Fakultät Mathematik
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

SS 2022

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

15. Übung, freiwillig, nicht klausurrelevant, für die vorlesungsfreie Zeit

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie mit der Trapezregel mit 6 Teilintervallen das Integral

$$\int_1^2 xe^{-x} dx \; .$$

Welcher exakte Wert muss sich ergeben?

2. Es sei $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Berechnen Sie einen Näherungswert für das Integral

$$\int_0^5 f(x)\, dx$$

unter Verwendung der Trapezregel mit der Schrittweite $h = 0.5$. Multiplizieren Sie das Ergebnis anschließend mit 2 und quadrieren Sie das Produkt. Was fällt Ihnen auf?

b) Trotz der großen Schrittweite ist das Ergebnis in a) auf (mindestens, bei Taschenrechnergenauigkeit, bei Computergenauigkeit auch mehr) 7 Dezimalen exakt. Wie lässt sich das erklären?

3. Gehen Sie von einer Näherungsformel der Gestalt

$$\int_0^h f(x)\, dx \approx af(0) + bf(h) + cf'(0) + df'(h)$$

aus und bestimmen Sie a, b, c, d so, dass die Funktionen $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ exakt integriert werden.

4. Da die Bildung von Ableitungen nicht immer einfach zu bewerkstelligen ist, kann man die vorgelegte Funktion in jedem Zerlegungsintervall durch ein Polynom höchstens zweiten Grades interpolieren, das mit dieser neben den beiden Randpunkten noch einen dritten Punkt gemeinsam hat. Im einfachsten Fall ist dieser der mittlere Punkt bzgl. der Abszissenwerte. Die zugehörige Näherungsformel heißt die *keplersche Fassregel,* und zwar deshalb, Weil Sie bereits von KEPLER bei der Berechnung der Rauminhalte von Fässern verwendet wurde.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Interpolationspolynoms im Intervall $[0, h]$, dass die Keplersche Fassregel die Form

$$\int_0^h f(x)\, dx \approx \frac{h}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h)\right)$$

hat.

b) Leiten Sie die Keplersche Fassregel auch aus dem Ansatz

$$\int_0^h f(x)\, dx \approx c_1 f(0) + c_2 f\left(\frac{h}{2}\right) + c_3 f(h)$$

her, indem Sie die Koeffizienten so bestimmen, dass $f(x) = x^n$ für $n = 0, 1, 2$ exakt integriert wird.

c) Begründen Sie unter Benutzung der Tatsache, dass die erwähnte Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar ist, oder auch aus der Linearität, dass die Keplersche Fassregel alle Polynome bis zum Grad 2 exakt integriert.

d) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sogar alle Polynome *dritten Grades* exakt integriert werden.

e) Durch Summierung über alle Teilintervalle ergibt sich die sogenannte *Simpsonregel* (nach dem englischen Mathematiker T. Simpson, 1710-1761). Zeigen Sie, dass man die Simpsonregel in der Gestalt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \quad \approx \quad & \frac{1}{6}h\left[(y_0 + y_{2n})\right. \\ & +2\left(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2}\right) \\ & \left.+4\left(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}\right)\right]\end{aligned}$$

schreiben kann, wenn man von einer Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

mit $\Delta x = \frac{h}{2}$ ausgeht, sowie $y_i := f(x_i)$, $i = 0, \ldots, 2n$.

f) Berechnen Sie das Integral aus Aufgabe 1 noch einmal mit der Simpsonregel.

5. Die Trapezformel kann für die näherungsweise Lösung einer Differentialgleichung ausgenutzt werden. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = -xy.$$

Umwandeln in eine Integralgleichung ergibt

$$f(x_1) = y_0 - \int_{x_0}^{x_1} x f(x)\,dx.$$

Werten wir das Integral mit Hilfe der Trapezformel aus, so erhalten wir

$$f(x_1) \approx y_0 - \frac{h}{2}\left(x_0 y_0 + x_1 f(x_1)\right).$$

Der Näherungswert y_1 genügt also der Beziehung

$$y_1 = y_0 - \frac{h}{2}\left(x_0 y_0 + x_1 y_1\right),$$

und durch Auflösen nach y_1 ergibt sich

$$y_1 = \frac{2 - hx_0}{2 + hx_1} \cdot y_0.$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens entsteht die *Rekursionsformel*

$$y_{i+1} = \frac{2 - hx_i}{2 + hx_{i+1}} \cdot y_i,$$

in der y_i einen Näherungswert für $f(x_i)$ mit $x_i = x_0 + i \cdot h$ angibt. Der Anfangswert sei gegeben durch $x_0 = 0$ und $y(0) = 1$.

a) Berechnen Sie die Werte y_0 bis y_{10} für den Fall $h = 0.1$.

b) Berechnen Sie die Werte y_0 bis y_{20} für den Fall $h = 0.05$.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung exakt und vergleichen Sie die in a) und b) ermittelten Näherungswerte mit den exakten Funktionswerten an den Stellen x_i.

Bemerkung: Im Allgemeinen Fall ist das die *Methode von* HEUN.

6. Lesen Sie sich das Dokument *Spline-Interpolation* durch und lösen Sie die Aufgaben auf den Seiten 90-92.

Viel Erfolg für die Klausur