Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Blatt 11

Einführung in die elementare Zahlentheorie

46. Aufgabe:
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Zeige: Die auf $\mathbb{Z}$ definierte Relation $\equiv_{\operatorname{mod} n}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Erinnerung: für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $a \equiv_{\operatorname{mod} n} b :\Leftrightarrow a \equiv b \operatorname{mod} n :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a - b = c \cdot n$.

47. Aufgabe:
Fülle die folgenden Verknüpfungstabellen aus.

(a) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

$+$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

$\cdot$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

(b) $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$

$+$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

(c) $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Im Kapitel 8 wird gezeigt, dass es sich bei all diesen Strukturen um Ringe handelt. Begründe anhand der Verknüpfungstabellen, welche Strukturen sogar Körper bilden.

Zusatz: Die Menge der Einheiten in einer Struktur wie $\mathbb{Z}_n$ wird mit $\mathbb{Z}_n^*$ bezeichnet. Mit der Multiplikation bilden diese eine Gruppe. Gib für $n \in \{5, 6, 7\}$ die Einheitengruppen $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ inklusive der Verknüpfungstabelle an.

48. Aufgabe:
Durch $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 := \{(a,b); a \in \mathbb{Z}_4, b \in \mathbb{Z}_2\}$ mit komponentenweiser Addition, d.h.

$$(a,b) + (c,d) := (a + c \bmod 4, b + d \bmod 2)$$

ist eine Gruppe definiert. Stelle die Gruppentafel (analog Aufgabe 47) auf. Gib zu jedem Element sein inverses Element an.

49. Aufgabe:

(a) Die Zahl 18 ist in $\mathbb{Z}_{31}$ invertierbar. Belege diese Aussage durch Angabe des zugehörigen inversen Elementes und einer Probe. Gehe für das Finden des inversen Elementes wie folgt vor: Wende das Lemma von Bézout auf die Zahlen 18 und 31 an. Betrachte dann die entstandene Gleichung $\bmod 31$.

(b) Die Zahl 10 ist in $\mathbb{Z}_{12}$ nicht invertierbar. Belege diese Aussage durch einen Ausschnitt aus der zugehörigen Multiplikationstabelle. Wende zusätzlich das Lemma von Bézout auf die Zahlen 10 und 12 an. In wie weit unterscheidet sich das Ergebnis hier von dem Ergebnis in Teilaufgabe (a)?

50. Aufgabe:
Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = |N|$ und $f : M \to N$ injektiv. Zeige, dass f auch surjektiv ist.

Erinnerung: Eine Menge M heißt *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $g : M \to \mathbb{N}_{<n}$ gibt. Das n ist eindeutig bestimmt und wird als *Mächtigkeit von* M bezeichnet, also $|M| := n$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass es genügt die Aussage für $M = N = \mathbb{N}_{<n}$ zu zeigen. Nimm dann das Gegenteil an und verwende das Schubfachprinzip.