Fakultät Mathematik
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

SS 2022

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

10. Übung, 13.06. - 17.06.2022

Aufgabe 1 **Ü2** 25.5. b), c). Wie lauten die allgemeinen Lösungen der folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten?

b) $y''' - y'' - 2y' = 0$

c) $2y'' + 3y' + 3y = 0$

k) $y^{(4)} + 4y'' = 0$

l) $y'''' - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$

Aufgabe 2 **Ü2** 25.6. a), b), f). Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben.

a) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$,

b) $4y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$,

f) **(Zusatzaufgabe)** $mx'' + kx' + cx = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Größen seien $m = 50\,\mathrm{g}$, $k = 0.5\,\frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}}$, $c = 0.45\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, $x_0 = 2\,\mathrm{cm}$. Dabei gilt $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Nach welcher Zeit T ist der Ausschlag $x(t)$ auf $\frac{1}{100}$ mm zurückgegangen?

Aufgabe 3 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen (mit speziellem Ansatz!). Schreiben Sie diese anschließend in ein System erster Ordnung um.

a) $y'' - 2y' + y = 2e^x$,

b) $y'' - y' - 6y = 2\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$.

Aufgabe 4 **Ü2** 25.9 b α) γ) Welchen Ansatz machen Sie jeweils für eine partikuläre Lösung von

$$y''' + 4y'' + 13y' = r(x),$$

wobei $r(x)$ gleich ist:

α) $36 - xe^{3x}$,

γ) $2\sinh(2x) \cdot \sin(3x)$.

Die explizite Lösung ist nicht erforderlich.

Hinweis: $\sinh(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$ (Generell bei hyperbolischen Funktionen auf der rechten Seite: Immer aufspalten in Exponentialanteile wegen "Resonanzfalle")

Aufgabe 5 Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(x) - 2py'(x) + qy(x) = f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\ . \tag{1}$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) im Fall $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit der Parameter $p, q \in \mathbb{R}$ an (Fallunterscheidung).

b) Geben Sie einen praktikablen Ansatz für die Bestimmung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung (1) im Fall $p = 1, q = 5$ und $f(x) = 4xe^x\cos(2x)$ an (**nur Ansatz!**).

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) im Fall $p = q = 1$ und $f(x) = x^{-1}e^x$. (Tipp: Variation der Konstanten)

Aufgabe 6 (Rückwärts rechnen)

a) Es seien die Lösungen der charakteristischen Gleichung (unter Beachtung ihrer Vielfachheit) von linearen, homogenen, skalaren Differentialgleichungen mit konstanten Koeffzienten vorgegeben. Geben Sie eine zugehörige Differentialgleichung (DGL) minimalen Grades an und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung.

Lösungen der charakteristischen Gleichung	DGL	Fundamentalsystem
$1,\ -2,\ 3$		
$0,\ \sqrt{3},\ 1+\sqrt{2}$		
$0,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2$		
$0,\ 2 \pm 3i$		
$1 \pm 2i,\ 1 \pm 3i$		
$0,\ 0,\ 0,\ \pm i,\ \pm 2i$		

b) Gegeben seien

(i) $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = \sin x$, (ii) $y_1(x) = x^3 e^x$.

Geben Sie jeweils für (i) und (ii) die lineare homogene DGL niedrigster Ordnung mit konstanten und reellen Koeffizienten an, bei der die angegeben y_i in den Fundamentallösungen zu finden sind und bei denen der Koeffizient vor der höchsten Ableitung 1 ist.

Zusatzaufgabe (Wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen) Führen Sie die folgenden Aufgaben auf die Lösung eines Anfangswertproblems zurück und lösen Sie die Aufgaben auf diese Weise:

a) Das Volumen eines Gefäßes mit Luft betrage 20 Liter; die Gasmischung im Gefäß wird ständig vermischt. Am Anfang enthält das Gefäß Luft (80% Stickstoff, 20% Sauerstoff). Ins Gefäß wird 0.1 Liter Stickstoff pro Sekunde reingepumpt, die gleiche Menge der Gasmischung wird jede Sekunde abgepumpt. Bestimmen Sie die Zeit, nach der die Gasmischung im Gefäß 99% Stickstoff enthalten wird.

b) Ein 100-Liter-Tank ist mit einer Salzlösung gefüllt, die 60 Gramm Salz enthält. Nun lässt man pro Minute 2 l Wasser in den Tank laufen und die durch ständiges Rühren homogen gehaltene Mischung läuft in gleichem Maße aus. Bezeichnet $s(t)$ die Salzmasse in Gramm im Tank nach t Minuten, so beträgt die Konzentration $s(t)/100$ Gramm pro Liter, und für die Änderungsgeschwindigkeit gilt

$$s'(t) = -\frac{2}{100}\frac{1}{\text{min}} s(t).$$

Machen Sie sich dieses einsichtig. Wieviel Gramm Salz befinden sich nach einer Stunde noch im Tank, wieviel nach zwei Stunden?

c) Ein Gegenstand hat sich in 10 Minuten von 100 Grad auf 60 Grad abgekühlt, wobei die umgebende Temperatur stets gleich 20 Grad war. Wann wird der Gegenstand die Temperatur von 25 Grad erreichen?

Hinweis: Die Abkühlgeschwindigkeit ist proportional der Temperaturdifferenz zur Umgebungstemperatur.

Zusatzaufgabe (Wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen) Das Potential $\varphi = \varphi(r)$ der Raumladung einer verdünnten Lösung starker Elektrolyten genügt im kugelsymmetrischen Fall der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} - k^2\varphi = 0 \qquad (k = \text{konst.},\ k > 0)\ .$$

Mit der Substitution $\varphi(r) = \frac{u(r)}{r}$ ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zu ermitteln.

Aufgabensammlungen: Wenzel/Heinrich: Übungsaufgaben zur Analysis **Ü2**