Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic , Dr. F. Morherr

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

11. Übung, 20.06. - 24.06.2022

Aufgabe 1 **Ü2** 24.15. f), s). (Bernoullische Differentialgleichung) Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

f) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$,
s) $2xyy' + x - y^2 = 0$ (*Hinweis*: Formen Sie zuerst geeignet um),
Zusatzaufgabe (etwas schwieriger): $y' + y^2 + \frac{y}{x} = \frac{4}{x^2}$.

Aufgabe 2 Lösen Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 4y' - 5y = 0 \ ,$$

auf zwei Weisen indem Sie nacheinander folgendermaßen vorgehen:

(i) Lösung auf herkömmliche Weise mit Ansatz und charakteristischer Gleichung analog zu Blatt 9.

(ii) Lösung mittels des Systems 1. Ordnung: Schreiben Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung in ein vektorwertiges System 1. Ordnung um. Bestimmen Sie von der entstehenden Matrix die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und bilden Sie daraus die vektorwertige Lösung des vektorwertigen Systems als Linearkombination zu

$$C_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x} \ , C_1, C_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Vergleichen Sie die Komponenten der vektorwertigen Lösung mit der Lösung, welche Sie in (i) erhalten haben. Was fällt auf?

Aufgabe 3 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) - y(t) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) - 2z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 3y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= x(t) + 4z(t) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -5x(t) + 3y(t) \\ \dot{y}(t) &= -15x(t) + 7y(t) \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ \dot{z}(t) &= -x(t) + 2z(t) \end{aligned}$$

Hinweis zu d): Lösen Sie d) **nicht** in Matrixdarstellung, sondern indem Sie Gleichung 1 lösen, dann die Lösung in Gleichung 3 einsetzen, lösen und diese dann in Gleichung 2 einsetzen und lösen.

Aufgabe 4 Gegeben sei ein System, in dem eine unimolekulare Gleichgewichtsreaktion

$$\mathrm{A} \rightleftharpoons \mathrm{B}$$

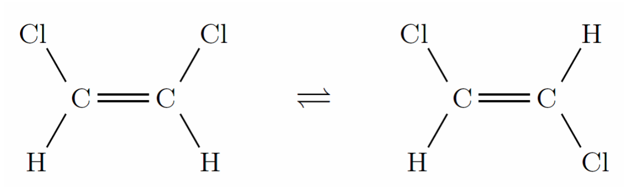
mit den beteiligten Stoffen A und B abläuft. Für jeden Zeitpunkt $t \geq 0$ bezeichnen $c_{\mathrm{A}}(t)$ die Konzentration des Stoffes A zum Zeitpunkt t und $c_{\mathrm{B}}(t)$ die Konzentration des Stoffes B zum Zeitpunkt t. Sowohl die Hinreaktion $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ als auch die Rückreaktion $\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A}$ seien Elementarreaktionen. Dann genügen c_{A} und c_{B} dem folgenden Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{c}_{\mathrm{A}}(t) &= -k_1 c_{\mathrm{A}}(t) + k_2 c_{\mathrm{B}}(t), \\ \dot{c}_{\mathrm{B}}(t) &= k_1 c_{\mathrm{A}}(t) - k_2 c_{\mathrm{B}}(t) \end{aligned} \qquad (*)$$

(für alle $t > 0$). Dabei bezeichnen $k_1 > 0$ bzw. $k_2 > 0$ die (temperatur- aber nicht zeitabhängigen) Geschwindigkeitskonstanten der Hinreaktion $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ bzw. der Rückreaktion $\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A}$.

a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $(*)$ unter den Anfangsbedingungen $c_{\mathrm{A}}(t) = c_{\mathrm{A}}^0$ und $c_{\mathrm{B}}(t) = c_{\mathrm{B}}^0$ (dabei bezeichnen c_{A}^0 bzw. c_{B}^0 die Anfangskonzentrationen von A und B).
Ermitteln Sie anschließend die Konzentrationen von A und B im Gleichgewicht, also $\lim_{t\to\infty} c_{\mathrm{A}}(t)$ und $\lim_{t\to\infty} c_{\mathrm{B}}(t)$.

b) Ein Beispiel für eine unimolekulare Gleichgewichtsreaktion ist die Umlagerung von 1,2-Dichlorethen von der cis-Konfiguration (Stoff A) in die trans-Konfiguration (Stoff B) und umgekehrt.



Bei Raumtemperatur betragen die Geschwindigkeitskonstanten für Hin- und Rückreaktion $k_1 = 0,0225\,\mathrm{s}^{-1}$ bzw. $k_2 = 0,015\,\mathrm{s}^{-1}$. Bestimmen und skizzieren Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse aus Teilaufgabe a) den zeitlichen Verlauf der Konzentrationen von cis- und trans-1,2-Dichlorethen, wenn die Anfangskonzentration von cis-1,2-Dichlorethen $0,2\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{l}^{-1}$ und die von trans-1,2-Dichlorethen $0\;\mathrm{mol}\cdot\mathrm{l}^{-1}$ beträgt.

(i) Berechnen Sie die Konzentration beider Isomere nach 30 Sekunden.

(ii) Berechnen Sie außerdem die Konzentrationen von cis- und von trans-1,2-Dichlorethen im Gleichgewicht.

Zusatzaufgabe (wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen) Wir betrachten ein Beispiel aus der chemischen Kinetik, nämlich den Zerfall einer Substanz A in ein Produkt C. Dem Zerfall vorgelagert ist ein Gleichgewicht zwischen A und B und der Zerfall erfolgt von B aus:

$$\mathrm{A} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B} \underset{k_3}{\rightarrow} \mathrm{C}.$$

Es sei $y_1(t)$ die Menge von A, $y_2(t)$ die Menge von B und $y_3(t)$ die Menge von C zum Zeitpunkt t. Für die zeitlichen Änderungen machen wir jeweils die Annahme, dass sie proportional der Menge ist, von der aus die drei Teilreaktionen mit den Geschwindigkeitskonstanten k_1, k_2 und k_3 aus erfolgen. Dann ergibt sich das Differentialgleichungssystem

$$y_1'(t) = -k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)\,, \qquad y_2'(t) = k_1 y_1(t) - k_2 y_2(t) - k_3 y_2(t)\,, \qquad y_3'(t) = k_3 y_2(t)\,.$$

Lösen Sie dieses.

Zusatzaufgabe (wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen) Gegeben sei ein System von zwei hintereinandergeschalteten Mischreaktoren mit den Raumzeiten τ_1 und τ_2 (Die Verweilzeitverteilung gestattet es ideale Reaktoren zu definieren. Unabhängig von der Konstruktion des eingesetzten Reaktors lässt sich eine mittlere Aufenthaltsdauer, die sogenannte Raumzeit τ (mittlere technologische Verweilzeit, hydrodynamische Verweilzeit) definieren). Für die Konzentrationen $c_1 = c_1(t)$ und $c_2 = c_2(t)$ eines Markierungsstoffes im ersten bzw. zweiten Mischreaktor gilt:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 + \frac{1}{\tau_1} c_1 &= 0 \text{ mit } c_1(0) = 1\,; \\ \dot{c}_2 + \frac{1}{\tau_2} c_2 &= \frac{1}{\tau_2} c_1 \text{ mit } c_2(0) = 0\,. \end{aligned}$$

a) Man bestimme die Konzentration $c_2(t)$.

b) Der Fall gleichgroßer Reaktoren $(\tau_1 = \tau_2)$ ist zu diskutieren.

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich, Übungsaufgaben zur Analysis **Ü2**
Teubner, Stuttgart/Leipzig, 5. Auflage 1997
(Reihe Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler=MfIN)