Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

**Mathematik II**
**für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)**

3. Übung, 18.4. - 22.4.2022

**Aufgabe 1** **Ü2** 17.12. b, d; 17.15. b, e, g, h.

**17.12.** Für die folgenden Funktionen sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung allgemein und an der Stelle $(x_0, y_0)$ zu ermitteln.

**b)** $f(x,y) = \cos(e^{xy} + xy)$, $(x_0, y_0) = (0,1)$,
**d)** $f(x,y) = \ln(2 - e^{x-y})$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

**17.15.** Von der Funktion $f$ sind alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung zu bilden

**b)** $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$,
**e)** $f(x,y) = xy \arcsin x$,
**g)** $f(x,y) = y \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \tan y + \frac{x-3y}{x-1}$,
**h)** $f(x,y) = y^x + x^y$.

**Aufgabe 2** Für die Differenz $C_p - C_V$ der molaren Wärmekapazitäten bei konstantem Druck $p$ bzw. konstantem Molvolumen $V = V_{molar}$ gilt

$$C_p - C_V = -T \frac{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right]^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} .$$

(**Information:** Die Schreibweise $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ usw. ist in der Chemie üblich und bedeutet mathematisch nichts anderes als $\frac{\partial p}{\partial T}$ . Die Chemiker möchten lediglich zum Ausdruck bringen, dass die Größe, die im Index der Klammer, hier $V$, steht, konstant gehalten wird.)

**a)** Bestimmen Sie diese Differenz für ein schwach reales Gas, das der Zustandsgleichung

$$pV = RT\left(1 + \frac{B}{V}\right)$$

genügt ($p$ Druck, $V$ Molvolumen, $T$ absolute Temperatur; $R > 0$ , $B > 0$ const.), wobei Sie zunächst nach $p = p(T,V)$ umstellen. Dabei soll die Differenz $C_p - C_V$ am Ende nur noch von der Variablen $V$ abhängen.

**b)** Vergleichen Sie die Werte für $C_p - C_V$ beim schwach realen Gas und beim idealen Gas ($pV = RT$). Berechnen Sie hierzu zunächst den Ausdruck für das ideale Gas und zeigen Sie, dass dieser konstant ist.

**Aufgabe 3** Gegeben Sei die Funktion $f$ mit

$$f(x,y) = xe^{\frac{y}{x}}.$$

**a)** Berechnen Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils die Richtungsableitung von $f$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,0)$ in Richtung des angegebenen Vektors $\mathbf{d}$. In welche dieser vier Richtungen wachsen die Funktionswerte von $f$, in welche Richtungen fallen sie?

$$(i)\ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (iv)\ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**b)** Nun allgemeiner: In welche Richtungen $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wachsen die Funktionswerte von $f$, in welche Richtungen fallen sie?

**c)** In welche der vier Richtungen aus Teilaufgabe a) hat $f$ den stärksten Anstieg? Teilen Sie zur Beantwortung dieser Frage die in a) berechneten Richtungsableitungen jeweils durch $|\mathbf{d}|$ und vergleichen Sie die Werte.

**Aufgabe 4 (Richtungsableitung und Nicht-Differenzierbarkeit)** Zeigen Sie: Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

existieren im Nullpunkt **alle** Richtungsableitungen, insbesondere existieren auch alle partiellen Ableitungen, jedoch ist $f$ dort nicht (total) differenzierbar.

**Aufgabe 5** Bilden Sie die gemischten partiellen Ableitungen 2. und 3. Ordnung von

$$f(x,y) = y - xe^y + x$$

und bestätigen Sie damit für diese Funktion den Satz von Schwarz.

**Aufgabe 6** Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass $f$ überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) .$$

Was folgt hieraus bezüglich der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen bzw. der (totalen) Differenzierbarkeit von $f$ in $(0,0)$?

**Zusatzaufgabe aus der chemischen Anwendung (Wird nicht besprochen, sondern Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen.)** Die Van-der-Waalssche Zustandsgleichung für reale Gase lautet

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT \qquad (a > 0 \ , \ b > 0 \ , \ R > 0 \text{ sind Konstanten})$$

(**Nur zur Information:** $p$ bezeichnet den Druck, $v$ das (molare) Volumen, $T$ die Temperatur in Kelvin, $R$ ist die universelle Gaskonstante. $a$ und $b$ sind stoffspezifische Parameter, wobei $b$ das Binnenvolumen bezeichnet, und $a$ bzw. $\frac{a}{v^2}$ den Binnendruck.)

**a)** Untersuchen Sie, welche qualitative Gestalt die Höhenlinien der Funktion $T = T(p,v) = \frac{1}{R}\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b)$ zu verschiedenen geeignet gewählten konstanten Temperaturen $T$ besitzen (im Wesentlichen 3 verschiedene Typen) und stellen Sie mehrere in einem $p$-$v$-Diagramm dar, also als Graphen der Funktion $p_T(v)$ zu der jeweils festen Temperatur $T$ .

**b)** Informieren Sie sich, zum Beispiel durch Googlen, über den Begriff Maxwell-Konstruktion bzw. Maxwell-Gerade beim Van-der-Waals Gas. Was ist der Sinn und was hat das mit Siedeverzug beim Erhitzen einer Flüssigkeit bzw. einer unterkühlten Flüssigkeit zu tun?

**c)** Finden Sie, z.B. im Atkins (physikalische Chemie), eine dreidimensionale Darstellung des Graphen der Funktion $T(p,v)$ , bzw. $p(v,T)$ .

---

**Aufgabensammlungen:**


| | | |
|---|---|---|
| Wenzel/Heinrich, | Übungsaufgaben zur Analysis<br>Teubner, Stuttgart/Leipzig, 5. Auflage 1997<br>(Reihe Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler=MfIN) | **Ü2** |