Fakultät Mathematik
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

SS 2022

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

13. Übung, 04.07. - 08.07.2022

Aufgabe 1 Gegeben sei die Kurve $\mathcal{C}$ durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Stellen Sie die Kurve $\mathcal{C}$ grafisch dar.

b) Berechnen Sie die Ableitungsvektoren $\mathbf{x}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\mathbf{x}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $\mathbf{x}'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

c) Gegeben seien die Punkte $P_1\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $P_2(0,2)$ und $P_3\left(-1,\sqrt{3}\right)$. Weisen Sie nach, dass diese Punkte auf der Kurve $\mathcal{C}$ liegen, und ermitteln Sie für jeden dieser Punkte eine Parameterdarstellung der Tangente an die Kurve $\mathcal{C}$ im jeweiligen Punkt. Nutzen Sie dazu Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (b). Zeichnen Sie außerdem für jeden der drei Punkte die Tangente an die Kurve $\mathcal{C}$ in Ihre Skizze aus Teilaufgabe (a) ein.

Aufgabe 2 Berechnen Sie das Kurvenintegral (2. Art) für die folgenden Vektorfelder $\mathbf{v}$ und Kurven $\mathcal{C}$ mit Anfangs- und Endpunkt P_A bzw. P_E:

a) Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ y-x \end{pmatrix}$$

von $P_A = (0,0)$ nach $P_E = (1,1)$ längs der Kurven

$$(\alpha)\ y = x; \qquad (\beta)\ x = y^2; \qquad (\gamma)\ y = x^2; \qquad (\delta)\ y = x^3.$$

b) Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

von $P_A = (1,0)$ nach $P_E = (0,1)$ längs

α) einer Geraden,
β) des Viertelkreisbogens mit dem Mittelpunkt $(0,0)$,
γ) des Dreiviertelkreisbogens mit dem Mittelpunkt $(0,0)$,
δ) $y = (1-x)^n$, $n > 0$.

Aufgabe 3 Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Kurvenintegrale 2. Art $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ entlang der folgenden Kurven $\mathcal{C}$.

a) Die Kurve verläuft geradlinig vom Punkt $A(-1,0,2)$ zum Punkt $B(1,1,1)$.

b) Die Kurve besitzt die Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Aufgabe 4 Die Wärmemenge Q, die nötig ist, um für ein Mol eines idealen Gases eine Änderung von Temperatur und molarem Volumen von (T_1, V_1) hin zu (T_2, V_2) zu bewirken, lässt sich durch das Lösen eines Kurvenintegrals 2. Art berechnen:

$$Q = \int_{\mathcal{C}} \left(C_V dT + \frac{RT}{V} dV \right).$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{C}$ die Kurve in der T-V -Ebene, entlang der die Zustandsänderung $(T_1, V_1) \to (T_2, V_2)$ erfolgt. Mit C_V ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen gemeint, mit R die universelle Gaskonstante. Die Werte dieser Konstanten sind (näherungsweise)

$$C_V = 12.5 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{mol}},\ R = 8.314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{mol}}.$$

a) Berechnen Sie die Wärmemenge Q, die nötig ist, um ein Mol eines idealen Gases zunächst bei konstantem Volumen $V_1 = 75\,\mathrm{l}$ von $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ auf $T_2 = 500\,\mathrm{K}$ zu erwärmen und anschließend bei konstanter Temperatur auf $V_2 = 125\,\mathrm{l}$ auszudehnen.

b) Berechnen Sie die Wärmemenge, die nötig ist, um nach dem umgekehrten Vorgehen die Zustandsänderung aus Teilaufgabe a) zu bewirken, also ein Mol des Gases erst bei konstanter Temperatur $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ von $V_1 = 75\,\mathrm{l}$ auf $V_2 = 125\,\mathrm{l}$ auszudehnen und anschließend bei konstantem Volumen auf $T_2 = 500\,\mathrm{K}$ zu erwärmen.

c) Berechnen Sie die Wärmemenge, die nötig ist, um den Zustand eines Mols eines idealen Gases ausgehend von einer Temperatur T_1 und eines Volumens V_1 gemäß des folgenden Kreisprozesses zu ändern:

(1) als erstes Veränderung der Temperatur von T_1 auf T_2 bei konstantem Volumen V_1,

(2) anschließend Veränderung des Volumens von V_1 auf V_2 bei konstanter Temperatur T_2,

(3) danach Veränderung der Temperatur von T_2 wieder zurück auf T_1 bei konstantem Volumen V_2,

(4) Veränderung des Volumens von V_2 wieder zurück auf V_1 bei konstanter Temperatur T_1.

Am Ende dieses Kreisprozesses ist also der Ausgangszustand wiederhergestellt.

Hinweis: $\left(\int_{\mathcal{C}} \left(C_V dT + \frac{RT}{V} dV\right)\right)$ ist nur eine andere Schreibweise für das Kurvenintegral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ mit dem Vektorfeld $\mathbf{v}(T, V) = \begin{pmatrix} C_V \\ \frac{RT}{V} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 Gegeben ist das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 \cdot g(x) \cdot \sin x \cdot \sin y \\ -g(x) \cdot \cos x \cdot \cos y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie g so, dass $\mathbf{v}$ ein Gradientenfeld ist und berechnen Sie eine Potentialfunktion.

Zusatzaufgabe (**Wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen**) Aufgrund der unterschiedlichen Ergebnisse in Aufgabe 4 ist das Arbeitsintegral nicht wegunabhängig und damit $\delta Q := C_V dT + \frac{RT}{V} dV$ **kein** vollständiges Differential, d.h.

$$\mathbf{v}(T, V) = \begin{pmatrix} C_V \\ \frac{RT}{V} \end{pmatrix}$$

ist **kein** Gradientenfeldes eines Potentials. Wir dürfen also nicht dQ schreiben. Zeigen Sie, dass dagegen die Entropieänderung dS ein totales Differential ist

$$dS := \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV,$$

d.h.

$$\widetilde{\mathbf{v}}(T, V) = \begin{pmatrix} \frac{C_V}{T} \\ \frac{R}{V} \end{pmatrix}$$

ist ein Gradientenfeldes eines Potentials.

Informieren Sie sich über den **Carnotschen Kreisprozess**. Diesen kann man entweder im p-V-Diagramm darstellen oder im T-S-Diagramm. Was ist der Vorteil der Darstellung im T-S-Diagramm? Was bedeutet die eingeschlossene Fläche in beiden Diagrammen?

Zusatzaufgabe (**Wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen**) Die Entropieänderung ΔS eines thermodynamischen Systems bei einer Änderung von Druck und molarem Volumen von (p_1, V_1) hin zu (p_2, V_2) ergibt sich für ein ideales Gas gemäß

$$\Delta S = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{T(p,V)} \left[\frac{\partial}{\partial p} U(p,V)\, dp + \left(\frac{\partial}{\partial V} U(p,V) + p \right) dV \right],$$

wobei

$$U(p,V) = U_1 + \frac{pV}{R} C_V \text{ (Innere Energie) und } T(p,V) = \frac{pV}{R} \quad (U_1, C_V, R > 0 \text{ konstant}).$$

Mit $\mathcal{C}$ wird dabei die Kurve in der p-V-Ebene bezeichnet, entlang der die Zustandsänderung $(p_1, V_1) \longrightarrow (p_2, V_2)$ erfolgt.

a) Zeigen Sie, dass ΔS wegunabhängig ist.

b) Berechnen Sie ΔS für eine Zustandsänderung $(p_1, V_1) \longrightarrow (p_2, V_2)$, für die $\frac{p_2}{p_1} = 10$ und $\frac{V_2}{V_1} = 100$ ist.

Hinweis: $\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{T(p,V)} \left[\frac{\partial}{\partial p} U(p,V)\, dp + \left(\frac{\partial}{\partial V} U(p,V) + p \right) dV \right]$ ist nur eine andere Schreibweise für das Kurvenintegral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ mit dem Vektorfeld

$$\mathbf{v}(p,V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{T(p,V)} \frac{\partial}{\partial p} U(p,V) \\ \frac{1}{T(p,V)} \left(\frac{\partial}{\partial V} U(p,V) + p \right) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zur Lösung der Aufgabe zunächst die benötigten partiellen Ableitungen von U und setzen Sie diese sowie die Vorschrift für T in das Vektorfeld ein, sodass letztlich nur noch p und V als Variablen vorkommen.

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich, Übungsaufgaben zur Analysis **Ü2**