Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Blatt 02

# Einführung in die elementare Zahlentheorie

**5. Aufgabe:**
Zeige, dass $k + m = m + k$ für alle $m, k \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: In der Vorlesung wurde bereits gezeigt:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ k + 0 = 0 + k,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}: \ k + 1 = 1 + k.$$

**6. Aufgabe:**
Zeige: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $4 \mid (5^n + 7)$. Hierbei bedeutet für $x, y \in \mathbb{N}$

$$x \mid y :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \ x \cdot k = y.$$

Man liest „$x$ teilt $y$“.

**7. Aufgabe:**
Jeder Punkt $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ sei jeweils mit einer natürlichen Zahl $x_{i,j}$ versehen, so dass

$$x_{i,j} = \frac{x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}}{4}$$

gilt. Zeige, dass jeder Punkt mit der selben Zahl versehen ist.

**8. Aufgabe:**
Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n$ mit $n \geq 1$ gilt: $\sqrt{2}n$ ist nicht ganzzahlig. Folgere hieraus, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

**9. Aufgabe:**
Es sei $M$ die Menge aller Menschen. Entscheide, ob die folgenden Relationen $R \subseteq M \times M$ Äquivalenzrelationen oder Ordnungsrelationen auf $M$ definieren:

(a) $xRy$, falls $x$ mindestens so groß ist wie $y$,

(b) $xRy$, falls $x$ und $y$ am selben Tag geboren sind,

(c) $xRy$, falls $x$ und $y$ denselben Vornamen haben,

(d) $xRy$, falls $x$ und $y$ die selbe Großmutter haben,

(e) $xRy$, falls $x$ älter ist als $y$.