Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic , Dr. F. Morherr

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

7. Übung, 16.05. - 20.05.2022

Aufgabe 1 Gegeben sind folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\,|x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$:

$$U_1 := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \left| \sum_{k=1}^{3} x_k^2 = 0 \right.\right\},\ U_2 := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\,|2x_1 - 3x_2 = x_3 + x_1 + 2\right\},$$

$$U_3 := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \left| \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \leq 1 \right.\right\},\ U_4 := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\,|2x_1 + 3x_2 = x_1\right\}.$$

Entscheiden Sie, ob $U_1, ..., U_4$ Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind und geben Sie gegebenenfalls je eine Basis an.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Mengen

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \alpha = 2\beta \right\},\ U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \alpha = \beta \right\}$$

Unterräume des $\mathbb{R}^2$ sind. Bestimmen Sie $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2 = \{\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}\,|\mathbf{u_1} \in U_1, \mathbf{u_2} \in U_2\}$.

Aufgabe 3 Verschiedene Basen:

a) Untersuchen Sie, ob $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Wenn nicht, welchen Unterraum spannen diese Vektoren auf.

b) Untersuchen Sie, ob $C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

c) Untersuchen Sie, ob $D := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Stellen Sie die kanonischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ als Linearkombination dieser Vektoren dar.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_4 \\ \alpha_2 + \alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_1 & \alpha_3 + \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_3 & \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_4 + \alpha_1 & \alpha_4 + \alpha_2 & \alpha_4 + \alpha_3 & \alpha_4 + \alpha_4 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}.$$

Hinweis zu B und C: Fallunterscheidung.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass für quadratische Matrizen gilt: A und ihre Transponierte $A^\intercal$ haben die gleichen Eigenwerte.

Aufgabe 6 Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) Bestimmen Sie die Bildpunkte von $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$, $D = (1,1)$ und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem ein.

b) Vergleichen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ mit dem des transformierten Vierecks aus Aufgabenteil a). Welche Rolle spielt hierbei die Determinante von A?

c) Welche der Vektoren $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,1)$, $\mathbf{w} = (-2,-1)$, $\mathbf{x} = (-2,1)$ werden durch f auf Vielfache von sich selbst abgebildet? Schlussfolgern Sie daraus die Eigenwerte der Matrix A.

d) Bestimmen Sie zum Vergleich die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

Wiederholungsaufgaben zur Mathematik 1 (Rechnen mit Matrizen):

W1 Gegeben seien
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^\mathsf{T}C\mathbf{x}$, $\mathbf{c}\mathbf{x}^\mathsf{T}$ und $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.

b) Welche aus der Schule bekannten geometrischen Gebilde werden durch (i) $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1$, (ii) $\mathbf{x}^\mathsf{T}C\mathbf{x} = 1$, (iii) $\mathbf{x}^\mathsf{T}C\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1$ und (iv) $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 1$ beschrieben?
Hinweis zu (ii), (iii): Merziger, Seite 35ff.

W2 Berechnen Sie die Determinante $\det A$ der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3+i & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1+2i & 5 \end{pmatrix}.$$

W3 Vorarbeit zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Differentialgleichungssystemen (Wiederholung Gaußalgorithmus):

a) Untersuchen Sie, für welche Werte s das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = 0$ mit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & s & 2 \\ 1 & -2 & -s \end{pmatrix}$$
genau eine, unendlich viele bzw. keine Lösung besitzt, und geben Sie diese (falls vorhanden) an.

b) Bestimmen Sie diejenige spezielle Lösung, die zusätzlich der Gleichung
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
genügt.

c) Für welche Werte s existiert A^{-1}? Berechnen Sie für $s = 1$ die Matrix A^{-1}.

d) Geben Sie ein s und einen Vektor $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ an, so dass das System $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ unendlich viele Lösungen besitzt.