  den ersten  $n$  Folgengliedern der Lösung der  $n$ -ten DFGL entspricht. Auch umgekehrt, ausgegangen von (einer bzw. vielen) DFGL kann man nach einer passenden DGL fragen.

Tatsächlich sind bei Modellierungen in Naturwissenschaften oder Wirtschaftswissenschaften Gesetze für zeitabhängige Prozesse oft mittels DGL aufgestellt. Eine sinnvoll zugeordnete DGL ist eine Abstrahierung. Eine bzw. viele sinnvoll zugeordnete DFGL sind eine Vereinfachung. Der Vorteil der DGL gegenüber DFGL ist, dass man die abstrakte DGL mittels der Analysis oft eleganter bearbeiten kann, als die DFGL. Der Vorteil der DFGL gegenüber der DGL ist, dass man sich nicht Gedanken über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung machen muss.

## 9.1 Eulersche Polygonzüge einer DGL versus DFGL

Wir starten zuerst mit einer DGL auf einem fixierten Intervall  $[0, T]$ :

$$y' = f(x, y) \text{ auf } (0, T) \text{ mit } y(0) = y_0$$

(strickt gesehen sucht man eine Lösung  $y : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  der DGL, die stetig auf  $[0, T]$  fortgesetzt werden kann und diese Fortsetzung den Anfangswert erfüllt).

Sei  $n \in \mathbb{N}$  für eine Weile auch fixiert. Wir konstruieren den Polygonzug an gleichverteilten Stützstellen  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ : bezeichne  $h = \frac{T}{n}$ ,  $x_i = 0 + i \cdot h = i \frac{T}{n}$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ .

## 9 Differenzgleichungen

Die Werte des Polygonzuges in  $x_i$ , bezeichnet durch  $y_i$ , sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= f(x_i, y_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) + y_i = f\left(i \cdot \frac{T}{n}, y_i\right) \cdot \left((i+1)\frac{T}{n} - i\frac{T}{n}\right) + y_i \\ &= f\left(i\frac{T}{n}, y_i\right) \frac{T}{n} + y_i \text{ für } i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung  $\tilde{h}(k, z) = f\left(k\frac{T}{n}, z\right) \cdot \frac{T}{n}$  ist  $\tilde{h} : \{0, 1, \dots, n\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Eigentlich ist  $\tilde{h}$  von dem Parameter  $n$  abhängig. Wir erweitern diese Funktion beliebig auf eine Abbildung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ . Beliebiger, weil die Werte in  $(k, z)$  für  $k > n$  für unsere ursprüngliche Aufgabe irrelevant werden. Man kann folgendes AWP für DFGL formulieren:

$$g(k+1) - g(k) = \tilde{h}(k, g(k)) \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } g(0) = y_0.$$

Da aus dem Oberen

$$y_{i+1} - y_i = \tilde{h}(i, y_i) \text{ für } i = 0, 1, \dots, n$$

folgt, und da jedes AWP für DFGL eine einzige Lösung hat (die rekursiv definierte Folge) folgt, dass für die Lösung  $g$  der DFGL gilt  $g(k) = y_k$  für  $k = 0, 1, \dots, n$ . Mit Worten: Die Werte des Eulerschen Polygonzuges an gleichabständigen Stützstellen sind genau die ersten  $n$  Folgenglieder der Lösung einer zugeordneten DFGL. (Die weiteren Folgenglieder haben mit der DGL nichts zu tun.)

Nun ändern wir  $n$ , somit die DFGL und auch seine Lösung. Bezeichnen wir deshalb die rechte Seite mit  $\tilde{h}_n$  (statt  $\tilde{h}$ ) und die Lösung mit  $g_n$  (statt  $g$ ).

Wenn  $f$  sowohl die Voraussetzung des Satzes von Peano (Stetigkeit) wie auch die Voraussetzungen des Satzes von Osgood erfüllt, dann hat das ursprüngliche AWP für die DGL eine eindeutige Lösung und die Eulerschen Polygonzüge konvergieren bei  $n \rightarrow \infty$  gegen die Lösung des AWP für die DGL, gleichmäßig auf  $[0, T]$ . Insbesondere an der Stelle  $T$ , d.h. wir können aussagen, dass

$$\lim_n g_n(n) = y(T).$$

Allgemeiner, auch an der Stelle  $t = \frac{p}{q}T$ , wobei  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $p < q$  ist. Da  $\frac{p}{q}T = \frac{pm}{qm}T$  für  $m \in \mathbb{N}$  gilt, ist somit

$$\lim_m g_{qm}(pm) = y(t).$$

Somit kann man Werte der Lösung einer DGL durch Lösungen von DFGL approximieren.

Abbildung 9.1: Polygonzug auf  $[0, T]$ .

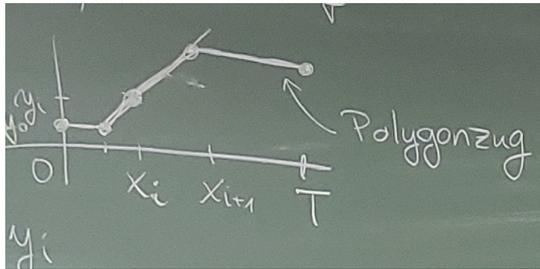
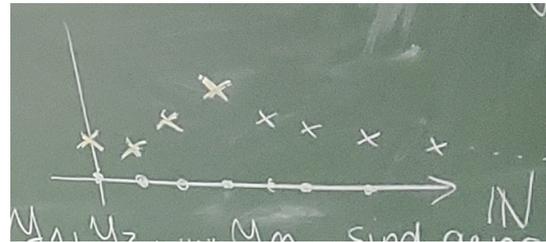


Abbildung 9.2: Lösung der DFGL.



Zusammengefasst: zu einer DGL haben wir ein Schar (von dem Parameter  $n$  abhängige Menge) von DFGL aufgestellt und bei zusätzlicher Information ist die Lösung der DGL approximiert durch die ersten  $n$  Folgenglieder der Lösung der  $n$ -ten DFGL.

Fangen wir jetzt mit einer Schar von DFGL an, d.h. für jeden Wert des Parameters  $n \in \mathbb{N}$  hat man ein AWP für eine DFGL

$$g(k+1) - g(k) = \tilde{h}_n(k, g(k)) \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } g(0) = y_0 .$$

Wir haben angenommen, dass die Funktion  $\tilde{h}_n$  an der rechten Seite vom Parameter  $n$  abhängt, aber die Anfangsbedingung  $y_0$  nicht. Damit haben wir für jeden Parameter  $n$  eine eindeutige Lösung (Folge), welche im Folgenden durch  $g_n$  bezeichnet wird. Der Parameter  $n$  kann z.B. beschreiben, dass für den zeitabhängigen Prozess die betrachtete Zeitintervalle immer kürzer werden, also  $n = 1$  könnte einem Jahr,  $n = 12$  einem Monat,  $n = 365$  einem Tag usw. entsprechen. Ob es zu einer solchen Schar von DFGL überhaupt eine sinnvoll zugeordnete DGL gibt, hängt von der Struktur der rechten Seite ab. Außerdem muss diese DGL nicht eindeutig sein. Mit Sinnvoll ist hier gemeint, dass die Werte der zugehörigen Eulerschen Polygonzüge an gleichabständig verteilten Stützstellen mit den ersten  $n$  Folgengliedern der Lösung der  $n$ -ten DFGL übereinstimmen.

# 10 Modellierung

## 10.1 Wachstumsmodelle

Bezeichne  $u(t)$  eine Größe in der Zeit  $t \geq 0$ , die sich nach einem bestimmten Gesetz entwickelt. Sei dieses Gesetz wie folgt formuliert: Der absolute Zuwachs der Größe über einem Zeitintervall  $[t, t + \tau]$  der Länge  $\tau > 0$  (also  $u(t + \tau) - u(t)$ ) ist proportional zu der Länge  $\tau$  mit einer Proportionalitätskonstante, welche selber proportional zu der Größe am Anfang des Zeitintervalles (also zu  $u(t)$ ) ist mit der Proportionalitätskonstante, die nicht mehr von  $\tau, t, u(t)$ , abhängt. Bezeichne  $\alpha$  diese (letzte) Proportionalitätskonstante. Dann ist das gerade gesagte wie folgt formal ausgedrückt:

$$u(t + \tau) - u(t) = \alpha \cdot u(t) \cdot \tau \text{ für } t \geq 0 \text{ und } \tau > 0 .$$

Zusätzlich ist  $u(0) = y_0$  gegeben. Ob eine Funktion  $u$  mit diesen Eigenschaften existiert, ist a-priori nicht klar.

Fixieren wir jetzt  $T > 0$ , welches sich nicht mehr ändern wird. Sei  $n \in \mathbb{N}$  für eine Weile ebenso fixiert (wird sich aber später ändern). Zu diesem  $n$  definieren wir  $\tau = \frac{T}{n}$  und betrachten die Zeitintervalle  $[k \cdot \tau, k \cdot \tau + \tau]$  der Länge  $\tau$ , für  $k \in \mathbb{N}$ . Wenn eine Funktion  $u$  dieses Gesetz erfüllt, dann gilt insbesondere

$$u((k + 1)\tau) - u(k\tau) = \alpha u(k\tau)\tau \text{ für } k \in \mathbb{N} .$$

Stellen wir nun die DFGL

$$g(k + 1) - g(k) = \alpha g(k)\tau \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } g(0) = y_0$$

auf (die rechte Seite ist also  $h(k, z) = \alpha z\tau$ ), sehen wir (da  $(u(k\tau))_{k \in \mathbb{N}}$  Lösung ist und da es eine eindeutige Lösung gibt), dass die Lösung  $g$  des AWP, für die DFGL  $g(k) = u(k\tau)$  für  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt. Somit haben wir zu dem Gesetz eine (für  $n$  fixiert), beziehungsweise viele (für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ) DFGL zugeordnet.

Betrachten wir wieder das Gesetz und nehmen an, dass eine Funktion  $u$  es erfüllt. Nehmen wir zusätzlich an, dass  $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. Dann gelten für  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \searrow 0} \frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} &= \lim_{\tau \searrow 0} \alpha \cdot u(t) = \alpha \cdot u(t) \quad \text{und} \\ \lim_{\tau \nearrow 0} \frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} &= \lim_{\tau \nearrow 0} \frac{u(t) - u(t + \tau)}{-\tau} = \lim_{\tau \nearrow 0} \frac{\alpha \cdot u(t + \tau) \cdot (-\tau)}{-\tau} \\ &= \alpha \cdot \lim_{\tau \nearrow 0} u(t + \tau) = \alpha u(t) . \end{aligned}$$

Folglich ist  $u$  in  $t$  differenzierbar mit  $u'(t) = \alpha \cdot u(t)$ . Stellen wir nun die DGL

$$y' = \alpha y \text{ auf } [0, \infty) \text{ mit } y(0) = y_0$$

auf, sehen wir, dass  $u$  Lösung dieses Problems ist. Somit haben wir zu dem Gesetz eine DGL zugeordnet.

Nun können wir als Lösung der durch dem Gesetz formulierten Aufgabe entweder die Lösung einer aufgestellten DFGL oder die Lösung der aufgestellten DGL ansehen. Beide Probleme sind analytisch lösbar.

**Lösung der DFGL für fixierte  $n$**  In diesem Beispiel ist die DFGL so einfach, dass man die Lösung direkt hinschreiben kann (bzw. man kann mit vollständiger Induktion beweisen, dass die aufgeschriebene Folge eine Lösung ist; es ist nichts anderes, als eine rekursiv bzw. direkt angegebene geometrische Folge). Schreibe zunächst das Problem als

$$g(k+1) = (1 + \alpha\tau) \cdot g(k) \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } g(0) = y_0$$

und dann die Lösung auf (wir kennzeichnen die Abhängigkeit von  $n$ )

$$g_n(k) = (1 + \alpha \cdot \tau)^k \cdot y_0 \text{ für } k \in \mathbb{N} .$$

Insbesondere ist

$$g_n(n) = (1 + \alpha \cdot \tau)^n \cdot y_0 \text{ und } \tau = \frac{T}{n} .$$

**Lösung der DGL** In diesem Beispiel ist auch die DGL einfach und mit TdV und aus zusätzlichen Betrachtungen folgt, dass das Problem eine eindeutige Lösung hat, und zwar die Funktion  $y$  gegeben durch

$$y(x) = e^{\alpha x} \text{ für } x \in [0, +\infty) .$$

Auch ohne Hinweis (wie im Abschnitt 9.1 im allgemeinen Fall) auf Peano, Osgood und Eulersche Polygonzüge können wir hier direkt nachrechnen, dass

$$\lim_n g_n(n) = \lim_n \left( 1 + \frac{\alpha \cdot T}{n} \right)^n \cdot y_0 = e^{\alpha T} = y(T) .$$

**Zusammenfassung** Wir haben für das Wachstumsgesetz sowohl ein Modell mit DGL wie auch mit (vielen) DFGL aufgestellt und beide gelöst. Für dieses Beispiel gilt, dass die Lösung der DGL an der Stelle  $T$  der Grenzwert des  $n$ -ten Folgengliedes der Lösung der  $n$ -ten DFGL ist. Wachstum nach dem hier betrachteten Gesetz heißt exponentielles Wachstum.

## 10.2 Zinsmodelle

Bezeichne  $g(n)$  das Kapital nach  $n$  Zeiteinheiten (Jahr oder kleinere Unterteilungen, z.B. Tag),  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , und sei  $g(0) = y_0$  gegeben. Die Frage ist, nach einem bestimmten Verzinsungsmodell, wie groß ist das Kapital nach  $N$  Jahren? Ein allgemeines Verzinsungsmodell kann mit Hilfe einer Differenzgleichung formuliert werden:

$$g(n+1) - g(n) = \tilde{h}(n, g(n)) \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

wobei  $\tilde{h} : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine bestimmte Funktion ist. Wenn  $n$  die Anzahl der Jahre ist, ist also  $g(N)$  gefragt, wenn  $n$  die Anzahl der Tage ist, dann ist  $g(365N)$  gefragt. Um diesen Unterschied zu betonen, wird gelegentlich die Bezeichnung  $g_j$  bzw.  $g_t$  statt  $g$  verwendet; diesen Unterschied könnten wir auch bei  $\tilde{h}$  kennzeichnen, werden wir aber nicht tun. Wir besprechen sechs Verzinsungsmodelle.

**Modell I** Einfache Verzinsung, jährlicher Zinssatz, konstante Flatrate: das bedeutet  $n$  Jahre,  $\tilde{h}(k, z)$  weder von  $k$  noch von  $z$  abhängig, aber proportional zu dem Anfangskapital. Die Proportionalitätskonstante wird durch  $p$  bezeichnet und mathematisch ausgedrückt bedeutet es

$$\tilde{h}(k, z) = p \cdot g(0) \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und } z \in \mathbb{R}.$$

Da es ein jährlicher Zinssatz ist, wird die Konstante durch  $p_j$  bezeichnet. Die DFGL ist somit

$$g(n+1) = g(n) + p_j \cdot g(0) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir berechnen das Kapital nach  $N$  Jahren. Die Lösung dieser DFGL ist die arithmetische Folge (was man mit vollständiger Induktion beweisen kann)  $g_j$ ,

$$g_j(n) = g_j(0) \cdot (1 + p_j n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist das Kapital nach  $N$  Jahren

$$g_j(N) = g_j(0) \cdot (1 + p_j N) = y_0 \cdot (1 + p_j N). \quad (10.1)$$

**Modell II** Einfache Verzinsung, unterjährig (hier: täglicher) Zinssatz, konstante Flatrate, tägliche Zinsrate als Bruchteil der (also proportional zu) jährlichen Zinsrate: das bedeutet  $n$  Tage,  $p_t = \frac{1}{365} p_j$  und die DFGL (wie oben)

$$g(n+1) = g(n) + p_t \cdot g(0) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Lösung ist

$$g_t(n) = g_t(0) \cdot (1 + p_t n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Das Kapital nach  $N$  Jahren ist

$$g_t(365N) = g_t(0) \cdot (1 + p_t 365N) = y_0 \cdot (1 + \frac{1}{365} p_j \cdot 365N) = y_0 \cdot (1 + p_j N). \quad (10.2)$$

**Modell III** Einfache Verzinsung, kontinuierliches Zinssatzmodell: das ist eine Abstraktion des oberen unterjährigen Modells. Wir nehmen die Zeiteinheit etwas allgemeiner mit  $m \in \mathbb{N}$  groß,  $m \geq 365$ :

$$g(n+1) = g(n) + p \cdot g(n) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } p = \frac{1}{m} p_j$$

(Abhängigkeit von der Zeiteinheit, von  $m$ , ist nicht gekennzeichnet). Die Lösung ist

$$g(n) = g(0) \cdot (1 + p \cdot n), \quad n \in \mathbb{N},$$

insbesondere

$$g(m \cdot N) = y_0 \cdot (1 + pmN) = y_0 \cdot (1 + \frac{1}{m} p_j mN) = y_0 \cdot (1 + p_j N).$$

Gesehen als Folge der Variable  $m$ , nimmt man schließlich den Grenzwert (was hier aber keine Rolle spielt, da es eine konstante Folge ist). Das Kapital nach  $N$  Jahren ist

$$\lim_m g(mN) = \lim_m y_0 \cdot (1 + p_j N) = y_0 \cdot (1 + p_j N). \quad (10.3)$$

**Modell IV** Verzinsung mit Zinseszins, jährlicher Zinssatz, konstante Flatrate: das bedeutet  $n$  Jahre,  $\tilde{h}(k, z)$  nicht von  $k$  aber linear von  $z$  abhängig (d.h. Proportionalität zu dem aktuellen Kapital, nicht zu dem Anfangskapital). Mathematisch ausgedrückt:

$$\tilde{h}(k, z) = p_j \cdot z \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und } z \in \mathbb{R}.$$

Die DFGL ist somit

$$g(n+1) = g(n) + p_j \cdot g(n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir berechnen das Kapital nach  $N$  Jahren. Die Lösung dieser DFGL ist die geometrische Folge (was man mit vollständiger Induktion beweisen kann)  $g_j^{ZZ}$  (wir kennzeichnen, dass die Zeiteinheit in Jahren ist und dass es ein Zinseszinsmodell ist)

$$g_j^{ZZ}(n) = g_j^{ZZ}(0) \cdot (1 + p_j)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist das Kapital nach  $N$  Jahren

$$g_j^{ZZ}(N) = g_j^{ZZ}(0) \cdot (1 + p_j)^N = y_0 \cdot (1 + p_j)^N. \quad (10.4)$$

**Modell V** Verzinsung mit Zinseszins, unterjährig (hier: täglicher) Zinssatz, tägliche Zinsrate konstanter Bruchteil der jährlichen Zinsrate: das bedeutet  $n$  Tage,  $\tilde{h}(k, z)$  nicht von  $k$  aber linear von  $z$  abhängig (und Proportionalität zum aktuellen Kapital mit Proportionalitätskonstante  $p_t$ ),  $p_t = \frac{1}{365} p_j$  und damit die DFGL

$$g(n+1) = g(n) + p_t \cdot g(n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Lösung ist

$$g_t^{ZZ}(n) = g_t^{ZZ}(0) \cdot (1 + p_t)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Das Kapital nach  $N$  Jahren ist

$$g_t^{ZZ}(365N) = g_t^{ZZ}(0) \cdot (1 + p_t)^{365N} = y_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{365}p_j\right)^{365N}. \quad (10.5)$$

**Modell VI** Verzinsung mit Zinseszins, kontinuierliches Zinssatzmodell: das ist wieder die Abstraktion des oberen unterjährigen Modells mit immer kleinerer Zeiteinheit ( $m \rightarrow +\infty$ ). Wir stellen die DFGL

$$g(n+1) = g(n) + p \cdot g(n) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } p = \frac{1}{m}p_j$$

(die Abhängigkeit von der Zeiteinheit, von  $m$ , ist nicht gekennzeichnet) auf, ihre Lösung ist

$$g^{ZZ}(n) = g^{ZZ}(0) \cdot (1 + p)^n = g^{ZZ}(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{m}p_j\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

insbesondere gilt

$$g^{ZZ}(m \cdot N) = g^{ZZ}(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{m}p_j\right)^{mN} = y_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}p_j\right)^{mN}.$$

Gesehen als Folge der Variable  $m$ , nimmt man schließlich den Grenzwert:

$$\lim_m g^{ZZ}(mN) = \lim_m y_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}p_j\right)^{mN} = y_0 \cdot e^{p_j N}. \quad (10.6)$$

Das ist das Kapital nach  $N$  Jahren bei diesem Modell.

Nun vergleichen wir das Kapital nach  $N$  Jahren bei den oben beschriebenen sechs Verzinsungsmodellen, also die Zahlen in (10.1) - (10.6). Die ersten drei sind gleich und (Begründung folgt unten)

$$y_0 \cdot (1 + p_j N) < y_0 \cdot (1 + p_j)^N < y_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{365}p_j\right)^{365N} < y_0 \cdot e^{p_j N}.$$

Die ersten zwei Ungleichungen folgen aus der Bernoullischen Ungleichung ( $1 + nh \leq (1 + h)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $h > -1$ ) sowie (bei zweiter) daraus, dass die Funktion  $x \mapsto x^N$  auf  $(0, +\infty)$  streng monoton wachsend ist ( $N \in \mathbb{N}$ ). Die dritte folgt daraus, dass für jedes  $x > 0$  die Folge  $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend gegen den Grenzwert  $e^x$  konvergiert.

Das sind nicht die einzigen Verzinsungsmodelle gewesen. Naheliegender ist, dass man die Funktion  $\tilde{h}$  abhängig von der ersten Variable wählen kann (zeitabhängige Zinsrate) oder in der zweiten Variable nichtlinear wählen kann. Bei unterjährigen Modellen kann der Zusammenhang zwischen  $p_t$  und  $p_j$  auch anders festgelegt werden, zum Beispiel

## 10 Modellierung

durch ("exponentielle Proportionalität", die Logarithmen sind "linear" proportional)  
 $p_t = \sqrt[365]{1 + p_j} - 1$  oder äquivalent  $\ln(p_t + 1) = \frac{1}{365} \ln(1 + p_j)$ . Mit dieser Wahl und Verzinsung mit Zinseszins wird das Kapital nach  $N$  Jahren gleich der Zahl in (10.5) sein - das kann der interessierte Leser nachrechnen.

Abbildung 10.1: Zinsmodelle Tafelbild I

Modelle	Verzinsung einfach	Verzinsung mit Zinseszins
jährlich flatrate konstant $p$	$g^{(n+1)} = g^{(n)} + p \cdot g^{(n)}$ $n \in \mathbb{N}$	$g^{(n+1)} = g^{(n)} + p \cdot g^{(n)}$ $n \in \mathbb{N}$
unterjährlich täglich	$P_t = \frac{1}{365} p_j$ $P_t = \sqrt[365]{1 + p_j} - 1$	$g^{(n+1)} = g^{(n)} + P_t g^{(n)}$
unterjährlich allgemein	$P = \frac{1}{m} p_j$	$g^{(n+1)} = g^{(n)} + \frac{1}{m} p_j g^{(n)}$
kontinuierlich	$P_m = \frac{1}{m} p_j$ $y'(t) = P_m y(t)$ $t \geq 0$	$y'(t) = P_j y(t)$ $t \geq 0$

} DFGL  
} DGL

Abbildung 10.2: Zinsmodelle Tafelbild II

Kapital nach $N$ Jahren $g(0) = y_0$	einfach	Zinseszins
jährlich	$g_j(N) = (1 + p_j N) y_0$	$g_j^{zz}(N) = (1 + p_j)^N y_0$
unterjährlich	$g_t(365N) = (1 + p_j N) y_0$ ...	$g_t^{zz}(365N) = (1 + \frac{1}{365} p_j)^{365N} y_0$ ...
kontinuierlich	$\lim_m \dots = (1 + p_j N) y_0 = y_j(N)$	$\lim_m \dots = e^{p_j N} y_0 = y_j(N)$

TUD  
WIL 0129  
17.9.2021

## 10.3 Aufgabe aus einem Schullehrbuch

Abbildung 10.3: Aus [4], Seite 325

**Beispiel 2:** (Beschränkter Zerfall; Aufstellen einer Differenzialgleichung)

Ein Land, das 1990 noch 50 Millionen Einwohner hatte, würde infolge geringer Geburtenzahl einen Bevölkerungsschwund von jährlich 0,6 % verzeichnen, wenn es nicht jährlich 96 000 Einwanderer aufnehmen würde.

a) Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, mit der sich die Entwicklung der Einwohnerzahl näherungsweise beschreiben lässt.

b) Wie viele Einwohner erwartet man im Jahr 2010? Wie wird sich die Einwohnerzahl in diesem Modell langfristig entwickeln?

Wir formulieren die Aufgabenstellung mit mathematischen Ausdrücken um, ignorieren Teil a) und bearbeiten Teil b) mit Hilfe einer Differenzengleichung.

**Aufgabenstellung** Bezeichne  $n$  das Jahr und  $a(n)$  die Anzahl der Einwohner in diesem Jahr. Es ist gegeben:

$$a(n+1) = a(n) - \frac{0,6}{100} \cdot a(n) + 96000 \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 1990 \quad \text{und}$$

$$a(1990) = 50\,000\,000.$$

Gefragt sind  $a(2010)$  und  $\lim_n a(n)$ .

**Lösung der Aufgabe** Der Einfachheit halber bezeichne  $p = \frac{0,6}{100}$ ,  $\alpha = 1 - p = 0,994$ ,  $\beta = 96000$  und  $c_0 = 50 \cdot 10^6$ .

Wir haben die Folge  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zu finden, welche

$$a(n+1) = \alpha \cdot a(n) + \beta \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 1990 \text{ und } a(1990) = c_0$$

erfüllt. Sei  $a$  eine Lösung. Wir zeigen mit vollständiger Induktion nach  $k$ , dass dann

$$a(n+k) = \alpha^k \cdot a(n) + \beta \cdot (\alpha^{k-1} + \dots + \alpha + 1) \text{ für } k \in \mathbb{N}, n \geq 1990. \quad (10.7)$$

Sei  $n \geq 1990$ . Für  $k = 1$  ist  $a(n+1) = a(n) - p \cdot a(n) + \beta = \alpha^1 a(n) + \beta \cdot (1)$ . Nehme an, dass die Gleichheit in (10.7) für  $k$  gilt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} a(n+(k+1)) &= a((n+k)+1) = \alpha \cdot a(n+k) + \beta \\ &= \alpha \cdot (\alpha^k \cdot a(n) + \beta \cdot (\alpha^{k-1} + \dots + \alpha + 1)) + \beta \\ &= \alpha^{k+1} \cdot a(n) + \beta \cdot (\alpha^k + \dots + \alpha^2 + \alpha + 1) \end{aligned}$$

und sehen, dass die Gleichheit in (10.7) dann auch für  $k+1$  gilt. Damit ist (10.7) bewiesen. Umgekehrt, man kann entweder direkt zeigen, dass für  $n = 1990$  durch (10.7)

definierte  $a$  eine Lösung ist, oder sagen, dass das Problem eine DFGL ist und somit eine eindeutige Lösung hat. Somit ist mit (10.7) die einzige Lösung gegeben. Wir setzen  $k = 20$  und berechnen

$$\begin{aligned} a(2010) &= a(1990 + 20) = \alpha^{20}a(1990) + \beta \cdot (\alpha^{19} + \cdots + \alpha + 1) = \\ &= \alpha^{20}a(1990) + \beta \cdot \frac{1 - \alpha^{20}}{1 - \alpha} = 0,994^{20} \cdot 5 \cdot 10^6 + 96000 \cdot \frac{1 - 0,994^{20}}{\frac{6}{1000}} \\ &= 0,994^{20} \cdot 50 \cdot 10^6 + 16 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,994^{20}) = 16 \cdot 10^6 + 34 \cdot 10^6 \cdot 0,994^{20} . \end{aligned}$$

Da  $|\alpha| < 1$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$  und die Sätze für die Berechnung von Grenzwerten von Summen und Produkten implizieren

$$\begin{aligned} \lim_n a(n) &= \lim_k a(1990 + k) = \lim_k \left( \alpha^k \cdot a(1990) + \beta \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} \right) \\ &= \frac{\beta}{1 - \alpha} = \frac{\beta}{p} = \frac{96000}{6} \cdot 100 = 16 \cdot 10^6 . \end{aligned}$$

Antwort:  $a(2010) = 16 \cdot 10^6 + 34 \cdot 10^6 \cdot 0,994^{20}$  und  $\lim_n a(n) = 16 \cdot 10^6$ .

**Diskussion** Allgemeiner können wir das Problem

$$a(n + 1) - a(n) = -p \cdot a(n) + \beta \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a(0) = c_0 \quad (10.8)$$

für gegebene Zahlen  $p, \beta, c_0$  und gesuchte  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten.

Da (10.8) als eine rekursive Definition der Folge  $a$  gesehen werden kann, hat das Problem eine eindeutige Lösung, eine Folge. Man kann genauso wie oben (d.h. mit vollständiger Induktion) zeigen, dass diese Folge explizit durch

$$a(n) = (1 - p)^n \cdot c_0 + \beta \cdot \left( \frac{1 - (1 - p)^n}{1 - (1 - p)} \right) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben werden kann.

Es kann auch eine Differentiengleichung als Modell aufgestellt werden. Die Differentiengleichung

$$f'(t) = -p \cdot f(t) + \beta \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ mit } t \geq 0 \text{ und } f(0) = c_0 \quad (10.9)$$

entspricht aber aus dem unten beschriebenen Grund der Differenzgleichung (10.8) nicht.

Wir erwarten, dass  $f(t) = a(n)$  für  $t = n \in \mathbb{N}$ . Die Lösungen sind jeweils (Herleitung für  $a$  siehe oben, für  $f$  mit TdV):

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\beta}{p} - \left( \frac{\beta}{p} - c_0 \right) e^{-pt} \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 0 \text{ und} \\ a(n) &= (1 - p)^n \cdot c_0 + \beta \cdot \frac{1 - (1 - p)^n}{1 - (1 - p)} \text{ für } n \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$

Wir schreiben  $a(n)$  um:

$$\begin{aligned} a(n) &= (1-p)^n \cdot c_0 + \beta \cdot \left( \frac{1 - (1-p)^n}{p} \right) = \frac{\beta}{p} - \left( \frac{\beta}{p} - c_0 \right) \cdot (1-p)^n \\ &= \frac{\beta}{p} - \left( \frac{\beta}{p} - c_0 \right) \cdot e^{n \cdot \log(1-p)}. \end{aligned}$$

Für  $t = n = 1$  ist die Erwartung nicht erfüllt, da im Allgemeinen

$$a(1) = \frac{\beta}{p} - \left( \frac{\beta}{p} - c_0 \right) \cdot e^{1 \cdot \log(1-p)} \neq \frac{\beta}{p} - \left( \frac{\beta}{p} - c_0 \right) \cdot e^{-1 \cdot p} = f(1).$$

Deshalb entspricht (10.9) nicht (10.8).

Nennen wir die Parameter der DGL (10.9) auf  $\tilde{p}$  (statt  $p$ ) und  $\tilde{\beta}$  (statt  $\beta$ ) um, wird die Gleichheit

$$a(n) = f(n)$$

als

$$\frac{\beta}{p} - \left( \frac{\beta}{p} - c_0 \right) \cdot e^{n \cdot \log(1-p)} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{p}} - \left( \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{p}} - c_0 \right) \cdot e^{-n \cdot \tilde{p}}$$

geschrieben und wird erfüllt, sobald

$$\tilde{p} = -\log(1-p) \text{ und } \tilde{\beta} = \frac{-\log(1-p)}{p} \cdot \beta$$

gesetzt werden. Das zu (10.8) entsprechende kontinuierliche Modell ist also

$$f'(t) = -\log(1-p) \cdot f(t) + \frac{-\log(1-p)}{p} \beta \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ mit } t \geq 0 \text{ und } f(0) = c_0. \quad (10.10)$$

Aus der Taylorreihenentwicklung der Exponential- bzw. Logarithmusfunktion folgt, wegen  $\lim_{p \searrow 0} \frac{\log(1-p)}{-p} = 1$ , dass  $\log(1-p) \approx -p$  für kleine  $p$  und damit  $\tilde{p} \approx p$  und  $\tilde{\beta} \approx \beta$ . In diesem Fall ist es zu erwarten, dass der Fehler, wenn man (10.10) statt (10.8) verwendet, "nicht zu groß" ist. Wie das genau interpretiert (und bewiesen) werden soll, wird hier nicht diskutiert.