

Mathematik II
für Studierende der Fachrichtungen Chemie, Lebensmittelchemie und Lehramt (BBS)

9. Übung, 30.05. - 03.06.2022

Aufgabe 1 Untersuchen Sie, welche der gegebenen Funktionen

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = e^x, \quad f_4(x) = \frac{1}{x}, \quad f_5(x) = \frac{3x^2 - 2}{x}$$

die Differentialgleichung

$$f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x) = 0 \text{ für } x \in (0, \infty). \quad (\text{DGL})$$

erfüllen. Welche der (DGL) lösenden Funktionen besitzen in $x = 2$ den Funktionswert 5?

Aufgabe 2 Veranschaulichen Sie sich mittels GeoGebra (Befehl: Richtungsfeld($f(x, y)$)), wobei $y' = f(x, y)$) oder eines anderen CAS-Systems das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen. Zeichnen Sie jeweils zwei geeignete Isoklinen und zwei geeignete Lösungskurven ein. Dazu müssen sie diese nicht ausrechnen, sondern orientieren Sie sich an den Steigungspfeilen!

a) $y' = y(1 - y)$ b) $y' = x$ c) $y' = xy$ d) $y' = e^{-x} - y$

Aufgabe 3 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme mit der angegebenen Substitution

- a) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$, $y(e) = 0$, Substitution: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.
- b) $y' = x^2 + 8xy + 16y^2$, $y(0) = 0$, Substitution: $z(x) = x + 4y(x)$.
- c) $y'' = e^y y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, Substitution: $p = y'$ mit $p = p(y)$ (beachte $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = pp'$).
- d) $y' - y + xy^2 = 0$, Substitution $z(x) = \frac{1}{y(x)}$.

Aufgabe 4 Der Zerfallsprozess eines radioaktiven Stoffes kann durch das Anfangswertproblem

$$N'(t) = -\lambda N(t), \quad N(0) = N_0$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet $N(t)$ die Anzahl der Atomkerne zum Zeitpunkt t , $N_0 > 0$ die Anzahl der Atomkerne zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ und $\lambda > 0$ die stoffspezifische Zerfallskonstante.

- a) Bestimmen Sie die Lösung $N(t)$ des obigen Anfangswertproblems.
- b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zerfallskonstanten λ und der Halbwertszeit $t_{1/2}$ eines radioaktiven Stoffes.
- c) Das für die Altersbestimmung organischer Materialien bedeutsame Kohlenstoff-Isotop $^{14}_6C$ besitzt eine Halbwertszeit von 5730 Jahren. Welche Zerfallskonstante λ besitzt $^{14}_6C$?

Aufgabe 5 Nach **Ü2** 24.11. a) c) 24.12. b) d). Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen bzw. die Lösung der angegebenen Anfangswertprobleme

- a) $(x^2 + 2)y' + xy = x(x^2 + 2)$,
- b) $xy' + (y + 1)\ln x = 0$, $y(1) = -1$,
- c) $xy' + y = x \sin x$,
- d) $(t^2 + t - 2)x' - 3x = (t - 1)^2$, $x(0) = -1$.

Aufgabe 6 Der Zerfall von Distickstoffmonoxid (Lachgas, N_2O) unter dem Einfluss eines Platinkatalysators lässt sich durch das Anfangswertproblem

$$x'(t) = k \cdot \frac{a - x(t)}{1 + bx(t)}, \quad x(0) = 0$$

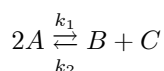
beschreiben, mit gewissen Konstanten $a, b, k > 0$. Dabei bezeichne $x(t)$ die Anzahl der zerfallenen Mole von N_2O zum Zeitpunkt t .

- Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems und geben Sie diese in der Gestalt $t(x)$ an.
- Skizzieren Sie die Lösung $t(x)$ für $0 \leq x < a$.
- Wie erhalten Sie aus b) den Graphen der Lösung $x(t)$?

Zusatzaufgabe aus einem Schulbuch (Bigalke, Köhler: Mathematik 3.2, Cornelsen) (wird nicht besprochen, die Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen) Der überwiegende Teil der Raketentriebwerke arbeitet mit chemischen Treibstoffen (Wasserstoff, Kerosin, Hydrazin, Aluminiumpulver mit Ammoniumperchlorat als Oxidator). Eine Rakete besitze die Startmasse $m_0 = 20000$ kg. Darin enthalten sei der Brennstoffvorrat $b_0 = 13000$ kg. Die Raketenmotoren verarbeiten 125 kg Brennstoff pro Sekunde, den Sie als Treibgas ausstoßen. Die auf diese Weise erzeugte Schubkraft betrage während der gesamten Brenndauer konstant $F_S = 400000$ Newton.

- Wie groß ist die Raketenmasse $m(t)$ zur Zeit t nach dem Start?
- Wie groß ist die Gewichtskraft $F_G(t)$ der Rakete zur Zeit t nach dem Start (*Hinweis: $F_G = mg$, wobei $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$*)?
- $v(t)$ sei die Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t . Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit v und lösen Sie diese (*Hinweis: $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$*).
- Wie lange dauert es bis zum Brennschluss? Wie groß ist die Geschwindigkeit der Rakete bei Brennschluss? Warum benötigt man Mehrstufenraketen, um die für eine Erdumlaufbahn nötige Geschwindigkeit zu erreichen?

Zusatzaufgabe: (Für die ganz hart Rechnenden, wird nicht besprochen, Lösung wird gegebenenfalls hochgeladen) Bei der chemischen Reaktion



mit den Geschwindigkeitskonstanten k_1 und k_2 , die in der Gasphase abläuft, genüge der Partialdruck $p_A(t)$ des Stoffes der Differentialgleichung

$$\frac{dp_A}{dt} = -k_1 p_A^2 + k_2 \left(p_{A,0} - \frac{1}{2} p_A \right)^2$$

mit der Anfangsbedingung $p_A(0) = p_{A,0}$. Man bestimme $p_A(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} p_A(t)$.

Hinweis: Man bringe die Differentialgleichung zunächst auf die Form

$$\frac{dp_A}{dt} = c \left((p_A - a)^2 - b^2 \right),$$

mit geeigneten a, b, c , dann Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung.

Aufgabensammlungen:

Wenzel/Heinrich, Übungsaufgaben zur Analysis Ü2
 Teubner, Stuttgart/Leipzig, 5. Auflage 1997
 (Reihe Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler=MfIN)