Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Einführung in die elementare Zahlentheorie

1. Aufgabe:
Betrachte die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der Nachfolgerabbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Beweise, dass es kein Element $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sigma(n) = n$.

2. Aufgabe:
Beweise, dass 0 die einzige natürliche Zahl ist, die kein Nachfolger ist.

Hinweis: Betrachte die Menge

$$M := \{m \in \mathbb{N}\,;\, \exists k \in \mathbb{N} : m = \sigma(k)\} \cup \{0\}$$

und zeige $M = \mathbb{N}$.

3. Aufgabe:
Untersuche, welche der folgenden Mengen X zusammen mit der Nachfolgerabbildung $\sigma : X \to X$ die Peano-Axiome (P2)-(P3) erfüllen. Hierbei dürfen die zugrunde liegenden Mengen und Rechenregeln für Addition und Multiplikation als bekannt vorausgesetzt werden.

(a) $X = \mathbb{R}$ und $\sigma(x) = x + 1$ für $x \in X$,

(b) $X = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\sigma(x) = x + 1$ für $x \in X$,

(c) $X = \{2, 4, 6, \ldots\}$ und $\sigma(x) = x + 2$ für $x \in X$,

(d) $X = \{-1, 1\}$ und $\sigma(x) = -x$ für $x \in X$,

(e) $X = \{-1, 0, 1\}$ und $\sigma(-1) = 0$, $\sigma(0) = -1$ und $\sigma(1) = 0$.

4. Aufgabe:
Die bekanntlich falsche Aussage „Alle Planeten sind bewohnt“ wird wie folgt „bewiesen“: Durch vollständige Induktion zeigen wir, dass jede n-elementige Menge von Planeten mit $n > 0$, zu der die Erde als ein Element gehört, aus bewohnten Planeten besteht.
Induktionsanfang ($n = 1$): Die Erde ist bewohnt.
Induktionsschritt (von n auf $n+1$): Haben wir eine Menge von $n+1$ Planeten mit der Erde als Element, so greifen wir zwei verschiedene Teilmengen von n Planeten heraus, die beide die Erde enthalten. Nach Induktionsvoraussetzung bestehen diese beiden Teilmengen aus bewohnten Planeten, also auch die Vereinigungsmenge und damit die Menge, von der wir ausgingen.
Wo steckt der Fehler?