Fakultät Mathematik
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr
SS 2022

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

4. Übung, 25.04. - 29.04.2022

Aufgabe 1 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir betrachten im Folgenden nur die Stellen, an denen $\nabla f \neq \mathbf{0}$ ist. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$ in Richtung eines normierten Vektors $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ihren maximalen Wert annimmt, wenn $\mathbf{r}$ in Richtung des Gradienten von f zeigt (Richtung des steilsten Anstiegs!) und ihren minimalen Wert annimmt, wenn $\mathbf{r}$ in Gegenrichtung des Gradienten von f zeigt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ die Ihnen aus der Schule bekannte Formel für den Winkel $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ zwischen den beiden Vektoren

$$\cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

gilt.

Aufgabe 2 Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$. Zeigen Sie mittels der Definition der (totalen) Differenzierbarkeit, dass f (total) differenzierbar ist, und bestimmen Sie damit den zugehörigen Vektor $\mathbf{w}$, also die Ableitung von f. Woran erinnert Sie das Ergebnis?

Zusatzaufgabe (analog zur Vorlesung) (Lösung wird nicht besprochen, sondern hochgeladen) **Ü2** 17.23. b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die durch den Graphen von f gegebene Fläche im Punkt $P(2, 1, f(2, 1))$.

Aufgabe 3 **Ü2** 18.9. a, d) Approximieren Sie die gegebene Funktion durch das Taylorpolynom 1. und 2. Ordnung um die angegebene Entwicklungsstelle P.

a) $f(x, y) = y \ln(y - 3x)$, in $P(0, 1)$,

d) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, in $P(1, 1)$.

Aufgabe 4 Die allgemeine Zustandsgleichung $p = F(V, T)$ approximiere man durch ein Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt (V_0, T_0)

a) für ideale Gase, d.h. $F(V, T) = \frac{RT}{V}$, bis zu den quadratischen Gliedern einschließlich.

b) für reale Gase, d.h. $F(V, T) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$, bis zu den linearen Gliedern einschließlich.

Aufgabe 5 **Ü2** 17.18. a, c) Berechnen Sie das totale Differential von :

a) $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$,

b) $f(x, y) = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Aufgabe 6 Zur Bestimmung der Brennweite f eines Kugelspiegels wurden Gegenstandsweite $g = (12 \pm 0.1)$ cm und Bildweite $b = (5 \pm 0.05)$ cm gemessen. Welcher absolute und welcher relative Fehler ergibt sich für die gemäß $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ berechnete Brennweite?

Zusatzaufgabe (Wird nicht vorgerechnet, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen) Man zeige die folgenden als MAXWELLsche Relationen bekannten Gleichungen:

a) $\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$ b) $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ c) $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$ d) $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Auf diese Weise werden die partiellen Ableitungen, welche die Entropie S enthalten, durch die experimentell erfassbaren Größen p, V und T ausgedrückt.

Man betrachte die per Definition so erklärten Funktionen U (innere Energie), $F := U - TS$ (Freie Energie, in der Chemie auch mit A bezeichnet), $H = U + pV$ (Enthalpie) und $G = H - TS$ (Gibbssche freie Enthalpie) in Abhängigkeit von je zwei der Zustandsvariablen S, T, V und p (z.B. $F = F(V,T)$, $G = G(p,T)$, $H = H(S,p)$, $U = U(S,V)$, bilde ihre totalen Differentiale und berücksichtige den 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik sowie den Satz von SCHWARZ.

Zusatzfrage: Was haben die MAXWELLschen Relationen mit dem Satz: *"Heute saugt unser Vampir auch tagsüber ganz prächtig"* zu tun.

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich,	Übungsaufgaben zur Analysis Teubner, Stuttgart/Leipzig, 5. Auflage 1997 (Reihe Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler=MfIN)	**Ü2**