Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Blatt 05

# Einführung in die elementare Zahlentheorie

**20. Aufgabe:**
Ein Dedekind-Schnitt $A \subseteq \mathbb{Q}$ heißt *rational,* falls es $q \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass

$$A = \{p \in \mathbb{Q}\,;\, p < q\}\,.$$

Zeige:

(a) Ein Dedekind-Schnitt $A$ ist genau dann rational, wenn $\mathbb{Q} \setminus A$ ein kleinstes Element besitzt.

(b) Der in der Vorlesung behandelte Dedekind-Schnitt $A := \left\{p \in \mathbb{Q}\,;\, p \leq 0 \text{ oder } p^2 < 2\right\}$ ist nicht rational, oder mit anderen Worten, $\sqrt{2}$ ist irrational.

**21. Aufgabe:**
Zeige, dass $\mathbb{R}$ unbeschränkt ist und sogar

$$\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x, z \in \mathbb{Q} :\, x < y < z$$

gilt. Verwende hierbei die Definition der reellen Zahlen und der Ordnungsrelation, wie sie in der Vorlesung eingeführt wurden. Zeige ferner, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ sogar ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y < n$ existiert.

**22. Aufgabe:**
Zu einer rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ finden wir natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $a_0 \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so dass

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \frac{1}{a_n}}}},$$

die so genannte *Kettenbruchentwicklung von $x$*. So gilt etwa

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}},$$

also $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2$. Finde eine rekursive Vorschrift zur Bestimmung der Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ und begründe, warum die Kettenbruchentwicklung für rationale Zahlen immer abbricht.

Hinweis: Verwende den Ausdruck $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$; den ganzzahligen Anteil einer positiven rationalen Zahl $x$ (z.B. $\lfloor \frac{8}{3} \rfloor = 2$).

**23. Aufgabe:**
Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir rekursiv $x^0 := 1$ und $x^{n+1} := x^n \cdot x$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) $\forall m, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} : \; x^n \cdot x^m = x^{n+m}$,

(b) $\forall m, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} : \; (x^n)^m = x^{n \cdot m}$,

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R} : \; (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist.