Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Einführung in die elementare Zahlentheorie

41. Aufgabe:
Berechne erneut die größten gemeinsamen Teiler aus Aufgabe 33 mithilfe der Primfaktorzerlegung. Lässt sich mithilfe der Primfaktoren ebenfalls eine Darstellung des ggT wie im Lemma von Bézout finden?

42. Aufgabe:

1. Beweise: Ist für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Zahl $2^n - 1$ eine Primzahl, so ist n eine Primzahl (die Primzahlen der Form $2^n - 1$ heißen *Mersenne-Primzahlen*).
   Hinweis: Zeige die Kontraposition und verwende dabei die Formel
   $$(q-1)\sum_{k=0}^{m} q^k = q^{m+1} - 1$$
   für $m \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}$.
2. Recherchiere den Unterschied zwischen Mersenne-Zahlen und Mersenne-Primzahlen. Berechne ferner die ersten fünf Mersenne-Zahlen in Binärdarstellung und begründe das auftretende Muster. Gilt dieses Muster auch für die Mersenne-Primzahl 2147483647?

43. Aufgabe:
In der Weihnachtswerkstatt arbeiten nur zehn Elfen. Damit sie trotzdem alle Geschenke rechtzeitig verpacken können, trinken die Elfen am 22. Dezember einen Zaubertrank, der ihnen über Nacht Flügel wachsen lässt. Unglücklicherweise hat der Schusselelf das Fass mit dem Zaubertrank in den Weinkeller geräumt, wo es nun zusammen mit 999 baugleichen Weinfässern steht. Die Elfen müssen sich nun überlegen, wie sie das richtige Fass ermitteln. Dafür haben sie nur einen Tag Zeit und die Flügel wachsen nur über Nacht. Glücklicherweise sind Elfen unglaublich trinkfest, so dass jeder Elf soviel trinken kann, wie er will, ohne körperliche Schäden davonzutragen. Finde eine Strategie, wie die Elfen nach einer Nacht zweifelsfrei herausfinden können, in welchem Fass der Zaubertrank ist.

44. Aufgabe:
Um die Geschenke effektiver verteilen zu können, bringt der Weihnachtsmann seinen Wichteln Zahlentheorie bei. Nach einer Vorlesung sind die Wichtel Hans und Tom verwirrt:
Hans: "Bei der Definition von Äquivalenzrelationen hat sich Onkel Santa doch viel zu umständlich angestellt!"
Tom: "Wieso?"

Hans: “Na, weil die Reflexivität doch völlig überflüssig ist. Jede Relation, die symmetrisch und transitiv ist, ist doch automatisch auch reflexiv.”
Tom: “Ähhh?”
Hans: “Na, schau mal. Wenn $\sim$ eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge X ist, dann gilt, da $\sim$ symmetrisch ist, für $a, b \in X : a \sim b \Rightarrow b \sim a$. Wegen der Transitivität folgt aus $a \sim b$ und $b \sim a$ dann $a \sim a$. Also ist $\sim$ auch reflexiv.”
Tom: “Stimmt!”

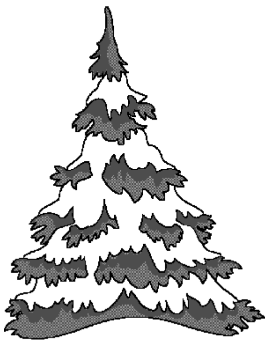
(a) Nein, liebe Wichtel. Das stimmt nicht. Erkläre, an welcher Stelle der Beweis falsch ist.

(b) Um die Wichtel entgültig zu überzeugen, gib ein weihnachtliches Beispiel für eine symmetrische, transitive, aber nicht reflexive Relation an.

Bemerkung: Die Aufgabe ist sinngemäß Aufgabe 2 aus `http://www.uni-frankfurt/53492942/weihnachten.pdf`.

45. Aufgabe:
Der Weihnachtsmann sagt zu Rudolph: "Wenn ich die Alter von 3 meiner Wichtel multipliziere, erhalte ich 36. Addiere ich sie, erhalte ich die Anzahl der Kugeln an meinem Weihnachtsbaum. Weißt Du nun, wie alt die 3 Wichtel sind?" Rudolph geht sofort die Kugeln am Weihnachtsbaum zählen, kommt dann aber ganz betrübt wieder: "Ich kann noch nicht sagen, wie alt sie sind." Darauf antwortete der Weihnachtsmann: "Aber du weißt doch, dass der älteste meiner Wichtel (also der, der mindestens ein Jahr älter als alle anderen Wichtel ist) immer dich und deine Kameraden füttert." Nun konnte Rudolph das Rätsel lösen.
Wie alt sind die Wichtel des Weihnachtsmanns?

Bemerkung: Die Aufgabe ist `http://www.mathe.tu-freiberg.de/inst/theomath/Weihnachten/WeihRaet.html` entnommen.



Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!