Funktionale Zusammenhänge im computerunterstützten Darstellungstransfer erkunden

Andreas Fest*, Andrea Hoffkamp**
*Pädagogische Hochschule Ludwigsburg,
**Humboldt-Universität zu Berlin

Kurzfassung: *Funktionaler Zusammenhang* ist seit der Einführung der Bildungsstandards 2003 eine der mathematischen Leitideen. Viele Lernende haben Schwierigkeiten im Bereich funktionalen Denkens sowie mit dem Funktionsbegriff an sich, da dieser zum einen verschiedene Aspekte beinhaltet und zum anderen durch unterschiedliche Repräsentationen gekennzeichnet ist. Typische Probleme bei der Begriffsbildung liegen in der Verwechslung und Vermengung von Unterbegriffen des Funktionsbegriffs. Aber auch die Aspekte funktionaler Anhängigkeiten, wie z.B. der *dynamische Aspekt*, bereiten Schwierigkeiten. In diesem Artikel präsentieren wir zu diesem Bereich zwei computerbasierte Lernumgebungen. Wir stellen die Grundideen der Lernumgebungen vor und diskutieren den Mehrwert des Computers im Hinblick auf Visualisierungen, Repräsentationen und Repräsentationstransfer. Ergänzt werden die Ausführungen durch Schülerprodukte aus einer Studie zu einer der beiden Lernumgebungen.

1 Motivation und Problemlage

Mit der vorliegenden Arbeit wollen wir einige wichtige und aktuelle Gebiete (mathematik-) didaktischer Forschung ansprechen. Dabei widmen wir uns in erster Linie im Sinne von „Mathematikdidaktik als Design Science“ (Wittmann, 1992) der *Entwicklung und Erforschung von*

Lernumgebungen. Bei der Entwicklung der Lernumgebungen geht es uns weniger um solche, die Kompetenzunterschiede egalisieren wollen, sondern mehr um solche, die zu *Kompetenzerwerb* führen. Damit verfolgen wir einen *Qualifizierungsanspruch* im Gegensatz zu einem Egalisierungsanspruch, weil wir darin eine größere Wirksamkeit von Schulen und Hochschulen sehen (Hasselhorn & Gold, 2009, S. 317 ff). Um diesem Anspruch zu genügen, analysieren und nutzen wir die Möglichkeiten eigens entwickelter *computerbasierter Lernumgebungen*. Zum einen sehen wir einen großen Bedarf in der Entwicklung praktikabler Computerlernumgebungen gerade für den schulischen Gebrauch. Zum anderen besteht aber auch ein großer Forschungsbedarf zum Mehrwert und den tatsächlichen Möglichkeiten eines Einsatzes solcher Lernumgebungen.

In diesem Artikel stellen wir zwei digitale Lernumgebungen im Bereich *Funktionen und funktionales Denken* vor. Dieser Bereich ist einerseits durch die in den Bildungsstandards etablierte Leitidee "Funktionaler Zusammenhang" (KMK, 2003) im aktuellen Forschungsinteresse, andererseits werden aber auch die Ideen Felix Kleins, der im Rahmen der Meraner Reform von 1905 die *Erziehung zum funktionalen Denken* als Sonderaufgabe forderte, derzeit immer wieder als Begründungs- und Bedeutungsrahmen mathematikdidaktischer Forschung herangezogen (siehe z.B. „The Klein Project"[1]).

Im Verlauf des Artikels widmen wir uns deswegen zunächst dem Funktionsbegriff und dem Begriff des funktionalen Denkens und den damit verbundenen Schwierigkeiten für Lernende. Anschließend geben wir unsere Grundhaltung eines computerbasierten Ansatzes wieder und analysieren bzw. reflektieren dessen Rolle in Mathematik und Mathematikdidaktik. Schließlich stellen wir die Grundideen und Konzeptionen zweier von uns entwickelten Lernumgebungen im Schul- und Hochschulkontext vor und erörtern deren Potential für den Einsatz in Unterricht und Lehre.

---

[1] http://www.mathunion.org/icmi/other-activities/klein-project/introduction/ (zuletzt abgerufen am 12.04.2012)

1.1 Funktionen und funktionales Denken

Der Begriff *funktionales Denken* wurde das erste Mal im Zusammenhang mit der Meraner Reform von 1905 genannt. Bei dieser Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts wurde unter der Federführung Felix Kleins die *Erziehung zum funktionalen Denken* als Sonderaufgabe formuliert. Gemeint war damit eine gebietsübergreifende Denkgewohnheit, die, über das Thema "Funktionen" im Algebraunterricht hinaus, den gesamten Mathematikunterricht prägen sollte. Insbesondere ging es um ein Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten - immer mit Blick auf Bewegung und Veränderlichkeit (Krüger, 2000). In der didaktischen Literatur werden im Allgemeinen drei Aspekte funktionaler Zusammenhänge beschrieben (Vollrath, 1989; Malle, 2000): Ein *Zuordnungsaspekt*, welcher sich auf die Funktion als punktweise Zuordnung bezieht und statischer Natur ist. Ein *Änderungsaspekt* bzw. *dynamischer Aspekt*, welcher die Idee der Kovariation („Wie wirkt sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer anderen Größe aus?") beinhaltet und sich auf die Beschreibung von Änderungsverhalten bis hin zu Ideen der Analysis bezieht. Schließlich auch ein *Objektaspekt*, bei dem Funktionen als Ganzes mit ihren globalen Eigenschaften oder als (algebraische) Objekte betrachtet werden. Änderungsaspekt und Objektaspekt kommen dem Klein'schen Begriff funktionalen Denkens am nächsten, decken diesen sehr umfassend gemeinten Begriff aber bei weitem nicht ab.

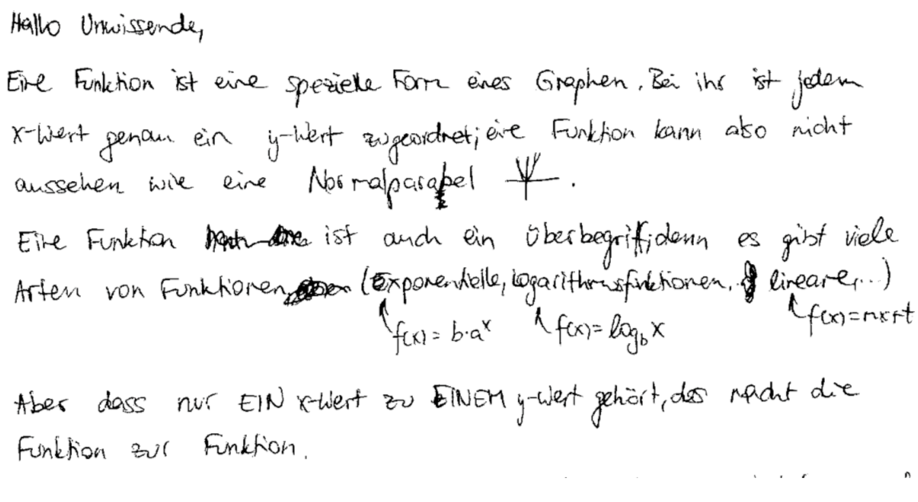
Neben den eben beschriebenen Aspekten, besitzen Funktionen darüber hinaus auch mannigfache Darstellungsformen bzw. Repräsentationen wie sprachliche Beschreibung, Tabelle, Graph, Leiterdiagramm, Term, Pfeildiagramm usw. Funktionales Denken in komplexen Aufgabenstellungen erfordert deswegen auch das Denken in und das Interpretieren von verschiedenen Darstellungsformen und damit auch Übersetzungsleistungen zwischen den Darstellungsformen. Jede Repräsentation betont bzw. zielt auf gewisse Aspekte und Eigenschaften. Gleichzeitig verengt jede Repräsentation die Sichtweise auf den Funktionsbegriff (Weigand, 1988). Zum Beispiel betonen Tabellen und Leiterdiagramme den Zuordungsaspekt, wohingegen Graphen eher den Änderungs- oder Objektaspekt hervorheben. Je nach Zielsetzung und Kontext eignen sich gewisse Darstellungsformen mehr als andere, und die Wahl der

Darstellungsform(en) stellt eine wichtige didaktische Entscheidung der Lehrperson dar (Vogel, 2006).

1.2 Typische Schwierigkeiten von Lernenden

Genauso vielschichtig wie der Funktionsbegriff und funktionales Denken an sich sind auch die damit verbundenen Schwierigkeiten von Lernenden. In diesem Abschnitt werden anhand von Schülerprodukten einige Schwierigkeiten exemplarisch illustriert. Insbesondere haben die festgestellten Schwierigkeiten eine Rolle bei der Entwicklung und Gestaltung der Lernumgebungen gespielt.

Hoffkamp (2011a) hat Schülerinnen und Schüler zweier 10. Klassen Briefe schreiben lassen, in denen einer imaginären Freundin oder einem Freund, die/der noch nie den Begriff *Funktion* gehört hat, erklärt werden sollte, was denn eine Funktion sei. Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt eines solchen Briefes.



Hallo Unwissende,

Eine Funktion ist eine spezielle Form eines Graphen. Bei ihr ist jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet; eine Funktion kann also nicht aussehen wie eine Normalparabel.

Eine Funktion ist auch ein Überbegriff, denn es gibt viele Arten von Funktionen (Exponentielle, logarithmusfunktionen, lineare...)
$f(x) = b \cdot a^x$ $f(x) = \log_b x$ $f(x) = mx+t$

Aber dass nur EIN x-Wert zu EINEM y-Wert gehört, das macht die Funktion zur Funktion.

Abbildung 1: Brief einer Schülerin der 10. Klasse zum Funktionsbegriff.

Der Brief ermöglicht Rückschlüsse auf das „mentale Bild" der Schülerin von „Funktion". Dieses ist dadurch geprägt, dass es immer einen Graphen gibt (bzw. es werden Funktion und Graph sogar gleichgesetzt) und von den Erfahrungen, die sie mit Funktionen bisher gemacht hat. In der Schule sind die Erfahrungen mit Funktionen vor allem an die Behandlung einiger weniger Funktionenklassen gebunden (und dadurch auch stark eingeschränkt). In ihrer Arbeit bezeichnen Dreyfus & Vinner (1989) das „mentale Bild" bzw. die Menge aller mentalen Bilder zusammen mit den charakterisierenden Eigenschaften als *concept image.* Sie beschreiben, dass das *concept image* Vorstellungen enthält wie: „eine Funktion muss eine einzige Regel sein" oder „der Graph muss vernünftig bzw. gutartig aussehen, z.B. monoton sein oder keine Sprungstellen besitzen". Im Gegensatz dazu steht oft die *concept definition* – sprich wie Schülerinnen und Schüler „Funktion" tatsächlich definieren würden. Dreyfus & Vinner (1989) zeigen, dass Lernende bei der Entscheidung, ob es sich bei einem Beispiel um eine Funktion handelt oder nicht, ihr *concept image* und nicht ihre *concept definition* heranziehen. Im vorliegenden Briefausschnitt (Abbildung 1) definiert die Schülerin eine Funktion prinzipiell korrekt, verwechselt dann allerdings die Unterbegriffe Injektivität/Bijektivität mit der Eindeutigkeit.

Was macht eigentlich den Funktionsbegriff für Lernende schwer? Die *concept definition* von „Funktion" wird üblicherweise in Klasse 8 in einer Formulierung wie etwa der folgenden eingeführt: *Eine Funktion ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer (eventuell anderen) Menge zuordnet.*

Diese Definition zeichnet sich aber durch einen hohen Allgemeinheits- und Abstraktionsgrad aus. Tatsächlich ist sie das Endprodukt eines langen Entwicklungsprozesses. Beispielsweise fasste Euler unter Funktionen noch lediglich solche, die sich „im freien Zuge der Hand" durchzeichnen lassen (Kronfellner, 1997). Im Laufe der Begriffsentwicklung wurde diese Eigenschaft im Hinblick auf Exaktifizierung und Allgemeinheitsanspruch fallen gelassen. Auch der Änderungsaspekt ist in dieser Definition nicht offensichtlich (Fischer & Malle, 1985). Viele mitgedachte Aspekte gehen im Laufe eines Exaktifizierungsprozesses verloren und müssen entweder durch Zusatzbegriffe „zurückgeholt" werden, z.B. der Stetigkeitsbegriff, oder in anderer Form explizit gemacht werden, z.B. durch dynamische Darstellungen. Es ist also eine delikate didaktische Aufgabe die Zusatzbegriffe und Aspekte in das Begriffsnetz von „Funktion" zu integrieren.

Die Schwierigkeit der Integration verschiedener Aspekte funktionalen Denkens macht sich auch bei typischen Schwierigkeiten Lernender bezüglich des dynamischen Aspektes funktionaler Abhängigkeiten bemerkbar. Abbildung 2 zeigt eine Aufgabe, die im Rahmen der Arbeit von Hoffkamp (2011a/b) Schülerinnen und Schülern am Ende der 10.

Klasse eines Berliner Gymnasiums und Erstsemesterstudierenden der Mathematik an der TU Berlin gestellt wurde.

Aufgabe „Die Reise“:

Die Landkarte und der abgebildete Graph beschreiben eine Autofahrt von Nottingham nach Crawley. Trage die Punkte A-F ungefähr in die Landkarte ein.

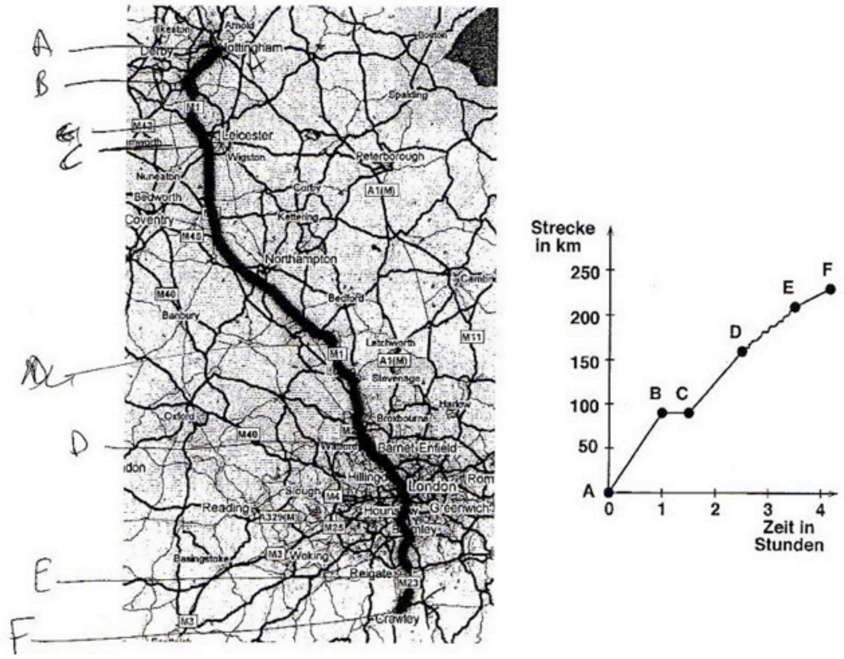


Abbildung 2: Lösung eines Studierenden zur Aufgabe „Die Reise“ (Aufgabe nach Swan, 1985).

Außer, dass hier die Punkte A und B auch bei ungefährer Abschätzung zu nahe beieinander liegen, wird nicht erkannt, dass zwischen B und C eine Pause vorliegt, in der zwar Zeit vergeht (als unabhängige Variable), aber keine Wegstrecke (als abhängige Variable) zurückgelegt wird. Mit anderen Worten wird hier der Darstellungstransfer zwischen der Situation (Landkarte) und dem Weg-Zeit Graphen nicht korrekt vollzogen, weil eine dynamische Sicht auf den funktionalen Zusammenhang zwischen Zeit und Weg fehlt. Tatsächlich werden aus diesem Grund Weg-Zeit Graphen oft als Bewegung in der Ebene („zuerst fährt man schräg hoch, dann nach rechts usw.“) fehlinterpretiert (Swan, 1985). Im weiteren Verlauf der Aufgabe fragte Hoffkamp (2011a) danach, was zwischen den Stationen D und E passiere. Typische fehlerhafte Antworten waren „Kurven“ oder „Es wird hügelig“. Hier wird der Graph also als direktes Abbild der Realsituation gesehen („Graph-als-Bild Fehler“, Vogel, 2006). Die Aufgabe, zu dem gegebenem Graphen einen Geschwindigkeit-Zeit Graphen, also einen Graphen, der die *Änderung über die Zeit* wiedergibt, zu zeichnen, wurde von kaum jemandem auch nur annähernd gemeistert (Hoffkamp, 2011a). Dies lag insbesondere daran, dass der Weg-Zeit Graph nicht abschnittweise gelesen werden konnte.

2 Die Rolle des Computers beim Lehren und Lernen von Mathematik

Bevor wir auf die Gestaltung der Computerlernumgebungen, basierend auf den zuvor dargestellten Begrifflichkeiten und den damit verbundenen Schwierigkeiten für Lernende, eingehen, reflektieren wir in diesem Abschnitt, welche Rolle der Computer beim Mathematiklernen allgemein spielen kann. Dabei gehen wir lediglich auf die Aspekte ein, die wir in den unten dargestellten Lernumgebungen verwirklicht sehen.

Grundsätzlich erachten wir die Frage, ob nun mit einem Computer besser gelernt wird oder nicht als wenig sinnvoll. Im Sinne von „Mathematikdidaktik als Design Science“ und unseres Ansatzes, der auf Kompetenzerwerb abzielt, geht es um die Frage, wie der Computer mit seinen Eigenschaften und Möglichkeiten sinnvoll und bereichernd im Unterrichts- und Lernprozess eingesetzt werden kann.

Welche Rollen des Computers sehen wir als zentral für unsere Arbeit an? Zunächst nutzen wir die mannigfachen Möglichkeiten zur Visualisierung mathematischer Konzepte. Während mathematische Sachverhalte für Unterricht zumeist in ein „Hintereinander“ gebracht werden müssen, ermöglicht Visualisierung eine mathematisch konsistente Darstellung eines „Nebeneinanders“ (Fischer & Malle, 1985). Insbesondere können die Darstellungen mit Interaktivität versehen werden. Diese Interaktivität öffnet einerseits Raum für Erforschungen, welche von Lernenden ohne negative Konsequenzen durchgeführt werden können. Schulmeister (2001) schreibt dazu:

„Nicht die Interaktivität an sich, sondern die Anonymität und Sanktionsfreiheit bei der Interaktion mit Programmen spielt also eine ganz wesentliche Rolle für die Lernmotivation der Lernenden.“ (S. 325)

Andererseits kann man die Interaktivität gezielt einschränken, um so die Entwicklung mentaler Modelle und Konzepte dezidiert zu fördern (Kortenkamp, 2007). Insofern haben Visualisierungen eine wichtige heuristische Funktion und können insbesondere schon vor einer exakten mathematischen Begriffsbildung verwendet werden (Malle, 1984).

3 Zwei computerbasierte Lernumgebungen

Im Folgenden stellen wir zwei computerbasierte Lernumgebungen im Bereich Funktionen/funktionales Denken vor. Die Lernumgebung *Squiggle-M* ist im Rahmen des Projektes SAiL-M[2] für die Lehre im Hochschulkontext entwickelt worden. Dabei geht es vorrangig um Begriffsbildung, wobei die Auswahl und Verbindung von Repräsentationen eine wichtige didaktische Rolle spielt.

Die Lernumgebung *Die Reise* ist für den Einsatz in Klasse 10 bzw. für den Übergang von Sekundarstufe I zu II im Rahmen der Dissertation von Hoffkamp (2011a) entwickelt und zusammen mit zwei weiteren Lernumgebungen in einer Studie überprüft worden. Sie zielt auf die Entwicklung funktionalen Denkens in Klein'schem Sinne, indem insbesondere der Änderungs- und Objektaspekt funktionalen Denkens zugänglich gemacht und ein propädeutischer Zugriff auf Konzepte der Analysis ermöglicht wird.

Bei der Gestaltung der Lernumgebungen wurde die Dynamische Geometrie Software (DGS) *Cinderella* (http://www.cinderella.de) verwendet. Diese ermöglicht durch ihre Einbindung einer Programmierschnittstelle eine Behandlung von Themen über die Geometrie hinaus. Insbesondere eröffnet sie neue Chancen der interaktiven Arbeit mit Funktionen. Eine Stärke von DGS-basierten Applikationen liegt beispielsweise in der Dynamisierung, die von Simultanität in verschiedenen Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten geprägt sein kann.

Darüber hinaus ist es möglich, applikationsbasierte Lernumgebungen zu erstellen, die unabhängig von der Installation der Software verwendet

---

[2] Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik, gefördert durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF)

werden können. Dies ist gerade im Hinblick auf Praktikabilität beim Einsatz in Unterricht und Lehre von Bedeutung.

3.1 Lernumgebung *Squiggle-M*

Squiggle-M ist eine interaktive Lernumgebung zur Entwicklung des Funktionsbegriffes. Die Software ist als Sammlung virtueller Lernlabore aufgebaut. Jedes Labor basiert auf einer Frage- oder Problemstellung, die mit Hilfe eines oder mehrerer interaktiver Diagramme untersucht werden kann. Dabei stellt jedes Diagramm eine andere Repräsentationsform einer Funktion dar.

Wir verfolgen einen dreistufigen Ansatz zur Entwicklung des Funktionsbegriffes sowie wichtiger Unterbegriffe wie *Eindeutigkeit*, *Totalität*, *Injektivität* und *Surjektivität*. In der ersten Stufe werden diese Begriffe mittels endlicher Pfeildiagramme eingeführt. Der Fokus liegt dabei auf dem Zuordnungsaspekt von Funktionen. Das Zuordnungslabor (Abbildung 3, links) bietet dazu die Möglichkeit, Zuordnungen interaktiv zu definieren und diese automatisch auf vorhandene Eigenschaften untersuchen zu lassen.

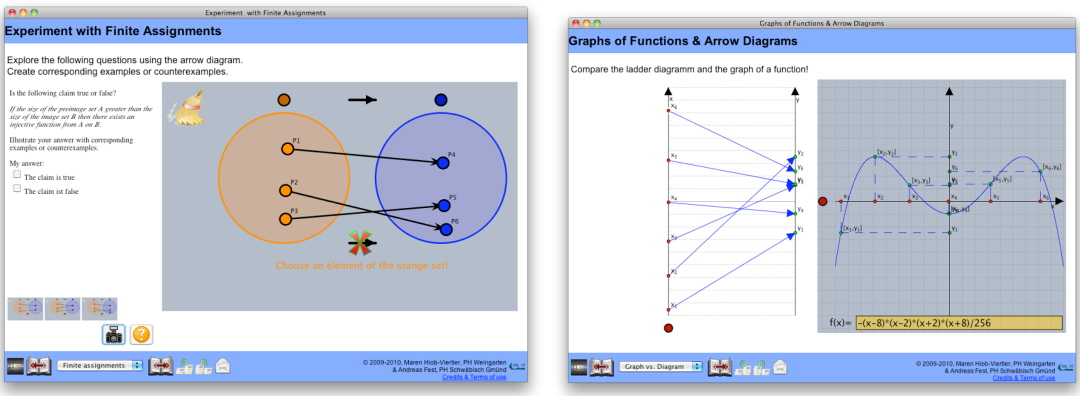


Abbildung 3: Squiggle-M. Das Zuordnungslabor (links) und das Repräsentationslabor (rechts).

Im zweiten Schritt werden die endlichen Pfeildiagramme durch Verwendung erweiterter Leiterdiagramme auf reelle Funktionen übertragen. Durch den Einsatz dynamischer Visualisierungen kann so auch der Änderungsaspekt von Funktionen erfasst werden (Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1991). Schließlich werden in einem dritten Schritt die dynamischen Leiterdiagramme mit Funktionsgraphen verknüpft. Die zuvor kennengelernten Konzepte können in beiden Darstellungen simultan beobachtet und untersucht werden (Abbildung 3 rechts). Dies führt gleichzeitig zu einer Integration des Objektaspekts von Funktionen, da nun auch globale Eigenschaften wie *Monotonie* oder *Extrema* betrachtet werden und auf die Begriffe *Injektivität* und *Surjektivität* bezogen werden können. Die Grundidee dieses dreistufigen Vorgehens beruht auf der Einsicht, dass Begriffsbildung durch Integration von Vorstellungen in das mentale Bild von Funktion stattfindet. Die Vorstellungen werden durch die Wahl verschiedener Repräsentationen in jeder Stufe erweitert und mit schon vorhandenen Vorstellungen vernetzt.

Das Zuordnungslabor und das Repräsentationslabor sind sowohl für den Einsatz im Frontalunterricht (Vorlesung) als auch für die individuelle Auseinandersetzung mit der Materie in Einzelarbeit oder Kleingruppen (Übungen) geeignet. Für den letzteren Fall enthält die Software integrierte Fragestellungen wie z.B. die Überprüfung bzw. Widerlegung der Aussage *„Wenn die Urbildmenge A größer als die Bild die Bildmenge B ist, dann existiert eine injektive Funktion von A nach B“*. Zu dieser Aussage sollen zunächst geeignete Beispiele oder Gegenbeispiele konstruiert und anschließend eine Entscheidung über die Korrektheit der Aussage getroffen werden.

Der Lernprozess wird außerdem durch ein semiautomatisches Assessmentsystem unterstützt (Bescherer et al., 2009 & 2011). Es wird dabei das Modul Feedback-M von Herding et al. (2010) verwendet. Zunächst gibt die Software auf Nachfrage direktes oder indirektes Feedback auf die Eingaben des Lernenden (Feedback on Demand). Kann die Software kein weiteres Feedback liefern, so kann der Lernende über eine integrierte E-Mail-Funktion persönliche Rückmeldung beim Lehrenden erfragen. Dazu wird unter anderem ein automatisch erzeugter Screenshot der aktuellen Situation mit versendet.

Das dreistufige Toolkonzept sowie die Umsetzung in der Lernsoftware wurden ausführlich von Fest, Hiob-Viertler & Hoffkamp (2011) beschrieben. Die Software wird ständig um weitere Labore erweitert, mit denen weitere Aspekte funktionalen Denkens sowie besondere Eigenschaften verschiedener Funktionstypen genauer untersucht werden können.

3.2 Lernumgebung *Die Reise*

Die Grundidee dieser Lernumgebung ist eine experimentell-interaktive Computernutzung mit dem Ziel die dynamische Komponente funktionalen Denkens zu akzentuieren. Ausgangspunkt ist eine *simultane dynamische Verknüpfung zwischen einer Situation und einem Funktionsgraphen* – hier zwischen einer Landkarte mit Timer und einem Weg-Zeit Graphen (Abbildung 4).

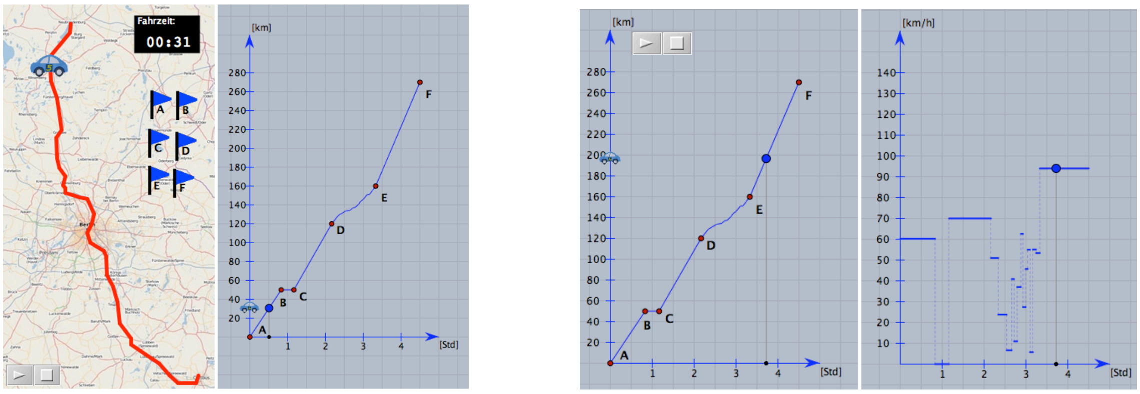


Abbildung 4: Verknüpfung Situation-Graph (links) und Variation innerhalb der Situation simultan in Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit Graph (rechts). Es kann die Animation benutzt werden oder die Punkte auf den Graphen als auch die Fähnchen bewegt werden. (© OpenStreetMap contributors, CC-BY-SA)

Die Lernenden markieren mit den Fähnchen die Stationen der Fahrt auf der Landkarte und verschaffen sich dadurch einen Überblick über die Situation. Dabei vollziehen sie einen Transfer zwischen der Darstellung der Fahrt in der Landkarte und der Darstellung im Weg-Zeit Graphen. In einem zweiten Schritt werden Weg-Zeit Graph und dazugehöriger Geschwindigkeits-Zeit Graph dynamisch verknüpft (*Variation innerhalb der Situation*). Die Lernenden sollen untersuchen und verbalisieren, wie sich die beiden Darstellungen zueinander verhalten, indem sie z.B. die Frage beantworten, ob man mit Hilfe des Geschwindigkeit-Zeit Graphen die zurückgelegte Wegstrecke bestimmen kann. In der Dynamik ist dies offensichtlich: Fährt man 50 Minuten lang eine Geschwindigkeit von 60 km/h, so hat man eine Strecke von 5/6 [h]·60 [km/h]=50 [km] zurückgelegt, was genau dem Integral unter dem ersten Balken entspricht. Mit anderen Worten: Hier soll eine idealisierte Darstellung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erkundet werden. Integration (zurückgelegte Wegstrecke aus dem Geschwindigkeit-Zeit Graphen rekonstruieren) und Ableitung („Wie liest man die Geschwindigkeit im Weg-Zeit Graphen ab?“) können dabei als inverse Prozesse dynamischer Natur wahrgenommen werden. Eine zweite Variationsstufe (*Metavariation*, ohne Abb.) erlaubt schließlich das Ändern der Situation und damit der Funktion als Ganzes. Dabei können die Lernenden in einem Geschwindigkeit-Zeit Graphen die Balkenbreite und -höhe von fünf vorgegebenen Balken ändern und die abschnittweisen und globalen Auswirkungen dieser Änderungen auf den Weg-Zeit Graphen untersuchen. Metavariation bezieht sich insbesondere auf den Objektaspekt und macht diesen Aspekt nutzbar. Darüber hinaus bewirkt Metavariation die Loslösung von konkreten Werten und richtet den Blick auf qualitative Betrachtungen der funktionalen Abhängigkeiten. Insofern kann man von einem qualitativ-inhaltlichen Zugang zu fundamentalen Konzepten der Analysis sprechen.

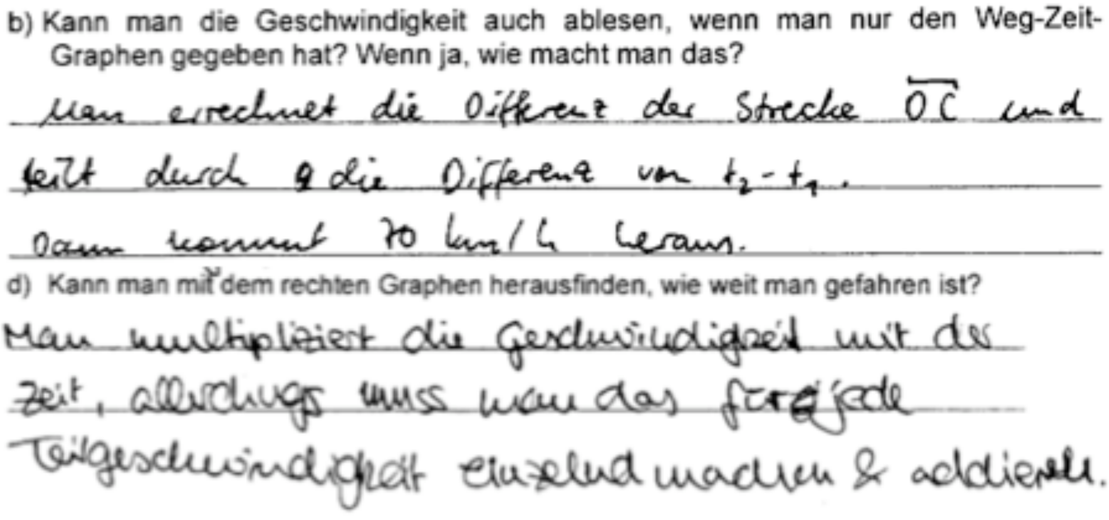
3.3 Erfahrungen aus dem Unterrichtseinsatz von *Die Reise*

Zum Abschluss der Darstellung der Lernumgebung *Die Reise* stellen wir einige Beispiele aus den Unterrichtserfahrungen in Klasse 10 zweier Berliner Gymnasien vor. Für die detaillierte Beschreibung der Studie und ihrer Ergebnisse sei auf Hoffkamp (2011a) verwiesen.

In einer ersten Aufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler unter Verwendung der Applikation in Abbildung 4 (links) die Stationen der Fahrt mit den Fähnchen auf der Landkarte markieren. Dabei kam es häufig vor, dass die Fähnchen B und C, also die „Pausenmarkierungen“, an verschiedene Stellen gesetzt wurden. Erst die inhaltliche Frage „Was passiert zwischen B und C?“ führte zur einer Revision der Markierungen und beispielsweise zu folgendem Gespräch (aus einer Videoanalyse):

Eine Schülerin bewegt den Punkt im Graphen zwischen B und C hin und her und sagt: *„Guck mal, der ist doch immer auf der gleichen Stelle!“ „Ja, er bewegt sich nicht.“ „Aber die Zeit verändert sich nur!“*

Die Schülerinnen verbalisieren basierend auf der dynamischen Darstellung den funktionalen Zusammenhang zwischen Weg und Zeit. Dabei wird die Zeit als unabhängige und die zurückgelegte Wegstrecke als abhängige Variable identifiziert. Eine Pause bedeutet in dynamischer Sprechweise dementsprechend, dass zwar Zeit vergeht, aber keine Wegstrecke zurückgelegt wird.


b) Kann man die Geschwindigkeit auch ablesen, wenn man nur den Weg-Zeit-Graphen gegeben hat? Wenn ja, wie macht man das?

Man errechnet die Differenz der Strecke $\overline{OC}$ und teilt durch ~~a~~ die Differenz von $t_2 - t_1$. Dann kommt 70 km/h heraus.

d) Kann man mit dem rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist?

Man multipliziert die Geschwindigkeit mit der Zeit, allerdings muss man das für jede Teilgeschwindigkeit einzeln machen & addieren.

Abbildung 5: Antworten auf dem Arbeitsbogen zum Zusammenhang zwischen Weg-Zeit und Geschwindigkeit-Zeit Graph.

Weiterhin zeigen die Antworten der Schülerinnen und Schüler, dass die Applikation in Abbildung 4 (rechts) zu einer qualitativ-inhaltlichen Entdeckung des inversen Zusammenhanges zwischen Differentiation und Integration führte (Abbildung 5).

4 Zusammenfassung und Ausblick

Der Einsatz von computerbasierten Visualisierungen eröffnet neue Möglichkeiten, verschiedene Repräsentationen von Funktionen und funktionaler Zusammenhänge interaktiv miteinander zu verknüpfen und ineinander zu überführen. Die Visualisierungen machen dabei verschiedene Konzepte direkt virtuell erlebbar. Dies kann zu einer Veränderung und zur Neustrukturierung der mentalen Modelle bei den Lernenden führen. Somit bieten Computertools, wie die hier vorgestellten Lernumgebungen, neue Impulse, die vielfältig im zukünftigen Mathematikunterricht der Schule und Hochschule eingesetzt werden können.

Die interaktive Visualisierung *Die Reise* bietet einen propädeutischen Zugang zur Differential- und Integralrechnung, der hier bereits in der Sekundarstufe I erfolgen kann. Sie kann als bewegtes (mentales) Bild jederzeit im Unterricht wieder aufgegriffen werden, insbesondere wenn es zu einer Weiterentwicklung und auch kalkülhaften Behandlung der Konzepte der Analysis kommt.

Beide präsentierte Lernumgebungen werden an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg erfolgreich im Rahmen der Lehrveranstaltung „*Anwendungsbezogene Mathematik*" sowohl in der Vorlesung als auch in den Übungen eingesetzt. Die Software *Squiggle-M* wird dabei vor allem im Begriffsbildungsprozess verwendet. So werden z.B. verschiedene Funktionen mit dynamischen Leiterdiagrammen dargestellt. Mit gezielten Fragestellungen werden dann Begriffe wie Monotonie, Polstellen, Extremstellen von Funktionen erarbeitet, für die erst im Anschluss daran eine exakte formale Definition formuliert wird. Auch an den Pädagogischen Hochschulen Karlsruhe und Heidelberg wird die Software zur Einführung des Funktionsbegriffes eingesetzt (Spannagel, 2011).

Die Lernumgebung Squiggle-M wird im Hinblick auf die Lernziele und Inhalte der neu konzipierten Lehrveranstaltung „*Mathematik anwenden*" an der PH Ludwigsburg auch zukünftig weiterentwickelt. Zum einen soll das Potential, das gerade in den dynamischen Leiterdiagrammen und ihrer Verknüpfung mit Funktionsgraphen steckt, stärker genutzt werden. Zum anderen werden weitere Visualisierungen und Aufgaben zur Erschließung besonderer Merkmale und Eigenschaften einzelner Funktionsklassen entwickelt.

5 Literatur

Bescherer, C., Kortenkamp, U. Müller, W. & Spannagel, C. (2009). Intelligent Computer Aided Assessment in Mathematics Classrooms. In A. McDougall, J. Murmane, A. Jones & N. Reynolds (Hrsg.), Researching IT in Education: Theory, Practise & Future Directions. Routledge, S. 200-205.

Bescherer, C., Herding, D., Kortenkamp, U., Müller, W. & Zimmermann, M. (2011). E-Learning Tools with Intelligent Assessment and Feedback. In: S. Graf et al. (eds.): *Adaptivity and Intelligent Support in Learning Environments.* IGI Global.

Dreyfus, T. & Vinner, S. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education,* 20(4), S. 356-366.

Fest, A., Hiob-Viertler M., Hoffkamp, A. (2011). An Interactive Learning Activity for the Formation of the Concept of Function based on Representational Transfer. *The Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 5(2).

Fischer, R., Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik – Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. BI Wissenschaftsverlag, Zürich.

Goldenberg, P., Lewis, P.G., & O'Keefe, J. (1991): Dynamic representation and the development of an understanding of function. In: E. Harel (Ed.): *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Bd. 25. Washington: MAA.

Hasselhorn, M., Gold, A. (2009). Pädagogische Psychologie – Erfolgreiches Lernen und Lehren, 2. Auflage, Kohlhammer, Stuttgart.

Herding, D., Zimmermann, M., Bescherer, C., Schröder, U. (2010). Entwicklung eines Frameworks für semi-automatisches Feedback zur Unterstützung bei Lernprozessen. Proceedings der DELFI 2010. Bonn: GI.

Hoffkamp, A. (2011a). Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse. Dissertation, TU Berlin. Online Publikation: http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2012/3348/ (zuletzt abgerufen am 12.04.2012).

Hoffkamp, A. (2011b). Dynamischer Darstellungstransfer bei Funktionen: Annäherung an Konzepte der Analysis. *Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 38, 53. Jahrgang, Aulis Verlag, S. 14-19.

Kortenkamp, U. (2007). Guidelines for Using Computers Creatively in Mathematics Education. In: *Enhancing University Mathematics: Proceedings of the First KAIST International Symposium on Teaching*. Ko, K. H., Arganbright, D. (Hrgs.), Bd. 14. CBMS Issues in Mathematics Education. AMS, S. 129–138.

Kronfellner, M. (1997). Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Hölder Pichler Tempski, Wien.

Krüger, K. (2000). Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Logos Verlag, Berlin.

Kultusministerkonferenz (KMK, Hrsg.). (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Luchterhand, Darmstadt.

Malle, G. (1984). Problemlösen und Visualisieren in der Mathematik. In: Kautschitsch, H. & Metzler, W. (Hrgs.), *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun.* Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 65-121.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, 103, S. 8–11.

Schulmeister, Rolf (2001): Virtuelle Universität – Virtuelles Lernen. München: Oldenbourg.

Swan, Malcolm u.a. (1985). The language of functions and graphs. Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham.

Spannagel, C. (2011). Funktionen mit Squiggle-M erforschen. Vorlesungsaufzeichnung vom 15.11.2011. Online auf YouTube.

http://www.youtube.com/watch?v=jHBYtbdEic4, zuletzt abgerufen am 29.03.2012

Vogel, Markus (2006). Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Franzbecker Verlag, Hildesheim.

Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10(1), S. 3–37.

Weigand, H.-G. (1988). Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften. *Journal für Mathematikdidaktik*, 9(88), S. 287-325.

Wittmann, E.C. (1992). Mathematikdidaktik als ‚design science'. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13, S. 55-70.