Leider gilt aber nur:

Satz 1.3.24. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wenn $A\cdot B = B\cdot A$ gilt („A und B kommutieren"), dann gilt*

$$e^{tA}\cdot e^{tB} = e^{t(A+B)} = e^{tB}\cdot e^{tA}.$$

Beispiel 1.3.25. Wir betrachten die Anfangswertaufgabe $y' = Ay$, $y(x_0) = y_0 = (y_{01}, y_{02})$ mit $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Wir zerlegen A in der Form

$$A = \alpha E + \beta B \quad \text{mit } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da αE mit jeder anderen 2×2 Matrix kommutiert, folgt

$$\begin{aligned} e^{A} = e^{\alpha E+\beta B} = e^{\alpha E}\cdot e^{\beta B} &= \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha}\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{(x-x_0)A}\cdot y_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{\alpha(x-x_0)}y_{01}\cos(\beta(x-x_0)) - e^{\alpha(x-x_0)}y_{02}\sin(\beta(x-x_0)) \\ e^{\alpha(x-x_0)}y_{01}\sin(\beta(x-x_0)) + e^{\alpha(x-x_0)}y_{02}\cos(\beta(x-x_0)) \end{pmatrix}, \quad x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe.

1.3.5 Berechnung der Exponentialmatrix

Die Berechnung von e^{xA} für eine $n\times n$-Matrix A mit $n > 1$ ist im Allgemeinen schwierig. In einigen Fällen gelingt eine Anwendung von Satz 1.3.24 zur Zurückführung auf einfachere Matrizen.

Es sei v ein Eigenvektor von A zum reellen Eigenwert λ. Wir zeigen, dass dann $y(x) = e^{\lambda x}v$ eine Lösung von (1.20) ist: Es gilt

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}v = e^{\lambda x}\lambda v = e^{\lambda x}(Av) = A(e^{\lambda x}v) = Ay(x) \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.$$

Dies ist die Grundlage folgender Überlegungen:

I Reeller, einfacher Fall

Voraussetzung: Alle Eigenwerte von A sind reell und die algebraische Vielfachheit stimmt jeweils mit der geometrischen Vielfachheit überein.

Dann existiert eine Basis $(v_1,\dots,v_n)$ aus Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Durch

$$Y(x)=\begin{pmatrix} \top & & \top \\ e^{x\lambda_1}v_1 & \cdots & e^{x\lambda_n}v_n \\ \bot & & \bot \end{pmatrix}$$

ist eine Fundamentalmatrix Y zu (1.20) gegeben. Mit Satz 1.3.21 folgt

$$e^{xA}=Y(x)Y(0)^{-1}=\begin{pmatrix} \top & & \top \\ e^{x\lambda_1}v_1 & \cdots & e^{x\lambda_n}v_n \\ \bot & & \bot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \top & & \top \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \bot & & \bot \end{pmatrix}^{-1}.$$

Bemerkung 1.3.26. Die Voraussetzung ist insbesondere erfüllt, wenn A symmetrisch ist.

Beispiel 1.3.27. Betrachtet wird

$$y'=A\cdot y \qquad \text{mit } A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\lambda_1=7$ Eigenwert zum Eigenvektor $v_1=(1,-1,2)$. Weiter ist $\lambda_2=\lambda_3=1$ zweifacher Eigenwert mit den Eigenvektoren $v_2=(1,1,0)$, $v_3=(-2,0,1)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{xA}&=\begin{pmatrix} \top & & \top \\ e^{x\lambda_1}v_1 & \cdots & e^{x\lambda_n}v_n \\ \bot & & \bot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \top & & \top \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \bot & & \bot \end{pmatrix}^{-1} \\ &=\begin{pmatrix} e^{7x} & e^x & -2e^x \\ -e^{7x} & e^x & 0 \\ 2e^{7x} & 0 & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{7x}+5e^x & -e^{7x}+e^x & 2e^{7x}-2e^x \\ -e^{7x}+e^x & e^{7x}+5e^x & -2e^{7x}+2e^x \\ 2e^{7x}-2e^x & -2e^{7x}+2e^x & 4e^{7x}+2e^x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

II Komplexer und reeller, nichteinfacher Fall

Voraussetzung: Es sind nicht alle Eigenwerte reell oder die algebraische Vielfachheit stimmt nicht immer mit der geometrischen Vielfachheit überein.

In diesem Fall bilden die Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten keine Basis und wir finden keine Fundamentalmatrix in der obigen Weise.

Ein sehr effektives Verfahren, welches ohne die Berechnung von Eigenvektoren und ohne die Invertierung von Matrizen auskommt, ist das folgende Verfahren:

Putzer-Algorithmus zur Bestimmung von e^{xA}.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ die (reellen und komplexen) Eigenwerte von A entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit mehrfach gezählt.

Wir setzen:

$$\begin{aligned} P_0 &:= E\,, \\ P_j &:= (A-\lambda_j E)P_{j-1} \qquad \text{für } j \in \{1,\dots,n\}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich (zur Kontrolle verwendbar!)

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(A-\lambda_k E) = 0$$

(Satz von Cayley-Hamilton: Eine Matrix „erfüllt“ die eigene charakteristische Gleichung).

Nun bestimmen wir Funktionen $w_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nacheinander als Lösung folgender Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned} w_1' &= \lambda_1 \cdot w_1\,, \quad w_1(0) = 1\,, \\ w_j' &= \lambda_j \cdot w_j + w_{j-1}\,, \quad w_j(0) = 0 \qquad \text{für } j \in \{2,\dots,n\}\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathrm{e}^{xA} = \sum_{j=1}^{n} w_j(x) P_{j-1}\,.$$

Bemerkung 1.3.28. Mit Differentialgleichungen für komplexwertige Funktionen kann man wie für reellwertige umgehen. Die Störterme w_{j-1} sind Linearkombinationen von Exponentialfunktionen, so dass einfache Exponentialansätze zur Lösung führen.

Beispiel 1.3.29. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay + b(x)\,, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Bestimmung von e^{xA}: Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = \mathrm{i}$ und $\lambda_2 = -\mathrm{i}$. Damit ergeben sich

$$P_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = (A-\lambda_1 E)P_0 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

und zur Kontrolle

$$P_2 = (A-\lambda_2 E)P_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$w_1' = \lambda_1 w_1 = \mathrm{i} w_1\,, \quad w_1(0) = 1$$

ergibt sich

$$w_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,.$$

Betrachten wir nun

$$w_2' = \lambda_2 w_2 + w_1 = -\mathrm{i} w_2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad w_2(0) = 0.$$

Lösung zum homogenen Problem ist

$$w_{2,h}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} c, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

Mit dem Ansatz $w_{2,p}(x) = B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\mathrm{i} B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = -\mathrm{i} B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$

also $B_0 = \frac{1}{2\mathrm{i}}$. Somit folgt $w_2(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} c + \frac{1}{2\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Mit der Anfangsbedingung folgt $c = -\frac{1}{2\mathrm{i}}$. Damit gilt

$$w_2(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \right) = \sin x$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin x \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\sin x & \sin x \\ -\sin x & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\sin x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es verbleibt noch die Lösung des inhomogen Problems und der Anfangswertaufgabe.

1.4 Inhomogene Probleme

1.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Ziel ist nun die Lösung von (1.2).

Kennt man eine Fundamentalmatrix $Y(x)$ zu (1.8), so kann mit einem **Variationsansatz** eine partikuläre Lösung zu (1.2) berechnet werden. Man setzt an:

$$y_p(x) = Y(x) \cdot c(x)$$

mit freiem Vektor $c(x)$. Dann ergibt sich durch Einsetzen in (1.2):

$$A(x)Y(x)c(x) + b(x) = y_p'(x) = Y'(x) \cdot c(x) + Y(x) \cdot c'(x) = A(x)Y(x)c(x) + Y(x)c'(x)$$

und daher

$$b(x) = Y(x)c'(x).$$

Wir erhalten

$$c'(x) = Y(x)^{-1} b(x) \tag{1.21}$$

und damit

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t) \cdot b(t) \, \mathrm{d}t,$$

wobei $x_0 \in I$ beliebig ist und das Integral komponentenweise zu bestimmen ist (jeweils nur eine Stammfunktion).

Eine partikuläre Lösung von (1.2) ist also

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(t)\cdot b(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.22}$$

Für die Differentialgleichung (1.2) erhält man als Lösung $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, also

$$y(x) = Y(x)d + \int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(t)\cdot b(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } x \in I\,,$$

wobei $d \in \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in I$ beliebig sind.

Ist zusätzlich die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ zu erfüllen, dann ergibt sich $d = Y(x_0)^{-1}y_0$ und somit

$$y(x) = Y(x)Y(x_0)^{-1}y_0 + \int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(t)\cdot b(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } x \in I\,. \tag{1.23}$$

Beispiel 1.4.1. Wir können nun Beispiel 1.3.29 fortsetzen.

Lösung der Anfangswertaufgabe: Nach (1.23) gilt mit $Y(x) = \mathrm{e}^{xA}$ (beachte $\mathrm{e}^{0A} = E$!)

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathrm{e}^{xA}y_0 + \int_0^x \mathrm{e}^{xA}\mathrm{e}^{-tA}\cdot b(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\int_0^x \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\
&= \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \int_0^x(\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\ \int_0^x 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x\sin x \\ \sin^2 x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos x + \cos^2 x\sin x + \sin^3 x \\ -\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ -\sin x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.4.2 Lineare, skalare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Ziel ist nun die Bestimmung der Lösungen von (1.4), d. h.

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x)$$

mit stetigen Koeffizienten mit $a_n(x) \neq 0$. Nach den Ergebnissen des vorherigen Abschnittes zum homogenen Problem und nach Satz 1.2.7, genügt es eine partikuläre Lösung y_p von (1.4) zu bestimmen.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung y_p gibt es im wesentlichen vier Methoden:

- Variation der Konstanten,
- spezielle Ansätze,
- Laplace-Transformation und
- die Verwendung von Potenz- und Fourierreihen.

Hier betrachten wir nur die ersten beiden.