Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic , Dr. F. Morherr

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

14. Übung, 11.07. - 15.07.2022

Aufgabe 1 (Kurvenintegrale für Gradientenfelder im 2D)

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + xy^2 \\ (x^2 - 2)\, y \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist und ermitteln Sie eine zugehörige Potentialfunktion.

(b) Berechnen Sie für $\mathbf{F}$ die Kurvenintegrale 2. Art entlang der folgenden Kurven $\mathcal{C}$. Skizzieren Sie außerdem jeweils die Kurve $\mathcal{C}$.

(b1) Die Kurve $\mathcal{C}$ verläuft zunächst entlang der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 1$ vom Punkt $P_1(0, 1)$ zum Punkt $P_2(1, 2)$ und von dort aus geradlinig weiter zum Punkt $P_3(2; 3)$.

(b2) Die Kurve $\mathcal{C}$ durchläuft die Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 9y^2 = 1$ im mathematisch positiven Sinn.

(b3) Die Kurve $\mathcal{C}$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix}, \ -1 \leq t \leq 2.$$

Aufgabe 2 Gegeben seien die beiden Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 - 4z \\ xz^2 + 2z + 1 \\ 2xyz - 4x + 2y \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ 2xz \\ -xy \end{pmatrix}.$$

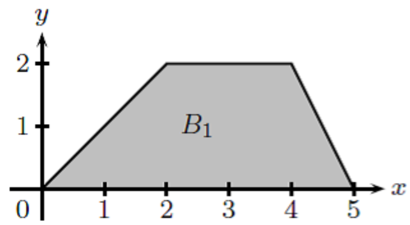
(a) Entscheiden Sie anhand der Integrabilitätsbedingungen, bei welchem der beiden Vektorfelder es sich um ein Gradientenfeld handelt. Ermitteln Sie für dieses Vektorfeld eine zugehörige Potentialfunktion.

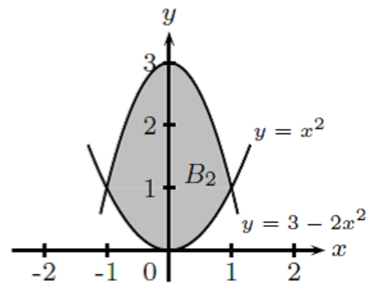
(b) Gegeben sei die Kurve $\mathcal{C}$ mit der Parameterdarstellung

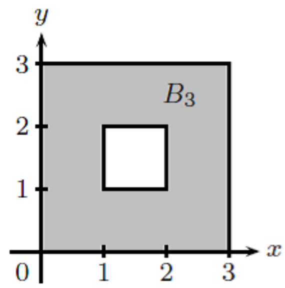
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 1 - t \\ 2t \end{pmatrix}, \ 0 \leq t \leq 2.$$

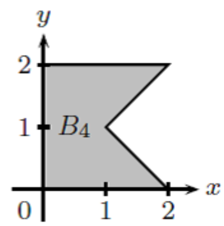
Berechnen Sie die Kurvenintegrale 2. Art $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ und $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}$ der Vektorfelder $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ entlang der Kurve $\mathcal{C}$.

Aufgabe 3 Gegeben seien die folgenden Bereiche $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_4 \subset \mathbb{R}^2$.









(a) Untersuchen Sie für jeden dieser vier Bereiche, ob es sich um einen Normalbereich vom Typ I (Normalbereich bzgl. x) handelt. Bestimmen Sie ggf. Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie stetige Funktionen $c, d : [a, b] \to \mathbb{R}$ so, dass für den jeweiligen Bereich $\mathcal{B}_i$ gilt:

$$\mathcal{B}_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c\,(x) \leq y \leq d\,(x) \right\}.$$

(b) Untersuchen Sie für jeden dieser vier Bereiche, ob es sich um einen Normalbereich vom Typ II (Normalbereich bzgl. y) handelt. Bestimmen Sie ggf. Zahlen $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ sowie stetige Funktionen $a, b : [c, d] \to \mathbb{R}$ so, dass für den jeweiligen Bereich B_i gilt:

$$\mathcal{B}_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, a\,(y) \leq x \leq b\,(y) \right\}.$$

(c) Stellen Sie ein Doppelintegral zur Berechnung des Volumens des Körpers

$$\mathcal{K} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{B}_1,\ 0 \leq z \leq 2x + y \right\}$$

auf und berechnen Sie dieses

(d) Stellen Sie ein Doppelintegral zur Berechnung des Flächeninhalts des Bereichs $\mathcal{B}_2$ auf und berechnen Sie dieses.

(e) Beschreiben Sie eine Möglichkeit zur Berechnung des Bereichsintegrals$\int_{\mathcal{B}_4} f\ dF$ durch Zerlegung von $\mathcal{B}_4$ in mehrere Normalbereiche.

(f) Diskutieren Sie, ob das Bereichsintegral für $\mathcal{B}_3$ auch nach dem folgenden Vorgehen berechnet werden kann: Zunächst berechnet man das Integral von f über dem Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$ und $(0, 3)$. Vom erhaltenen Wert subtrahiert man dann den Wert des Integrals von f über dem Quadrat mit den Eckpunkten $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ und $(1, 2)$.

Aufgabe 4 Skizzieren Sie den Integrationsbereich $\mathcal{B}$ und geben Sie die Bereichsintegrale $\int_{\mathcal{B}} f\,(x, y)\,dF$ an:

a) $f\,(x, y) = e^{x+y}$, $\mathcal{B} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \right\}$,

b) $f\,(x, y) = 2\sqrt{y - x^2}$, $\mathcal{B} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqslant x \leqslant 3\ ,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2x + 3 \right\}$

Aufgabe 5 **Ü2** 20.12. a), b). Skizzieren Sie den Grundriss des gegebenen Körpers in einer geeigneten Koordinatenebene und berechnen sie das Volumen des Körpers, wenn er begrenzt wird von

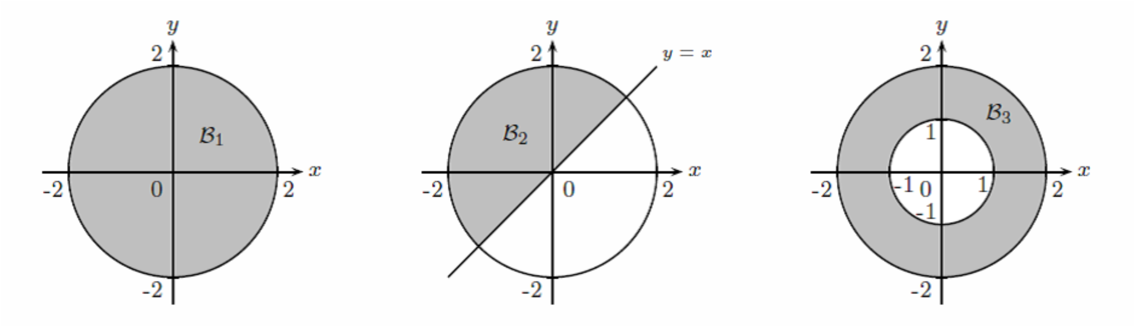
a) den Flächen $y = \cos x$, $y = x + 1$, $x = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$ und $z = \sin x$.

b) den Ebenen $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$, $z = 0$ und der Fläche $z = xy$.

Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 4.13 aus der Vorlesung.

Aufgabe 6 (Berechnung von Bereichsintegralen unter Verwendung von Polarkoordinaten)

Gegeben seien die folgenden Bereiche $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \subset \mathbb{R}^2$.



(a) Beschreiben Sie jeden dieser Bereiche mittels Polarkoordinaten (r, φ).

(b) Berechnen Sie unter Verwendung des Transformationssatzes die Flächen der drei Bereiche.

(c) Berechnen Sie unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus (a) und (b) die Volumina der Körper

$$\mathcal{K}_i = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|(x, y) \in \mathcal{B}_i, 0 \le z \le x + 2y + 6\right\},\ i = 1, 2, 3.$$

Zusatzaufgabe 1 Die Ebene $x + y + z = 6$ bildet mit den drei Koordinatenebenen eine gleichseitige Pyramide. Bestimmen Sie das Volumen und den Schwerpunkt bei konstanter Dichte dieser Pyramide.

Zusatzaufgabe 2 Es seien $a > 0$, $b > 0$ und $h > 0$. Durch $x(t) = a \cdot \cos(t)$, $y(t) = a \cdot \sin(t)$, $z(t) = \frac{h}{2\pi} \cdot t$ für $0 \le t \le b$ wird eine Schraubenlinie (Helix) beschrieben. Berechnen Sie die Länge der Schraubenlinie sowie die Koordinaten ihres geometrischen Kurvenschwerpunktes.

Zusatzaufgabe 3 Berechnen Sie das Volumen und die Masse des Körpers aus **Ü2** 21.14:

Der Körper werde von den Flächen $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ und $x - y - z = 0$ mit $z \ge 0$ begrenzt wird. Für die Dichte gelte $\rho\,(x, y, z) = 3\left(x^2 + y^2\right) z$.

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich, Übungsaufgaben zur Analysis **Ü2**
Teubner, Stuttgart/Leipzig, 5. Auflage 1997
(Reihe Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler=MfIN)