Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Einführung in die elementare Zahlentheorie

15. Aufgabe:
Eine Menge M heißt endlich, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}_{<n}$ gibt. Zeige, dass für endliche Mengen die Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt ist (diese Zahl heißt dann Mächtigkeit oder Kardinalität von M: $|M| \coloneqq n$).

16. Aufgabe:
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $M \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ eine Teilmenge mit $n+1$ Elementen. Beweise, dass in M mindestens eine Zahl k geben muss mit $k+1 \in M$. Versuche die Aussage sowohl mit vollständiger Induktion, dem Prinzip des kleinsten Täters als auch mit dem Schubfachprinzip zu beweisen.

17. Aufgabe:
Wir betrachten das folgende Modell der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} \coloneqq \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

mit der Nachfolgerabbildung

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

definiert durch $\sigma(2) = 4, \sigma(4) = 6, \sigma(6) = 8, \ldots$. Berechne in diesem Modell $4 + 8$ sowie $6 \cdot 10$, wobei die Addition und Multiplikation gemäß Vorlesung rekursiv definiert ist.

18. Aufgabe:

(a) Wir betrachten die auf $\mathbb{Q}$ definierte Addition

$$[(x, m)]_{\sim_{\mathbb{Q}}} + [(y, n)]_{\sim_{\mathbb{Q}}} \coloneqq [(x \cdot n + y \cdot m, m \cdot n)]_{\sim_{\mathbb{Q}}}.$$

Zeige, dass die Addition wohldefiniert ist.

(b) Ein Schüler rechnet sets

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{x+y}{m+n}$$

nachdem in der Schule die Multiplikation von Brüchen eingeführt wurde. Wie kannst du dem Schüler seinen Fehler begreiflich machen?

19. Aufgabe:
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper bildet. Welche Strukturen bilden $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und wieso bilden diese keine Körper?