Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Blatt 09

Einführung in die elementare Zahlentheorie

36. Aufgabe:
Sei R ein euklidischer Ring. Zeige:

(a) Für alle $a \in R \setminus \{0\}$ ist a ein ggT von a und a, sowie 1 ein ggT von a und 1.

(b) Für alle $a, b, c \in R$ gilt: Ein Element $d \in R$ ist ein ggT von a und b genau dann, wenn $c \cdot d$ ein ggT von $a \cdot c$ und $b \cdot c$ ist.

37. Aufgabe:
In Euklidien wird mit der Währung Bezouts bezahlt. Es gibt jedoch nur 2 Münzen im Wert von 72 Bezouts und 35 Bezouts. Beweise, dass mit diesen beiden Münzen dennoch alle Beträge bezahlt werden können, wenn der Verkäufer Geld zurückgeben darf. Zeige ferner, dass es einen Betrag $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass jeder Betrag $m \geq n$ ohne Rückgeld bezahlt werden kann.

38. Aufgabe:
Wir betrachten den Unterring $\mathbb{Z}[X]$ von $\mathbb{R}[X]$ definiert als

$$\mathbb{Z}[X] = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{Z}\,;\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : a_n = 0\}\,.$$

Begründe, dass $\mathbb{Z}[X]$ kein euklidischer Ring ist.

Hinweis: Finde zwei Polynome in $\mathbb{Z}[X]$, deren ggT sich nicht im Sinne des Lemmas von Bézout darstellen lässt.

39. Aufgabe:
Berechne für die folgenden Polynome $p, q \in \mathbb{R}[X]$ den größten gemeinsamen Teiler (wir geben den ggT stets als normiertes Polynom an):

(a) $p = X^6 - X^5 + X^4 + X^3 - X^2 - 1$, $q = X^4 - X^3 + X - 1$,

(b) $p = 2X^4 + 5X^3 + 4X^2 - 3$, $q = 2X^3 + 3X^2 - X - 1$.

Stelle zudem den ggT als Kombination der Polynome p und q im Sinne des Lemmas von Bézout dar.

40. Aufgabe:
Sei $p \in \mathbb{Z}[X]$ mit $\gamma(p) = n \geq 1$, also

$$p = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $a_n \neq 0$. Wir nehmen an, dass $x = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ mit $c \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\operatorname{ggT}(c, d) = 1$ eine Nullstelle von p sei. Zeige, dass dann $c \mid a_0$ und $d \mid a_n$ gilt. Nutze dieses Verfahren zum „Raten“ einer Nullstelle, um die reellen Nullstellen der folgenden Polynome zu berechnen. Zerlege anschließend die Polynome in ihre Linearfaktoren:

(a) $X^3 - X^2 - 5X + 6$,

(b) $X^3 - 14X^2 + 63X - 90$,

(c) $X^3 - 5X^2 + 6X$,

(d) $X^3 - 4X^2 + X + 6$.