Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

Mathematik II

für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

1. Übung, 4.4. - 8.4.2022 (analog Klausur Mathe I zum Üben und Besprechen)

Aufgabe 1 (12 Punkte) Komplexe Zahlen.

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = (1-i)^2$, $z_2 = \frac{1}{16} \cdot (\overline{z_1})^5$ und $z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Berechnen Sie:

a) den Realteil $\operatorname{Re}(z_1)$ und den Imaginärteil $\operatorname{Im}(z_1)$,

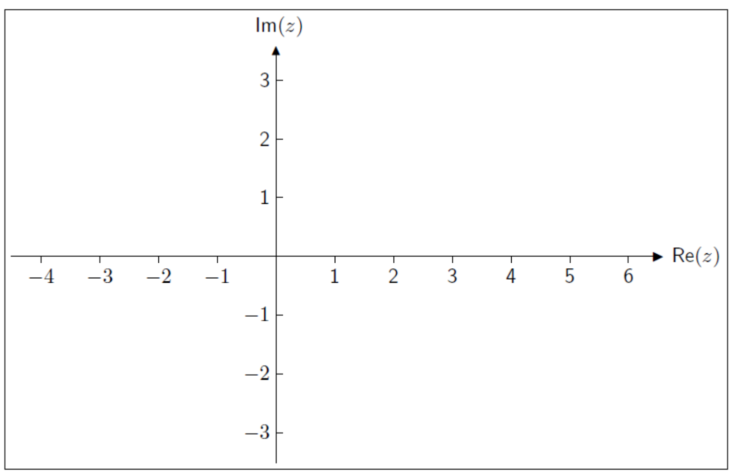
b) z_2 in exponentieller Darstellung,

c) das Argument $\arg(z_3)$,

d) die Summe $z_4 = -2z_1 + 2\sqrt{2}z_3$ in kartesischer Darstellung $z = x + iy$.

e) den Quotienten $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$ in exponentieller Darstellung.

f) Zeichnen Sie die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 und z_4 in die folgende Gaußsche Zahlenebene ein.



Aufgabe 2 (12 Punkte) Gegeben seien die folgenden Matrizen: I_2 bezeichnen die 2×2 Einheitsmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} d & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -d \end{pmatrix},\ d \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie (sofern möglich) die folgenden Matrizen

$$A - C,\ C - I_2,\ C \cdot I_2,\ B^\intercal B,\ A \cdot C,\ A \cdot D.$$

Begründen Sie, wenn eine Verknüpfung nicht möglich ist.

Welche der berechneten Matrizen sind symmetrische, Dreiecks- oder Diagonalmatrizen?

b) Bestimmen Sie die Determinante $\det(D)$.

Für welche $d \in \mathbb{R}$ ist das homogene Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix D nicht eindeutig lösbar?

Welche Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal$ besitzt das homogene Gleichungssystem $D \cdot x = 0$ für $d = 1$?

c) Geben Sie die Lösung des Gleichungssystems $D \cdot x = 0$ aus der b) für $d = \sqrt{2}$ an. Dabei ist der Gauß-Algorithmus zu verwenden.

d) Zeigen oder widerlegen Sie: Für invertierbare quadratische Matrizen A, B gilt

$$A \cdot \left(A^{-1} + B\right) = B \cdot \left(B^{-1} + A\right).$$

Aufgabe 3 (16 Punkte) Kurvendiskussion.

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^4\right)}{x^2}$$

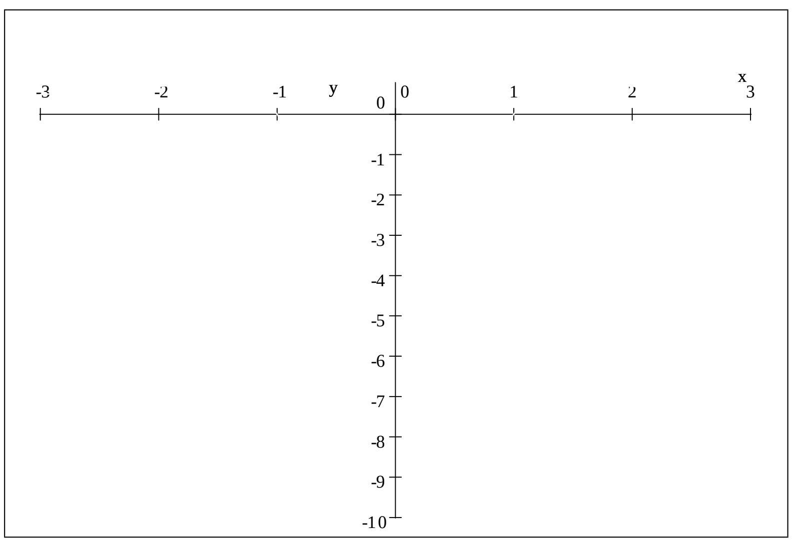
gegeben.

a) Berechnen Sie die erste Ableitung von f.

b) Beantworten Sie die folgenden Fragen, mit Begründung

(i) Wo besitzt f Nullstellen?
(ii) Ist f eine ungerade oder gerade Funktion?
(iii) Ist f beschränkt?
(iv) Wo ist f monoton wachsend bzw. fallend?
(v) Besitzt f eine Umkehrfunktion?
(vi) Hat f ein lokales Maximum? Wenn ja, an welcher Stelle?
(vii) Hat f ein lokales Minimum? Wenn ja, an welcher Stelle?
($viii$) Hat f hat globales Maximum?

c) Skizzieren Sie die Funktion f mit den Kenntnissen aus Aufgabenteil b). (Ordentliche Skizze!)



Aufgabe 4 (14 Punkte) Integration und Stammfunktion.

a) Geben Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{x}{x^2-1}$ an und berechnen Sie

$$\int_0^\varepsilon \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

für $0 < \varepsilon < 1$.

b) Welchen Grenzwert erhält man in a), wenn ε gegen 1 strebt.

c) Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{2-x^2} dx.$$

d) Untersuchen Sie die Existenz des Integrals

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{2-x^2} dx.$$

e) Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration oder Zuhilfenahme eines Additionstheorems, dass

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \cos(x)\sin(x)\right) + C.$$

Aufgabe 5 (12 Punkte) Differentialgleichungen.

a) Zeigen Sie möglichst einfach, dass

$$y(x) = 1 - 3e^{-x}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = 1 - y(x) \tag{1}$$

mit $y(0) = -2$ ist.
Gibt es für dieses Differentialgleichungsmodell (1) mit möglicherweise anderem Anfangswert ein Gleichgewicht, d.h. eine Lösung mit $y'(x) = 0$ für alle x?

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung mit Hilfe der Methode Trennung der Veränderlichen

$$y' = -\frac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Welche spezielle Lösung ergibt sich für den Anfangswert $y(0) = -2$?

c) In welchen Bereichen der x-y-Ebene ist die allgemeine Lösung aus b) monoton wachsend?

d) Bestimmen Sie die Isoklinen der Differentialgleichung $yy' = -x$. Um welche Art von Kurven handelt es sich?

Aufgabe 6 (14 Punkte) In einer Aufgabensammlung zur Mathematik gibt es 5 Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, 6 Aufgaben zur Analysis und 3 Aufgaben zur linearen Algebra.

a) Ein Student wählt zum Üben zufällig eine Aufgabe aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies eine Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung?
Geben Sie den Ereignisraum, ein Ereignisfeld und ein Wahrscheinlichkeitsmaß für dieses Zufallsexperiment an.

b) Ein Student wählt zum Üben aus den $N = 14$ Aufgaben rein zufällig $n = 3$ verschiedene Aufgaben aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er **keine** Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gezogen?

c) Bei jeder der Aufgaben soll aus mehreren Antwortmöglichkeiten, von denen **nur eine richtig** ist, ausgewählt werden. Es gibt 2 Antwortmöglichkeiten bei den Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, 6 Möglichkeiten bei den Aufgaben zur Analysis und 3 Möglichkeiten bei den Aufgaben zur Linearen Algebra. Ein Student wählt zufällig eine Aufgabe aus und kreuzt zufällig eine Antwort an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Antwort richtig?

d) Die Bearbeitungszeit aller Fragen einer Klausur sei normalverteilt mit Erwartungswert 100 (min) und Varianz 64 (min^2) ($\mathcal{N}(100, 64)$-verteilt). Mit welcher Wahrscheinlichkeit benötigt ein Student mehr als 120 Minuten zum Lösen aller Aufgaben? Nutzen Sie hierfür die beigefügte Tabelle zur Standardnormalverteilung (siehe hinten).

Aufgabe 7 (10 Punkte) Funktionsbestimmung

a) Bestimmen Sie die unbekannten Koeffizienten der gebrochen rationalen Funktion f mit

$$f(x) = \frac{a_2x^2 - 2x + a_0}{x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}, \text{ wobei } x \neq \pm 1,\ x \neq 2$$

und den Eigenschaften

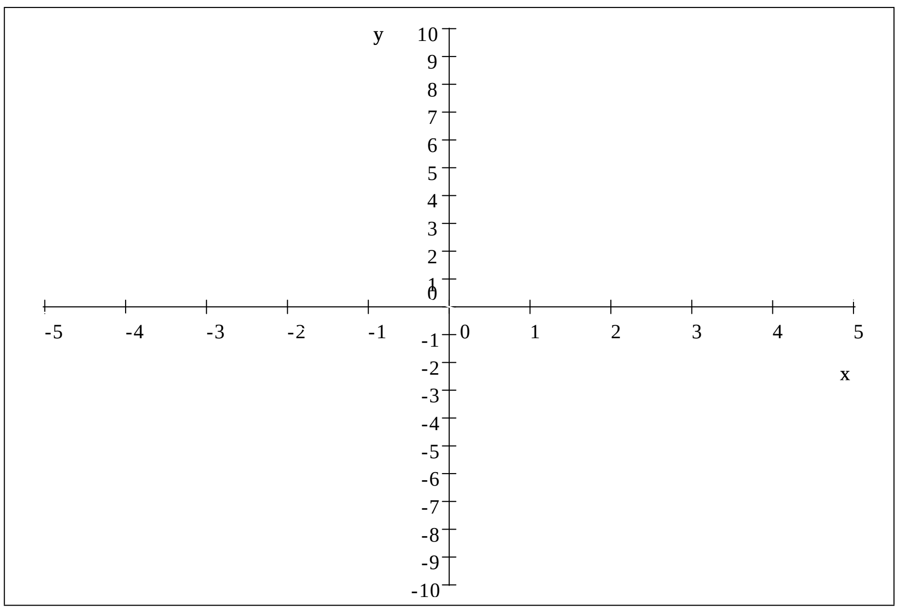
(i) $f(0) = 0$,
(ii) f besitzt Polstellen $x = 1$ und $x = -1$,
(iii) f hat eine Lücke bei $x = 2$.

Hinweis: Geben Sie Zähler- und Nennerpolynom als Produkt von Linearfaktoren an.

b) Welchen Anstieg hat die Funktion in $x = 0$?

Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst die Funktionsvorschrift mit Hilfe von (iii).

c) Skizzieren Sie den Graphen von f in das folgende Koordinatensystem. (Bitte eine ordentliche Skizze!)



Aufgabe 8 (10 Punkte) Taylorentwicklung und n-te Ableitung.

Die Funktion $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

a) Finden Sie nachvollziehbar die allgemeine Formel für die n-te Ableitung von f. Ein Beweis mittels vollständiger Induktion ist **nicht** notwendig.

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und schätzen Sie das Restglied auf dem Intervall $[1, 3]$ geeignet ab.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte eigentlich bzw. uneigentlich existieren und im Fall der Existenz bestimmen Sie diese.

(*Hinweis: Verwenden Sie ggf. die Regel von de l'Hospital zur Berechnung unbestimmter Grenzwerte bei Funktionen)*

(i)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{5x^3+1},$$

(ii)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2},$$

(iii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8}{4+5e^{-2x}},$$

(iv)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan\left(x^2\right)}{x^2},$$

(v)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

(vi)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(-\frac{3}{4}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)$$

(vii)

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^{\frac{1}{x}}\right)$$

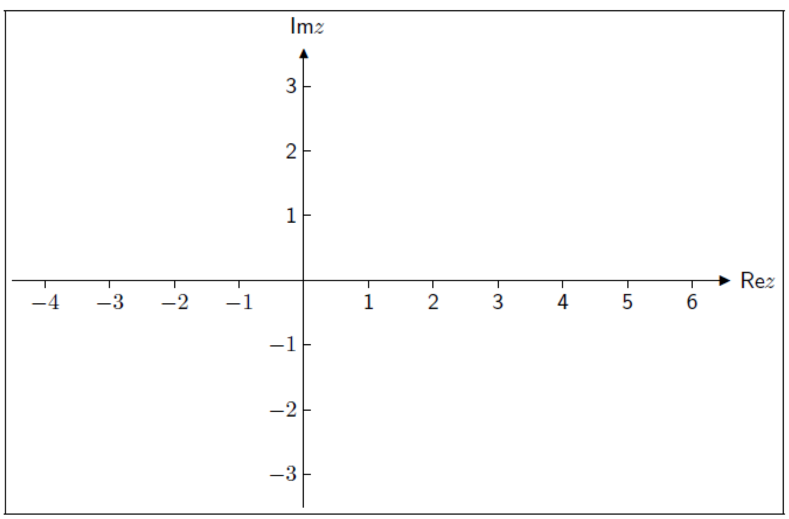
(viii)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ , wobei } a_{n+1} = 1.05a_n - 50, \;\; a_0 = 600.$$

Aufgabe 10 (10 Punkte) Komplexe Zahlen.

a) Skizzieren Sie die Mengen $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| + \operatorname{Im}(z) \leq 2\}$ und $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq 2\}$ in der komplexen Zahlenebene.

Skizzieren Sie den Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ in der komplexen Zahlenebene.



b) Bestimmen Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$, welche Lösung der Gleichung

$$z^4 = 81$$

sind. Skizzieren Sie die Lösungen in der komplexen Zahlenebene (in Aufgabenteil a).

Hinweis: Gesucht sind die komplexen vierten Wurzeln.

c) Wie lautet das Polynom p zweiten Grades mit den Nullstellen $z_{1,2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i$ und $p(0) = 2$?