Normalengleichungen

Für eine beliebige $m \times n$ Matrix A erfüllt jede Lösung x des Ausgleichsproblems

$$|Ax - b| \to \min$$

die Normalengleichungen

$$A^{\mathrm{t}} A x = A^{\mathrm{t}} b\,,$$

Normalengleichungen

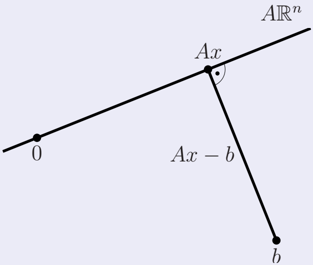
Für eine beliebige $m \times n$ Matrix A erfüllt jede Lösung x des Ausgleichsproblems

$$|Ax - b| \to \min$$

die Normalengleichungen

$$A^{\mathrm{t}} A x = A^{\mathrm{t}} b\,,$$

d.h. das Residuum $r = Ax - b$ ist orthogonal zu dem von den Spalten von A aufgespannten Unterraum $A\mathbb{R}^n = \operatorname{Bild} A\,.$



Die Matrix $A^{\mathrm{t}}A$ ist quadratisch und hat Dimension n. Sie ist genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{Rang} A = n$, d.h. wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.
Die Normalengleichungen sind auch im singulären Fall lösbar; die Lösung ist dann jedoch nicht eindeutig.

Beweis:

Minimalität von $x \quad \Leftrightarrow$

$$|A(x+ty)-b|^2 \geq |Ax-b|^2, \forall t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$$

Vereinfachung mit $r = Ax - b \quad \rightsquigarrow$

$$p = \underbrace{tr^{\mathrm{t}}Ay + ty^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}r}_{2ty^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}r} + t^2y^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}Ay \geq 0$$

$(r^{\mathrm{t}}Ay = y^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}r)$
p: nicht-negative Parabel in t
$p \geq 0$ genau dann, wenn $y^{\mathrm{t}}(A^{\mathrm{t}}r) = 0$
y beliebig $\quad \rightsquigarrow \quad A^{\mathrm{t}}r = 0$

Beispiel:

(i) Rang A maximal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalengleichungen

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eindeutige Lösung $x = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ mit Residuum

$$r = Ax - b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Rang A nicht maximal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängige Spalten $\rightsquigarrow$ singuläre Normalengleichungen

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

nicht eindeutig, aber eindeutiges Residuum

$$r = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 - 2t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ -12/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Computer-Tomographie
Rekonstruktion einer Dichte $x(u, v)$ aus dem Intensitätsverlust von Röntgenstrahlen entlang von k Bündeln aus ℓ parallelen Geraden

$$\mathcal{R}_i : \ (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \ldots, m = k\ell$$

Beispiel:

Computer-Tomographie
Rekonstruktion einer Dichte $x(u, v)$ aus dem Intensitätsverlust von Röntgenstrahlen entlang von k Bündeln aus ℓ parallelen Geraden

$$\mathcal{R}_i : \ (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \ldots, m = k\ell$$

Approximation von x durch eine stückweise konstante Funktion auf einem Raster von Quadraten $\mathcal{Q}_j$ und eine Näherung für die Linienintegrale

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

Beispiel:

Computer-Tomographie
Rekonstruktion einer Dichte $x(u, v)$ aus dem Intensitätsverlust von Röntgenstrahlen entlang von k Bündeln aus ℓ parallelen Geraden

$$\mathcal{R}_i : \ (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \ldots, m = k\ell$$

Approximation von x durch eine stückweise konstante Funktion auf einem Raster von Quadraten $\mathcal{Q}_j$ und eine Näherung für die Linienintegrale

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

mit x_j einer Approximation von $x(u, v)$ auf $\mathcal{Q}_j$ und

$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap \mathcal{Q}_j|$$

der Länge des Durchschnitts der Geraden $\mathcal{R}_i$ mit dem Quadrat $\mathcal{Q}_j$

Beispiel:

Computer-Tomographie
Rekonstruktion einer Dichte $x(u, v)$ aus dem Intensitätsverlust von Röntgenstrahlen entlang von k Bündeln aus ℓ parallelen Geraden

$$\mathcal{R}_i : \ (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \ldots, m = k\ell$$

Approximation von x durch eine stückweise konstante Funktion auf einem Raster von Quadraten $\mathcal{Q}_j$ und eine Näherung für die Linienintegrale

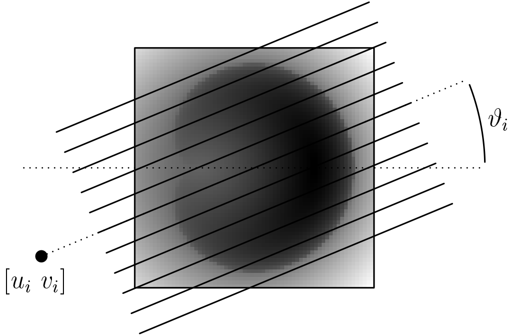
$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

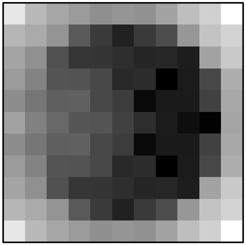
mit x_j einer Approximation von $x(u, v)$ auf $\mathcal{Q}_j$ und

$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap \mathcal{Q}_j|$$

der Länge des Durchschnitts der Geraden $\mathcal{R}_i$ mit dem Quadrat $\mathcal{Q}_j$

$m >> n \ \rightsquigarrow$ Ausgleichsproblem zur Bestimmung von x aus den Daten b





11×11 Raster, Winkel

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \ldots$$

mit 11 parallelen Scan-Richtungen im Abstand der Rasterquadratbreite