Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Einführung in die elementare Zahlentheorie

32. Aufgabe:
Betrachtet wird der Integritätsbereich

$$R := \left\{a + \mathrm{i}b\sqrt{5}\,;\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

mit den üblichen Rechenoperationen $+, \cdot$ auf komplexen Zahlen, also

$$\begin{aligned}\left(a + \mathrm{i}b\sqrt{5}\right) + \left(c + \mathrm{i}d\sqrt{5}\right) &:= (a + c) + \mathrm{i}(b + d)\sqrt{5},\\ (a + \mathrm{i}b\sqrt{5}) \cdot (c + \mathrm{i}d\sqrt{5}) &:= (ac - 5bd) + \mathrm{i}\,(ad + bc)\,\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Zeige, dass 2 und $1 + \mathrm{i}\sqrt{5}$ irreduzibel, aber nicht prim in R sind.

Hinweise: Um zu zeigen, dass die Elemente nicht prim sind, verwende

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{5}) \cdot (1 - \mathrm{i}\sqrt{5}).$$

Für die Irreduzibilität nimm das Gegenteil an und verwende den quadrierten Betrag

$$\left|a + \mathrm{i}b\sqrt{5}\right|^2 := a^2 + 5b^2$$

um einen Widerspruch zu erzeugen.

33. Aufgabe:
Berechne mithilfe des euklidischen Algorithmus' für folgende Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ den größten geimeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ (gemeint ist hier stets die natürliche Zahl als ggT):

(a) $a = 24, \quad b = 135,$

(b) $a = 55, \quad b = 88,$

(c) $a = 511, \quad b = 1001.$

Durch „Rückwärtsrechnen“ im euklidischen Algorithmus kann man zeigen, dass

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} :\ \mathrm{ggT}(a, b) = x \cdot a + y \cdot b$$

gilt (Lemma von Bézout). Stelle die berechneten größten gemeinsamen Teiler auf diese Weise dar.

34. Aufgabe:
Überprüfe, ob folgende Mengen mit den gegebenen Operationen einen Integritätsbereich definieren und gib ggf. die Einheiten an:

(a) $(\{1\}, \oplus, \circ)$ mit $1 \oplus 1 = 1$ und $1 \circ 1 = 1$.

(b) $(\mathbb{N}, \lightning, \cdot)$ wobei $\cdot$ die normale Multiplikation sei und $m \lightning n := (m+n) \cdot n$ für $m, n \in \mathbb{N}$ sei.

(c) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ koordinatenweise Addition und Mulitplikation seien.

(d) $(\mathbb{Z}, \oplus, \circ)$, wobei $a \oplus b := a + b - 1$ und $a \circ b := a + b - a \cdot b$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ seien.

35. Aufgabe:
Führe folgende Polynomdivisionen durch:

(a) $(x^4 - 7x^2 + 4x - 6) : (x + 3)$

(b) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 12) : (x - 4)$

(c) $\left(a^3 - b^3\right) : (a - b)$

(d) $(x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 1)$.

Hinweis: Auf OPAL befindet sich ein Link zu einem Video von DorFuchs zu diesem Thema.