Fakultät Mathematik SS 2022
Institut für Numerische Mathematik / Institut für Analysis
Dr. J. Martinovic, Dr. F. Morherr

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

8. Übung, 23.05. - 27.05.2022

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrizen durch

a) Entwicklung nach der ersten Zeile,

b) Entwicklung nach der 2. Spalte,

c) Umformung in obere Dreiecksmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 6 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe Im $\mathbb{R}^2$ werden die Spiegelungen S_1 an der Geraden g_1 durch die Punkte $(0,0)$ und $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ sowie die Spiegelungen S_2 an der zu g_1 senkrechten Geraden g_2 durch den Punkt $(0,0)$ betrachtet.

a) Überlegen Sie graphisch, welche Vektoren durch S_1 und S_2 auf Vielfache von sich selbst abgebildet werden und bestimmen Sie so die Eigenwerte und Eigenvektoren der beiden Abbildungen S_1und S_2.

b) Wählen Sie eine geeignete Basis $\varphi = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ in $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie in dieser Basis die Abbildungsmatrizen von S_2, S_1 und von $S_2 \circ S_1$.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume von $S_2 \circ S_1$. Welche geometrische Abbildung wird durch $S_2 \circ S_1$ beschrieben?

d) Bestimmen Sie die Matrix zu $S_2 \circ S_1$ in der kanonischen Basis $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\lambda - \lambda^3$ das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

wird. Berechnen Sie dann die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Geben Sie ferner eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Ist diese Matrix S bzw. die entstehende Diagonalmatrix eindeutig?

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie von den folgenden Matrizen die Eigenwerte und ein maximales System linear unabhängiger Eigenvektoren:

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie aufgrund der algebraischen und geometrischen Vielfachheiten jeweils, ob die Matrizen diagonalisierbar sind oder nicht.

b) Berechnen Sie alle komplexen Eigenwerte und komplexen Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 Gegeben sei eine symmetrische Matrix A. Zeigen Sie: Wenn A positiv (bzw. negativ) definit ist, dann sind alle Eigenwerte von A positiv (bzw. negativ).

Bemerkung: Die Rückrichtung der obigen Aussage gilt ebenfalls, ist aber etwas schwieriger zu beweisen und soll hier außen vor bleiben.

Aufgabe 5 Das Ziel dieser Aufgabe ist, Matrizendiagonalisierung dazu verwenden, eine explizite Formel für eine rekursiv gegebene Folge zu finden. Diese kann zum Beispiel aus einem diskreten Populationsmodell herstammen oder die Anzahl der Teilchen einer chemischen Reaktion bzw. eines Zerfalls modellieren. Wir betrachten hier die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = a_1 = 1$ und der Rekursionsvorschrift

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ mit } n \geq 2.$$

Vorgehensweise:

(i) Machen Sie sich klar, dass gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Die quadratische Matrix bezeichnen wir mit A.

(ii) Schlussfolgern Sie aus (i) die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

(iii) Diagonalisieren Sie A und betrachten Sie die Matrix S aus den Eigenvektoren zu A, so dass gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Machen Sie sich klar, dass gilt

$$A^{n-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{n-1} S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} S^{-1}$$

und berechnen Sie damit A^{n-1}.

(v) Aus $(*)$ finden Sie damit eine explizite Darstellung für a_n.

Zusatzaufgabe (Für die harten Rechner, Aufgabe wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen) Die aus der Kaninchenvermehrung herstammende Folge der Fibonacci-Zahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1 \text{ und } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Leiten Sie einen geschlossenen Ausdruck für die n-te Fibonacci-Zahl f_n her, indem Sie den Vektor

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

mittels einer geeigneten Matrix A durch den Vektor $\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix}$ ausdrücken und dies Iterieren. Berechnen Sie dann die Matrix A^{n-1} analog zur Vorgehensweise in Aufgabe 5 und finden Sie damit einen expliziten Ausdruck für f_n. Was hat dies mit dem *goldenen Schnitt* zu tun.

Hinweis: Gehen Sie genauso vor wie in Aufgabe 5. Versuchen Sie, durch geeignetes "Nichteinsetzen" einiger Terme, sondern Ausnutzen algebraischer Beziehungen, die Terme nicht zu kompliziert werden zu lassen, um die Rechnungen zu vereinfachen)