Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

Mathematik II

für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

2. Übung, 11.4. - 15.4.2022

Aufgabe 1 Durch $f(x) := \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$ wird eine Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ erklärt.

a) Begründen Sie, warum f in $x = 0$ differenzierbar ist und ermitteln Sie dort die erste Ableitung $f'(0)$ sowie die Funktionsgleichung der Tangente.

b) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x\to 1} f(x)$ existiert und f zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Wertebereich der folgenden Funktionen von zwei Variablen. Zeichnen Sie den Definitionsbereich.

a) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$,

b) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

Aufgabe 3 **Ü2** 17.3. a; b; d; f; und **Ü2** 17.4. c.

Von der Funktion f sind die Niveaumengen zu bestimmen. Zeichnen Sie die Niveaulinien(=Höhenlinien) in die x-y-Ebene ein und schließen Sie auf die Gestalt der durch $z = f(x,y)$ bestimmten Fläche im $\mathbb{R}^3$:

a) $f(x,y) = x - 6$,

b) $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$, für $|y| \le 1$,

c) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2y}$, $y \neq 0$,

d) $f(x,y) = 10 - \sqrt{x^2+y^2}$,

f) $f(x,y) = (x+1)(y-3)$.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die Folgen $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\left\{\mathbf{y}^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^3$ auf Konvergenz

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} 3^{-k} + \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ \frac{4k^2+2k+1}{3k^2+1} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mathbf{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{2}{k}\right)^k \\ 3^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ (-1)^k \frac{2}{k} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 **Ü2** 17.8**.** Die folgenden Grenzwerte sind - falls sie existieren - zu berechnen.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,3)} \frac{x-3}{x-y}$,

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$.

Aufgabe 6 Ü2 17.9. a; b;

Welche der folgenden Funktionen f sind im Ursprung stetig?

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy\left(y^2-x^2\right)}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Was passiert, falls in b) der Wert $f(0,0) = 1$ gewählt wird?

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich, Übungsaufgaben zur Analysis **Ü2**
Teubner, Stuttgart/Leipzig, 5. Auflage 1997
(Reihe Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler=MfIN)