

Einführung in die elementare Zahlentheorie

Hinweise zur Klausur

Die Klausur findet statt am 07.02.2019 von 09:20 bis 10:50 Uhr in ASB/120/H. Zur Klausur sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte Papier mitbringen.

Herr Baldauf bietet zwei Konsultationen zur Klausur an, vgl. OPAL.

61. Aufgabe:

Berechne die folgenden Potenzen: $19^{289} \pmod{21}$, $13^{54} \pmod{32}$, $7^{27} \pmod{36}$ und $15^{13} \pmod{18}$.

Benutze die Sätze 11.4 (Euler-Fermat) oder 11.5 (Kleiner Fermat) falls möglich.

62. Aufgabe:

Betrachtet wird die Potenzmenge $R := \mathcal{P}(M)$ der dreielementigen Menge $M := \{a, b, c\}$. Zeige (überblicksartig), dass R mit den Operationen $A+B := A\Delta B := (A\cup B)\setminus(A\cap B)$, $A\cdot B := A\cap B$ für alle $A, B \in R$ einen (endlichen kommutativen) Ring bildet. Gib das Einselement (multiplikativ-neutrales Element) und beide Verknüpfungstabellen an. Bestimme daraus alle Einheiten und alle Nullteiler in diesem Ring. Wiederhole die dazu nötigen Definitionen.

63. Aufgabe:

Löse die folgenden linearen diophantischen Gleichungen (vgl. Korollar 10.3):

(a) $10x + 8y = -3$

(b) $10x + 8y = 6$

(c) $29x - 79y = 43$

- (d) In einem Betrieb sind einige gelernte und einige ungelernete Arbeiter beschäftigt. Jeder gelernte Arbeiter erhält für seine Arbeit 1740 Euro und jeder ungelernete Arbeiter erhält 1020 Euro¹ ausgezahlt. Insgesamt wurden 41100 Euro² ausgezahlt. Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie viel gelernte und wie viel ungelernete Arbeiter in diesem Betrieb beschäftigt sind. (aus: Bezirkskomitee Chemnitz (o.J.): Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften. Klasse 9. S.1f)

¹Diese Aufgabe wurde vor der Einführung des Mindestlohns gestellt.

²gemeint ist: pro Monat

64. Aufgabe:

Sei $A := \{a, b, c, d\}$. Sei $R \subseteq A \times A$ eine (binäre) Relation auf A . Sie ist gegeben durch folgende Tabelle:

	a	b	c	d
a	×	×	×	
b		×		
c				×
d				

- (a) R ist nicht transitiv. Belege diese Aussage.
- (b) Gib eine transitive Relation S an, die R enthält ($R \subseteq S$). (Finde die kleinste Relation S , die diese Anforderung erfüllt die sog. *transitive Hülle von R* . Was wäre die größte?)
- (c) Gib eine Relation $K \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, die symmetrisch und antisymmetrisch ist. (Es gibt überabzählbar viele solcher Relationen.)

65. Aufgabe:

In der Übung werden, falls Zeit bleibt, weitere Aufgaben aus den Bereichen Induktion, (erweiterter) euklidischer Algorithmus, Chinesischer Restsatz und Teilbarkeit gestellt. In der Übung kann selbstverständlich auf die Unterlagen zurückgegriffen werden.