Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

5. Übung, 02.05. - 06.05.2022

Aufgabe 1

a) Durch die Gleichung
$$F(x,y) = y^2 - x = 0$$
ist eine Kurve gegeben. Versuchen Sie mit Hilfe der Technik des impliziten Differenzierens in den Punkten $P(0,0)$ und $Q(1,1)$ die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ sowie $\frac{dx}{dy}$ der implizit definierten Funktion zu bestimmen. Falls dies rechnerisch nicht möglich sein sollte, machen Sie sich anhand einer Skizze deutlich, warum die Ableitung nicht existieren kann.

b) **Ü2 18.7. a)** Durch die Gleichung
$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 25 = 0$$
ist eine Funktion z mit $z = z(x,y)$ in impliziter Form gegeben. Welchen Wert haben die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von z im Punkt $P(4,3,0)$?

Aufgabe 2 Für ein Gas, das der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung
$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (a > 0\ ,\ b > 0\ ,\ R > 0 \text{ sind Konstanten})$$
genügt, berechne man mittels impliziter Differentiation der obigen Gleichung für $V(T,p)$:
$$\text{a)}\ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad\qquad \text{b)}\ \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Aufgabe 3 Für die ANTOINEsche Zustandsgleichung
$$pV - C\left(A - B\sqrt{p} + T\right) = 0 \quad (A, B, C \text{ const.}) \tag{$*$}$$
bestätige man die Gültigkeit der Beziehung
$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -1 \tag{$**$}$$
($V = V_{molar}$ Molvolumen, T absolute Temperatur, p Druck), indem man

a) **(Zusatzaufgabe, wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen)** nach $V = V(T,p)$ und $T = T(p,V)$ auflöst und ableitet, sowie $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ berechnet, indem man zunächst mittels der p-q-Formel zur Lösung einer quadratischen Gleichung $(*)$ nach $\sqrt{p}$, und somit durch Quadrieren nach $p = p(T,V)$ auflöst und ableitet.

b) Die Ausdrücke $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$ und $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ durch implizite Differentiation ermittelt.

c) Zeigen Sie, dass $(**)$ für jedes thermodynamische System gilt, das durch $f(p,V,T) = 0$ mit stetig differenzierbarer Funktion f beschrieben wird. Nutzen Sie dafür den Zusammenhang der in $(**)$ auftretenden impliziten Ableitungen mit den zugehörigen partiellen Ableitungen von f.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die folgenden Matrizen mit dem Kriterium der Vorlesung auf Definitheit (positiv, negativ, indefinit oder nichts davon):

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Zusatzaufgabe: (wird nicht besprochen, sondern Lösung gegebenenfalls hochgeladen) Zeigen Sie: Für eine reelle symmetrische 2×2-Matrix A gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow \left(a > 0 \text{ und } ad - b^2 > 0\right).$$

Aufgabe 5 Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x, y) = x^2 (2 - y) - y^3 + 3y^2 + 9y.$$

a1) Berechnen Sie die stationären Punkte von f.

a2) **(Falls Sie a1) nicht lösen können)** Überprüfen Sie, dass die Funktion f die stationären Punkte $P_1(0, -1)$, $P_2(0, 3)$, $P_3(-3, 2)$ und $P_4(3, 2)$ besitzt.

b) Untersuchen Sie, an welchen der zuvor genannten Punkten lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 6 **Ü2 18.36.** **a)** Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimme man für die folgenden Wertepaare $P_i(x_i, y_i)$ $i = 1, 2, ..., 5$ eines Messvorgangs die Ausgleichgerade $y = ax + b$:

$$P_1(0, 1), \ P_2(1, 4), \ P_3(2, 7), \ P_4(3, 8), \ P_5(4, 10).$$

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich,	Übungsaufgaben zur Analysis Teubner, Stuttgart/Leipzig, 5. Auflage 1997 (Reihe Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler=MfIN)	**Ü2**