Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

6. Übung, 09.05. - 13.05.2022

Aufgabe 1 **Ü2** 18.36 b), c) Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimme man für die folgenden Wertepaare $P(x_i, y_i)$ eines Messvorganges die Ausgleichskurve $y = f(x)$ der angegebenen Art

b) $P_1(0,15)$, $P_2(1,5)$, $P_3(2,1)$, $P_4(3,1)$, $P_5(4,3)$, Ausgleichskurve $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$,

c) $P_1(1,12)$, $P_2(2,14)$, $P_3(3,18)$, $P_4(4,16)$, Ausgleichskurve $y = a + \frac{b}{x}$.

Aufgabe 2 **Ü2** 18.39 Von einem Gas wurden der Druck p und das Volumen V gemessen; man erhielt als Maßzahlen:

V	54.3	61.8	72.4	88.7	118.6	194.0
p	61.2	49.5	37.6	28.4	19.2	10.1

.

Bestimmen Sie die Konstanten κ und C für die adiabatische Zustandsänderung $pV^\kappa = C$ mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

Hinweis: Überführen Sie den gegebenen funktionalen Zusammenhang durch Logarithmieren in eine Geradengleichung.

Aufgabe 3 Während einer langsam verlaufenden chemischen Reaktion wird im Abstand von je einer Stunde die Temperatur ϑ im Reaktionsgefäß gemessen. Wegen eines Ausfalls des Messwertgebers fehlt der Messwert nach Ablauf von zwei Stunden. Die übrigen Daten lauten

t [h]	0	1	3	4
ϑ [°C]	10	10	16	19

a) **(Zusatzaufgabe: Funktionsbestimmung wie in der Schule)** Ermitteln Sie zu den gegebenen Daten ein Interpolationspolynom p (d.h. ein Polynom, dessen Graph durch die angegebenen Punkte geht) möglichst niedrigen Grades und berechnen Sie dessen Funktionswert an der Stelle $t = 2$ als Ersatz für die fehlende Messung.

b) Bestimmen Sie nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Näherung f vom Typ

$$f(t) = a + bt(t-1)$$

für ϑ. Berechnen Sie dazu anhand der gegebenen Daten die Koeffizienten a, b im Ansatz. Wie lautet $f(2)$?

Zusatzaufgabe: Gegeben seien die n Punkte $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ für $k = 1, 2, 3, ..., n$. Bestimmen Sie den sogenannten geometrischen Schwerpunkt $(x_s, y_s) \in \mathbb{R}^2$, der die Summe der quadratischen Abstände zu den Punkten (x_k, y_k) minimiert. Wie lautete der zugehörige Minimalwert?

Aufgabe 4 Nach **Ü2** 18.20 a), 18.19 b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion alle Punkte, die als Extremstellen für die gegebene Funktion f unter der jeweiligen Nebenbedingung in Frage kommen. Falls auf einfache Weise möglich, bestimme man die Art des Extremums.

a) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 3$ unter der Nebenbedingung $3y + 2x = 15$,

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^3 + y^3 + 1 = 0$.

Aufgabe 5 **Ü2** 18.23 Welche Punkte der durch die Gleichung $x^2 + y^2 + xy = 1$ gegebenen Ellipse haben vom Koordinatenursprung extremalen Abstand? Mit Hilfe des Ergebnisses skizziere man die Ellipse.

Aufgabe 6 (Minimaler Materialverbrauch) Ein kreiszylindrischer, oben offener Behälter mit dem Volumen $V > 0$ soll aus Blech der Stärke $a > 0$ unter möglichst wenig Materialeinsatz hergestellt werden. Berechnen Sie den inneren Radius $r > 0$ und die Höhe $h > 0$ dieses Behälters sowie den Materialverbrauch m.

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich, Übungsaufgaben zur Analysis **Ü2**
Teubner, Stuttgart/Leipzig, 5. Auflage 1997
(Reihe Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler=MfIN)