Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

12. Übung, 27.06. - 01.07.2022

Aufgabe 1

(*i*) **Ü1** Aufgabe 6.11. a), b), c);

Welche Kurven werden in der x, y-Ebene durch folgende Parameterdarstellung beschrieben? Geben Sie jeweils eine parameterfreie Darstellung der Kurvengleichung an (a, b, x_0, y_0 const.)!

a) $x(t) = x_0 + a\cos t$, $y(t) = y_0 + b\sin t$, $(a, b > 0\ ;\ t \in [0, 2\pi])$,

b) $x(s) = x_0 + s$, $y(s) = y_0 + s^2$, $(s \in \mathbb{R})$

c) $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \sin^2 t$, $t \in \mathbb{R}$.

(*ii*) **Ü1** Aufgabe 6.10. a), d), e);

Gegeben sind die Parameterdarstellungen $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

a) $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$,

d) $x = \cos 2t$, $y = \sin t$,

e) $x = \frac{2-2t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{4t}{1+t^2}$.

Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktionen $x(t)$ und $y(t)$, und geben Sie nach Elimination von t Darstellungen der Gestalt $F(x, y) = 0$ bzw. $y = f(x)$ an. Folgern Sie daraus des Bild der zu den Parameterdarstellungen gehörenden Kurven.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie für die folgenden in der xy-Ebene verlaufenden Kurven eine Parameterdarstellung. Fertigen Sie außerdem jeweils eine Skizze der Kurve an.

a) Die Kurve verläuft entlang der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ vom Punkt $P(0, 0)$ zum Punkt $Q(2, 4)$.

b) Die Kurve verläuft entlang der Parabel mit der Gleichung $x = y^2$ vom Punkt $P(1, -1)$ zum Punkt $Q(1, 1)$.

c) Die Kurve verläuft geradlinig vom Punkt $P(1, 3)$ zum Punkt $Q(2, 1)$.

d) Die Kurve verläuft entlang eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(0, 0)$ im mathematisch positiven Sinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) vom Punkt $P(3, 0)$ zum Punkt $Q(0, 3)$.

e) Die Kurve verläuft entlang eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(0, 0)$ im mathematisch negativen Sinn (im Uhrzeigersinn) vom Punkt $P(3, 0)$ zum Punkt $Q(0, -3)$.

f) Die Kurve verläuft entlang des Kreises mit der Gleichung $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ im mathematisch positiven Sinn vom Punkt $P(1, -4)$ zum Punkt $Q(1, 0)$.

g) Die Kurve verläuft entlang der Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 1$ im mathematisch positiven Sinn vom Punkt $P(a, 0)$ zum Punkt $Q(0, b)$, wobei P und Q die Schnittpunkte der Ellipse mit der positiven x-Achse bzw. der positiven y-Achse seien.

Aufgabe 3 (Unabhängigkeit des Kurvenintegrals 1. Art von der Parametrisierung der Kurve)

Zwei Parameterdarstellungen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \ a \le t \le b, \ \text{ und } \overline{\mathbf{x}}(\tau) = \begin{pmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{y}(t) \end{pmatrix}, \ \alpha \le \tau \le \beta, \tag{1}$$

beschreiben dieselbe Kurve (mit derselben Orientierung), falls es eine streng monoton wachsende Funktion $P : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ gibt, sodass gilt: $\mathbf{x}(t) = \overline{\mathbf{x}}(P(t))$ für alle $t \in [a, b]$. Die Funktion P wird dann als *Parametertransformation* bezeichnet.

Weisen Sie nach: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Angenommen, für eine Kurve $\mathcal{C}$ mit stetig differenzierbaren Parameterdarstellungen gemäß (1) existiert eine stetig differenzierbare Parametertransformation P mit $\mathbf{x}(t) = \overline{\mathbf{x}}(P(t))$ für alle $t \in [a, b]$. Dann ist das Kurvenintegral 1. Art unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung, daß heißt, dann gilt

$$\int_{t=a}^{b} f\left(x\left(t\right)\right)\left|x'\left(t\right)\right| dt = \int_{\tau=\alpha}^{\beta} f\left(\overline{x}\left(\tau\right)\right)\left|\overline{x}'\left(\tau\right)\right| d\tau.$$

Folgern Sie, dass insbesondere die Bogenlänge unabhängig von Parametrisierung und Lage der Kurve im Koordinatensystem ist.

Aufgabe 4 **Ü1** 12.22. a), h), m); Berechnen Sie die Längen der angegebenen Kurven im $\mathbb{R}^2$:

a) $y\left(x\right) = \frac{1}{2}x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

h) $x\left(t\right) = t\cos t - \sin t$, $y\left(t\right) = t\sin t + \cos t + 1$, $-\pi \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$;

m) $r\left(\varphi\right) = e^{2\sqrt{2}\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \sqrt{2}$;

Berechnen Sie die Längen der durch die folgenden Parameterdarstellungen gegebenen Kurven im $\mathbb{R}^3$:

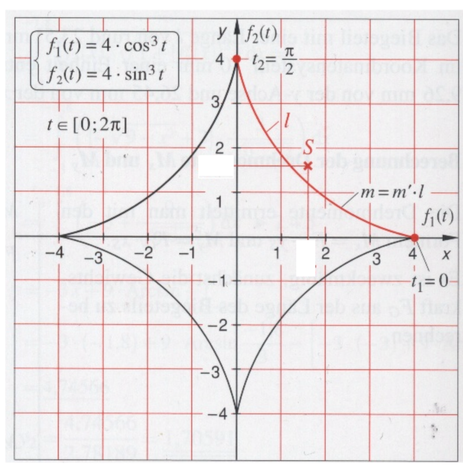
n) $\mathbf{x}\left(t\right) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 3t^3 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1,$ **o)** $\mathbf{x}\left(t\right) = \begin{pmatrix} \sin\left(t\right)\cos\left(t\right) \\ \sin^2\left(t\right) \\ 2t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi,$

p) $\mathbf{x}\left(t\right) = \begin{pmatrix} e^t\cos\left(t\right) \\ e^t\sin\left(t\right) \\ e^t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

Aufgabe 5 Eine Astroide sei durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$\mathbf{x}\left(t\right) = \left(4\cos^3 t\ , 4\sin^3 t\right)\ , t \in [0, 2\pi]\,.$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten des geometrischen (Kurven-)Schwerpunkts $S = (x_S, y_S)$ desjenigen Teilstücks der Astroide, das im ersten Quadranten liegt (siehe Abbildung).



b) Bestimmen Sie eine parameterfreie Darstellung der Astroide in der Form $f\left(x, y\right) = 0$.

Aufgabe 6: Das Parabelstück

$$P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1\right\}$$

hat die Parametrisierung $\mathbf{x}\left(t\right) = \left(t, t^2\right)^{\mathsf{T}}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Es sei mit einer Linienmassendichte der Form $\rho\left(x, y\right) = \sqrt{1 + 4x^2}$ belegt. Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt des Parabelstücks und zeichnen Sie diesen mit dem Parabelstück in ein Koordinatensystem ein.

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich: Übungsaufgaben zur Analysis **Ü1, Ü2**