Dr. S. Trostorff
M. Baldauf

Blatt 12+13 (Übungen 16.+23. bzw. 18.+25.01.2019)

# Einführung in die elementare Zahlentheorie

**Information zur PVL**

Im OPAL-Kurs dieser Lehrveranstaltung finden Sie Online-Tests (aktuell drei). Von diesen Test müssen Sie bis zum 18.01.2019 mindestens drei bestehen, um diesen Teil Ihrer PVL zu absolvieren. Wer drei bestandene Online-Tests und drei Vorrechenpunkte erreicht, besteht die PVL und ist damit zur Klausur zugelassen.[1] Innerhalb der Übungen wird es noch ausreichend viele Möglichkeiten zum Vorrechnen geben.[2]

**50. Aufgabe:**

Überprüfe die Zahlen $56, 193, 50, 56, 616$ auf Teilbarkeit durch $7, 8, 9, 10, 11$ unter Nutzung einer Quersummenregel (Satz 9.1) und einer alternierenden Quersummenregel (Satz 9.2).

Hinweis: Die zu überprüfende Zahl ist in jeweils 6 Zahlsysteme umzurechnen, es folgen 5 Prüfungen mit einer Quersummenregel und 5 Prüfungen mit einer alternierenden Quersummenregel.

**51. Aufgabe:**

Erkläre Satz 9.3. Nenne Beispiele für seine Anwendung in der Schule.

**52. Aufgabe:**

(a) Welcher Rest ergibt sich bei der Division von $4^{100}$ durch 7? Welcher Rest ergibt sich bei der Division von $4^{49}$ durch 7?

(b) Welchen Rest lässt 9! bei Division durch 10, welchen 10! bei Division durch 11, 11! bei Division durch 12 und 12! bei Division durch 13?

(c) Vertiefung: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ so, dass $n + 1$ keine Primzahl ist. Welchen Rest lässt $n!$ bei Division durch $n + 1$?

(d) Wie viele Nullen hat die Zahl $(100!)^{100}$ an ihrem Ende? (aus: Mathematisches Institut der Georg-August-Universität Göttingen (2012): Mathematischer Korrespondenzzirkel. Blatt 100)

[1] 3 Vorrechenpunkte und 3 bestandene Online-Tests ⇒ bestandene PVL ⇒ Teilnahmemöglichkeit Klausur

[2] Dieses Übungsblatt liefert dafür recht viele Möglichkeiten, da oft nur Sätze aus der Vorlesung angewendet werden müssen. Für Verfahren (Lösen einer Linearen Kongruenz etc.) kann auf diverse Youtube-Videos zurück gegriffen werden. z.B. von Prof. Christian Spannagel

(e) Berechne: $28^{12} \mod 13$, $31^5 \mod 13$, $15^{83} \mod 13$.

**53. Aufgabe:**
Finde eine Quersummenregel für die Teilbarkeit durch 7 und durch 13 im Dezimalsystem. Verwende die Regeln um festzustellen, ob 36.063.885 durch 13 bzw. 17 teilbar ist. Belege das Ergebnis zusätzlich anhand der Definition der Teilbarkeit.

Hinweis: Betrachte dafür die $10^n \mod 13$ und $10^n \mod 7$ solange bis sich die Ergebnisse wiederholen. Nutze danach die sich ergebenen Zahlen geeignet als Faktoren für die einzelnen Ziffern um zwei gewichtete Quersummenregeln zu finden

**54. Aufgabe:**
Untersuche folgende lineare Kongruenzen auf Lösbarkeit und gib ggf. die Lösungsmenge an:

(a) $-2 \cdot x \equiv 3 \mod 5$,

(b) $6 \cdot x \equiv 17 \mod 27$,

(c) $4 \cdot x \equiv 16 \mod 18$,

(d) $2 \cdot x \equiv 7 \mod 9$,

(e) $12 \cdot x \equiv -3 \mod 18$,

(f) $143 \cdot x \equiv 2470 \mod 5746$.

**55. Aufgabe:**
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\mathbb{Z}_n$ kein Körper ist, falls $n$ nicht prim ist. Somit muss es also für $n \notin \mathbb{P}$ nicht-invertierbare Elemente in $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$ geben.

(a) Bestimme alle nicht-invertierbaren Elemente in $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_9 \setminus \{0\}, \cdot)$.

(b) Wie viele nicht-invertierbare Elemente gibt es in $(\mathbb{Z}_{p^n} \setminus \{0\}, \cdot)$ für eine Primzahl $p$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$?

**56. Aufgabe:**
Überprüfe, ob das angegebene Element aus der jeweiligen Struktur invertierbar ist, gib ggf. das Inverse an. (Falls nicht invertierbar: suche möglichst einfache Strategien, an denen sich nicht invertierbare Elemente besonders schnell erkennen lassen.)

(a) $x = 8$ in $(\mathbb{Z}_{96} \setminus \{0\}, \cdot)$,

(b) $x = 8$ in $(\mathbb{Z}_{461} \setminus \{0\}, \cdot)$,

(c) $x = 8$ in $(\mathbb{Z}_{462} \setminus \{0\}, \cdot)$,

(d) $x = 1$ in $(\mathbb{Z}_{1093} \setminus \{0\}, \cdot)$.

**57. Aufgabe:**
Löse die folgenden Systeme linearer Kongruenzen unter Nutzung des Chinesischen Restsatzes.

(a) (i) $x \equiv 2 \mod 5$,
(ii) $x \equiv 3 \mod 13$,
(iii) $x \equiv -2 \mod 7$.

(b) (i) $x \equiv 2 \mod 3$,
(ii) $x \equiv 3 \mod 5$,
(iii) $x \equiv 2 \mod 7$.

(c) (i) $x \equiv 4 \mod 5$,
(ii) $x \equiv 6 \mod 7$,
(iii) $x \equiv 9 \mod 11$.

**58. Aufgabe:**

(a) Drei Schiffbrüchige auf einer einsamen Insel sammeln den ganzen Tag Kokosnüsse. Sie beschließen die Kokosnüsse am nächsten Tag gerecht aufzuteilen und legen sich schlafen. In der Nacht erwacht der erste Schiffbrüchige, um sich seinen Anteil zu sichern. Er teilt den Vorrat an Kokosnüssen durch 3 und nimmt sich seinen Anteil. Beim Teilen durch 3 verbleibt eine Kokosnuss als Rest, die er einem Affen gibt. Eine Stunde später erwacht der zweite Schiffbrüchige, um sich seinen Anteil zu sichern. Er teilt die verbleibenden Kokosnüsse durch 3 und nimmt seinen Anteil. Auch hier verbleibt eine Kokosnuss als Rest, die der Affe dankbar nimmt. Das selbe passiert eine Stunde später mit dem dritten Schiffbrüchigen. Am nächsten Morgen erwachen alle drei und teilen den Rest der Kokosnüsse durch 3 und wieder verbleibt eine als Rest. Wie viele Kokosnüsse müssen die Schiffbrüchigen mindestens gesammelt haben?

(b) Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich sie durch 8 teile, ergibt sich Rest 3, wenn ich sie durch 7 teile, ergibt sich Rest 1. Wie lautet die Zahl? Genauer gefragt: Welches ist die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften? (aus: Albrecht Beutelspacher (2018): Zahlen, Formeln, Gleichungen. Algebra für Studium und Unterricht. S.103[3])

(c) Es gibt eine unbekannte Anzahl von Dingen. Wenn man sie durch 3 teilt, haben sie einen Rest von 2; wenn man sie durch 5 teilt, bleiben 3 übrig; wenn man sie durch 7 teilt, bleibt ein Rest von 2 Dingen. Kannst Du die Zahl bestimmen? (aus: ebd. S. 100)

[3] Im WLAN-Netz der TU Dresden können Sie kostenlos auf dieses Buch zugreifen.

(d) In einem Korb befindet sich eine unbekannte Anzahl von Eiern. Beginnt man nun den Korb zu leeren, indem man immer zwei Eier auf einmal entfernt, so verbleibt am Ende ein einzelnes Ei im Korb. Wenn man stattdessen nun immer drei Eier auf einmal entnimmt, so bleiben am Ende zwei Eier übrig. Entsprechend ergibt sich bei vier Eiern ein Rest von drei, bei fünf Eiern ein Rest von vier und bei sechs Eiern ein Rest von fünf. Entfernt man jedoch immer sieben Eier auf einmal, so bleibt kein Rest, das heißt der Korb ist am Ende leer. Wie viele Eier befinden sich mindestens im Korb? (aus: Øystein Ore (1988): Number Theory and its History. S. 249, übersetzt und zitiert in: Wikipedia: Eieraufgabe des Brahmagupta)

(e) Eine alte Frau geht über den Marktplatz. Ein Pferd tritt auf ihre Tasche und zerbricht die gekauften Eier. Der Besitzer des Pferdes möchte den Schaden ersetzen und fragt die alte Frau, wie viele Eier in ihrer Tasche waren. Sie weiß die exakte Zahl nicht mehr, aber sie erinnert sich, dass genau ein Ei übrig bleibt, wenn sie beim Auspacken die Eier immer zu zweit aus der Tasche nimmt. Das Gleiche geschieht, wenn sie die Eier immer zu dritt, zu viert, zu fünft und zu sechst aus der Tasche nimmt. Nur wenn sie die Eier zu siebt aus der Tasche nimmt, bleibt kein Ei übrig. Was ist die kleinste Zahl an Eiern, welche die alte Frau in ihrer Tasche haben kann? (aus: http://www.cut-the-knot.org/blue/chinese.shtml, übersetzt und zitiert in: Wikipedia: Eieraufgabe des Brahmagupta)

(f) Welche Zahl liefert geteilt durch 6 den Rest 5, geteilt durch 5 den Rest 4, geteilt durch 4 den Rest 3 und geteilt durch 3 den Rest 2? (aus: Henry Thomas Colebrooke (1917): Algebra, with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. S. 326, übersetzt und zitiert in: Wikipedia: Eieraufgabe des Brahmagupta)

**59. Aufgabe:**
Berechne für folgende Zahlenpaare das kleinste gemeinsame Vielfache wie in der Vorlesung beschrieben (vgl. Aufgabe 33).

(a) $a = 24$ , $b = 135$,

(b) $a = 55$ , $b = 88$,

(c) $a = 511$ , $b = 1001$.