Funktionales Denken mit dem Computer unterstützen – Empirische Untersuchungen im Rahmen des propädeutischen Unterrichts der Analysis

Andrea Hoffkamp, Technische Universität Berlin

„Funktionales Denken beginnt bei intuitiven Vorstellungen über funktionale Zusammenhänge wie ‚Wenn man die eine Größe ändert, dann ändert sich die andere' oder ‚Je mehr..., desto mehr', und es ist voll entwickelt bei Denkweisen der Analysis"(Vollrath (1989)). Die Realität ist aber ein kalkülorientierter Analysisunterricht mit wenig inhaltlichen Vorstellungen. Deswegen plädieren viele Didaktiker für einen qualitativen Zugang zur Differential- und Integralrechnung - eine Forderung die schon seit 100 Jahren besteht (Krüger (2000)). Interaktiv-experimentelle Computernutzung ermöglicht durch visuelle Dynamisierung mathematischer Objekte die Akzentuierung der dynamischen Komponente funktionalen Denkens. Basierend auf Gestaltungsprinzipien, die auf die dynamische Komponente und die Objektsicht funktionaler Abhängigkeiten zielen, wurden drei interaktive Lernumgebungen entwickelt und in Klasse 10 im Hinblick auf einen qualitativen Einstieg in die Schulanalysis im Rahmen einer qualitativen Studie eingesetzt. Eine der Lernumgebungen, die zugrunde liegenden Ideen, sowie erste Ergebnisse der Studie werden im folgenden dargestellt.

1 Funktionales Denken und Analysispropädeutik

In der Meraner Reform (1905) wurde die ‚Erziehung zum funktionalen Denken' als Sonderaufgabe herausgestellt. Gefordert wurde, das Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten gebietsübergreifend einzuüben und zu flexibilisieren. Dabei ging es insbesondere um den Blick auf Bewegung und Veränderlichkeit. Die Differential- und Integralrechnung, die im Zuge der Meraner Reform Einzug in die Lehrpläne gefunden hat, sollte nicht aufgesetzter Zusatzstoff, sondern Höhepunkt in einem organisch aufgebauten Mathematikunterricht sein. In diesem Sinne kann die ‚Erziehung zum funktionalen Denken' als Propädeutik zur Differential- und Integralrechnung gesehen werden, in der es darum geht Funktionen als Ganzes im Zusammenhang zu sehen und Änderungsverhalten mit Mitteln der Analysis zu untersuchen (Krüger (2000)).

Vollrath (1989) unterscheidet drei Aspekte funktionaler Abhängigkeiten: Zuordnungsaspekt (statische oder punktweise Sicht), Aspekt der Änderung (dynamische Sicht) und Objektaspekt (Sicht auf Funktion als Ganzes). Änderungsaspekt und Objektaspekt kommen dabei dem Meraner Begriff am nächsten. Diese Aspekte lassen sich aber nur theoretisch trennen. Tatsächlich hängen sie eng zusammen. Will man beispielsweise ein globale Objekteigenschaft wie ‚Monotonie' beschreiben, so benutzt man die ‚Sprache des Änderungsaspektes': Ist $x \leq y$, so auch $f(x) \leq f(y)$ für alle x, y. Die Beschreibung von Änderungsverhalten geht damit einher, dass man die Funktion lokal als Objekt betrachtet.

Gerade die beiden letztgenannten Aspekte bereiten Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten. Das äußert sich beispielsweise darin, dass Funktionsgraphen als fotographische Bilder von Realsituationen gesehen werden (Graph-als-Bild-Fehler).

Abbildung 1.1 zeigt ein Beispiel aus einem Test zu Funktionen/funktionalem Denken mit Mathematikanfängerstudentinnen und -studenten an der TU Berlin, aus dem die Ideen für die in Abschnitt 2 beschriebene Lernumgebung entstanden sind. Die Studentin hat zunächst den Graphen ganz rechts angekreuzt, was als typischer Graph-als-Bild Fehler gewertet werden könnte. Dann kreuzt sie den Graphen ganz links an und verwendet für ihre Lösung Konzepte der Analysis (Integration), indem sie das Dreieck als stückweise lineare Funktion interpretiert und argumentiert, dass der Flächeninhaltsgraph quadratisch sein muss, weswegen der Graph ganz rechts ausgeschlossen ist. Hätte sie eine dynamische Sicht auf den funktionalen Zusammenhang, so hätte sie wenigstens die Monotonie erkannt. Mathematisch steckt hier der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung dahinter. Das Dreieck – als stückweise lineare Funktion interpretiert – ist gerade die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion. Wird der Punkt C überschritten, so ändert sich die Qualität des Wachstums – es liegt eine Wendestelle vor.

Ein oft beschriebenes Problem der Schulanalysis ist deren Kalkülorientierung, die oft

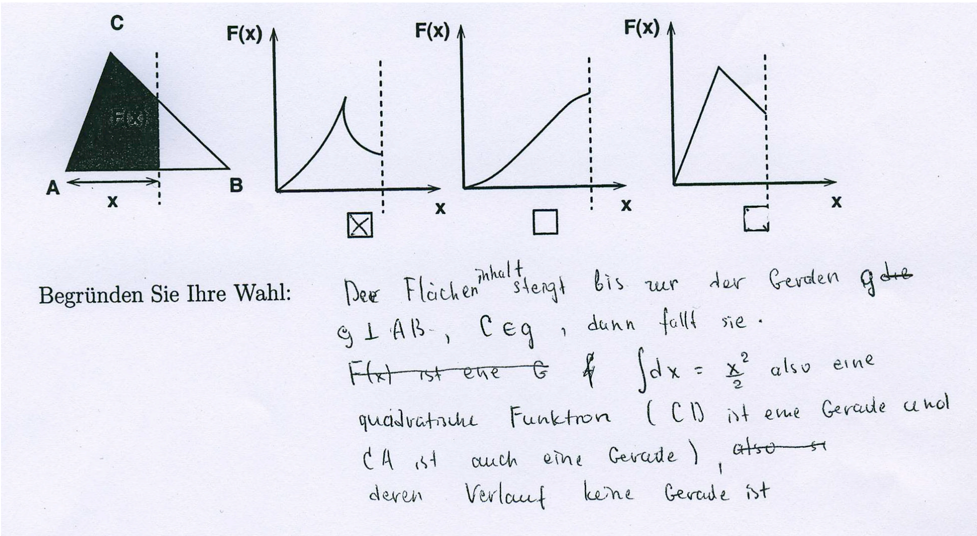

Abbildung 1.1: Lösung einer Mathematikstudentin zur Aufgabe: ‚Die gestrichelte Linie wird vom Punkte A um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Wert $F(x)$ gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an. Welcher Graph passt? ‘

losgelöst ist von inhaltlichen Vorstellungen. Viele Didaktiker plädieren deswegen für eine stärkere Gewichtung der qualitativen Anfänge der Analysis (Hahn & Prediger (2008), Stellmacher (1986), u.v.a.).

Für den Ansatz dieser Arbeit wird funktionales Denken – angelehnt an den Begriff aus der Meraner Reform – als Propädeutik zur Differential- und Integralrechnung gesehen. Die interaktiven Lernumgebungen sind als Ansatz zu verstehen, der zu einem qualitativen Einstieg in die Analysis beiträgt, bevor das Kalkül entwickelt wird.

2 Computernutzung – Grundideen und Gestaltungsleitlinien

Basierend auf der DGS Cinderella (Richter-Gebert & Kortenkamp (2006)) wurden im Zusammenhang mit Analysispropädeutik drei interaktive Lernumgebungen entwickelt, die zusammen mit Lehrmaterial unter Hoffkamp (2009c) frei zugänglich sind. Zur Nutzung der Lernumgebungen genügt ein Standardinternetbrowser. Spezielles Wissen zur Funktionsweise der Software ist nicht nötig (**geringer technischer Overhead**). Anhand einer der Lernumgebungen werden die Grundideen und Gestaltungsleitlinien im folgenden dargestellt.

Grundidee ist eine interaktiv-experimentelle Computernutzung mit dem Ziel die dynamische Komponente funktionalen Denkens hervorzuheben und inhaltliche Vorstellungen im Hinblick auf Propädeutik zur Differential- und Integralrechnung zu entwickeln. Abbildung 1.2 zeigt die Lernumgebung „Dreiecksfäche“. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Abstand $A-D$ und dem Flächeninhalt des dunkelblauen Flächenanteils dynamisch erkunden. Das Änderungsverhalten soll charakterisiert werden. Die Wendestelle soll als Stelle, an der sich die Qualität des Wachstums verändert, wahrgenommen werden. Wie in Abschnitt 1 beschrieben handelt es sich hierbei um eine dynamische Visualisierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Interpretiert man das Dreieck als stückweise lineare Funktion, so wird der Zusammenhang zwischen Bestandsgraph und Änderungsgraph dargestellt. Die Wendestelle ist insbesondere als Maximum der Ableitung sichtbar. Da die Ableitung im Maximum nicht differenzierbar ist, kann die Wendestelle nicht mit dem Kalkül gefunden werden.

Folgende Gestaltungsleitlinien liegen allen drei Lernumgebungen zugrunde (s. auch Hoffkamp (2009a), Hoffkamp (2009b)):

Verknüpfung Situation – Graph:

Anknüpfend an inhaltlichen Vorstellungen ist der Ausgangspunkt ein funktionaler Zusammenhang innerhalb einer Situation und deren dynamische Verknüpfung mit der Darstellungsform Graph. Die graphische Darstellung wurde gewählt, weil sie sich besonders auf die dynamische Komponente funktiona-

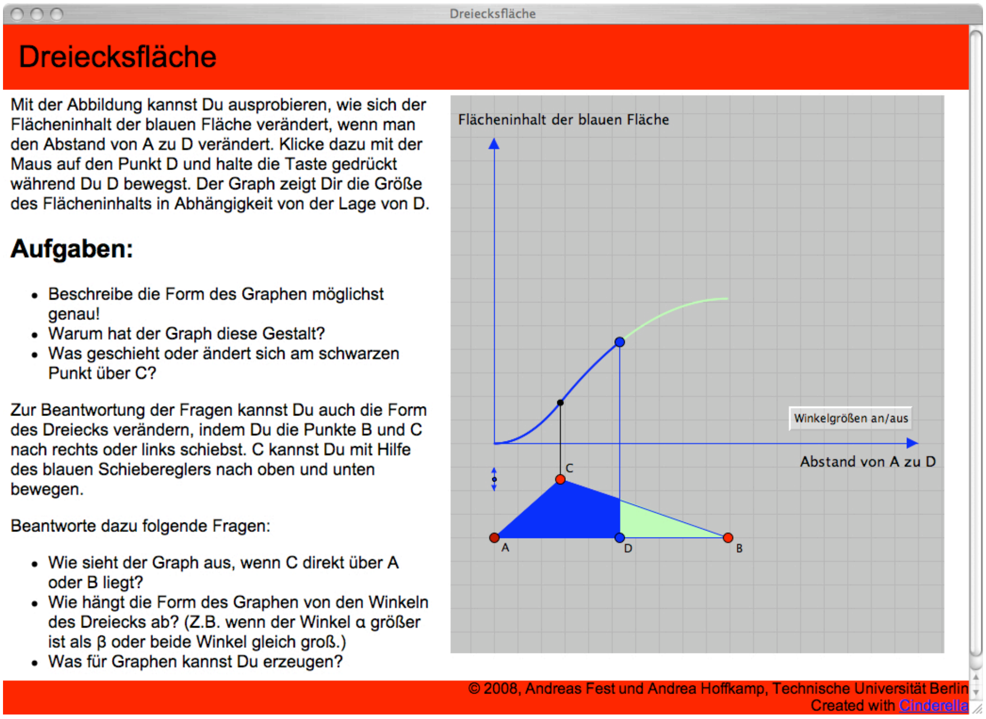

Abbildung 1.2: Screenshot der interaktiven Lernumgebung „Dreiecksfäche". Beweglich sind die Punkte B, C, D.

len Denkens bezieht und die gesamte Information, wie lokale und globale Funktionseigenschaften „auf einen Blick" enthält.

Zwei Variationsstufen:

Die Bewegung des Punktes D erlaubt **Variation innerhalb der Situation**. Der Änderungsaspekt wird dadurch simultan in den Darstellungsformen Situation und Graph visualisiert. Monotonie der Fächeninhaltsfunktion äußert sich darin, dass ‚immer mehr blau dazukommt '.

Die Charakteristik der Wendestelle lässt sich inhaltlich beispielsweise beschreiben durch: ‚Vor dieser Stelle wächst der hinzuzuaddierende Fächeninhalt und danach sinkt er'.

Die zweite Variationsstufe – genannt **Metavariation** – erlaubt nun durch Bewegung der Punkte B und C das Ändern der Situation und somit das Ändern der Funktion als Ganzes (Abbildung 1.3).

Somit bezieht sich Metavariation insbesondere auf den Objektaspekt, indem sie das Argument des Integraloperators, also der *Metafunktion*, die der Situation den Fächeninhaltsgraphen zuordnet, variiert. Metavariation erzwingt eine Loslösung von konkreten Werten und damit eine Hinwendung zu qualitativen Betrachtungsweisen. Insbesondere werden auffällige Charakteristika der Flächeninhaltsfunktion hervorgehoben: Monotonie ist invariant unter Metavariation, die Existenz der Wendestelle ist ‚beinahe invariant'. Auch Begriffe wie ‚konvex' und ‚konkav' und deren inhaltlich–qualitative Unterscheidung tauchen auf.

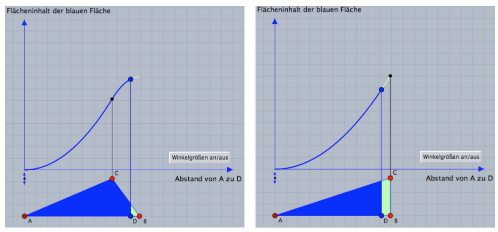

Abbildung 1.3: Metavariation

Sprache als Vermittler: Die Schülerinnen und Schüler sind stets aufgefordert ihre Beobachtungen zu verbalisieren und auf einem dazugehörigen Arbeitsbogen zu notieren. Schon Janvier (1978) wies auf die Rolle der Sprache als Vermittler zwischen den Darstellungen und den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler hin. Sprache hat hier sowohl kognitive als auch kooperative Funktion.

Kontiguität: Dies meint räumliche und zeitliche Nähe von sich aufeinander beziehenden Darstellungsformen. Insbesondere ist die Tatsache, dass Bewegung genau dort geschieht, wo mit der Maus agiert wird, hervorzuheben. Dadurch wurde eine besonders integrative visuelle Darstellung erreicht.

Praktikabilität: Die Lernumgebungen sind im Hinblick auf Nutzbarkeit im Unterricht entworfen. Sie eignen sich jeweils für eine Doppelstunde und können wegen des geringen technischen Overheads ohne Einarbeitungszeit genutzt werden.

3 Forschungsfragen und Studiendesign

Folgenden **Forschungsfragen** wurde im Rahmen einer **qualitativen Studie** nachgegangen:

- Welche Vorstellungen und Begriffe im Hinblick auf eine dynamische Sicht funktionaler Abhängigkeiten werden bei der Arbeit mit den Lernumgebungen entwickelt, wenn es um die qualitative Beschreibung lokaler und globaler Funktionseigenschaften (wie Extrema, Wendestellen, Monotonie, Steigung, nicht-lineares Wachstum) geht?
- Wie sehen die Interaktionsprozesse (Mensch–Mensch, Mensch–Computer) aus und welche Rolle spielen dabei die Möglichkeiten der Applikationen (Variation, Metavariation)?
- Welche epistemologischen Denkhürden sind erkennbar?

Lerntheoretisch werden diese Fragen unter dem Conceptual-Change-Ansatz (Vosniadou & Vamvakoussi (2006), Hahn & Prediger (2008)) betrachtet. Im Lichte dieses Ansatzes bedeutet ein Graph-als-Bild-Fehler (siehe Abschnitt 1) eine Aktivierung einer nicht-situationsadäquaten Vorstellung. Im Sinne eines Conceptual-Change geht es um den Aufbau geeigneter Vorstellungen mit dem Ziel, dass die Kontexte, in denen gewisse Vorstellungen aktiviert werden, verschoben werden.

Epistemologische Hürden, also Denkhürden, die in einem konstruktivistischen Lernprozess überwunden werden müssen, sind wichtige Momente beim Lernen. In der Auseinandersetzung mit diesen Hürden liegt oft der Schlüssel für eine Erweiterung der Sicht auf mathematische Konzepte. In Sierpinska (1992) werden einige typische Hürden im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff identifiziert und beschrieben.

Studiendesign:

Insgesamt wurden drei Lernumgebungen (Hoffkamp (2009c)) in zwei zehnten Klassen an verschiedenen Berliner Gymnasien eingesetzt. Der zeitliche Rahmen bestand jeweils aus drei Doppelstunden plus einer Einzelstunde. Die Schülerinnen und Schüler arbeiteten in Zweiergruppen zunächst eigenständig mit der Lernumgebung. Die dabei formulierten Beobachtungen wurden in einem nachfolgendem Unterrichtsgespräch diskutiert.

Pro Lernumgebung wurden vier Schülerpaare (zwei Paare pro Klasse) videographiert, und deren Gespräche und Bildschirmaktionen aufgezeichnet. Die Unterrichtsgespräche wurden ebenfalls auf Video festgehalten.

Weiteres Auswertungsmaterial liegt in Form der bearbeiteten Arbeitsbögen, eines kurzen Tests und eines Fragebogens vor.

4 Auswertung und ausgewählte Ergebnisse

4.1 Auswertungsverfahren

Hauptauswertungsmaterial sind die Videos der Schülerpaare am Computer. Zunächst wurde von jedem Video ein Rohdokument angefertigt. Die Rohdokumente sind Tabellen mit folgenden Spalten: *Zeit, Paraphrase, Computeraktion, Rohtranskript, erste Deutungen*.

Auf Grundlage der Rohdokumente wurden Episoden zur Transkription ausgewählt. Der Schwerpunkt liegt auf Episoden, in denen es um die Bearbeitung der Fragen *Warum hat der Graph diese Gestalt?* und *Was geschieht oder ändert sich am schwarzen Punkt über C?* geht.

Zur Deutung und Analyse wurden auch die Formulierungen auf den Arbeitsbögen herangezogen.

Die Auswertung orientiert sich an den Grundsätzen der *interpretativen Unterrichtsforschung* (Maier & Voigt (1991)). Lehren und Lernen von Mathematik werden als Momente eines sozialen Prozesses gesehen, in dem mathematische Bedeutung aktiv konstruiert wird. Ziel ist die Re–Konstruktion der Bedeutung aus Texten (hier: Transkripte, Arbeitsbögen). Theoretisch ist dies gebunden an den Conceptual–Change–Ansatz.

4.2 Ausgewählte Ergebnisse

Eine Hauptschwierigkeit ist die **inhaltliche und begriffliche Trennung zwischen Bestand und Änderung**. Die Änderung des Flächeninhalts abhängig vom Abstand $A-D$ muss dabei sowohl in der Sprache der Situation (Zuwachs an Flächeninhalt) als auch

S2:	Aber für mich sinkt er nicht, der steigt doch eindeutig.
S1:	Aber der, siehste das- *(zeigt auf Monitor)*
S2:	Wenn er, wenn er sinken würde, würde es doch so wieder runter gehen *(zeigt auf Monitor)*
S1:	Er muss nicht-
S2:	[Das ist sinken.
S1:	Nein, er nimmt aber ab. Das Verhältnis nimmt doch ab.
S2:	[Nein.
S1:	Kuck mal, wenn es so runtergeht
S2:	[Ja, dann sagen wir ‚das Verhältnis nimmt ab', aber hier *(zeigt auf Monitor)* steigt er doch noch. Der steigt auch da und auch da
S1:	[Ja, das ist doch immer das Verhältnis. Der Graph ist doch das Verhältnis.
S2:	Nee (.) Ja, ok, der Graph kann das Verhältnis sein, aber sinkt da *(zeigt auf Monitor)* auf keinen Fall. Der steigt noch. *(lacht nach vorne)* Ja, ok.
S1:	Aber im Verhältnis nimmt er ab.
S2:	*(beginnt zu schreiben)* dann im Verhältnis
J:	*(von vorne)* Wie wär's, wenn Ihr sagt ‚die Steigung nimmt ab'.
S1:	*(lächelt)* Stimmt. Ist gut.

Abbildung 1.4: Transkriptauszug eines Schülerpaares zur Frage *Warum hat er Graph diese Gestalt?*

in der Sprache des Funktionsgraphen (Steigung in einem Punkt) gefasst werden. Darüber hinaus müssen die beiden Repräsentationen Situation–Graph verbunden werden.

Die Diskussionen der Schülerinnen und Schüler sind geprägt von einem häufigen Wechsel zwischen Bestands- und Änderungssicht und dem gleichzeitigen begrifflichen und gedanklichen Ringen um Bestand und Änderung. Das hat damit zu tun, dass der Ableitungsgraph (Dreieck als stückweise lineare Funktion) ja tatsächlich sichtbar ist. Die Änderung (z.B. das Abnehmen der Steigung nach Überschreiten der Wendetelle) ist als Bestand im Ableitungsgraphen zu sehen, der ab der Wendestelle monoton sinkt. Mit anderen Worten: Der *Bestand der Ableitungsfunktion* spiegelt gerade die *Änderung der Bestandsfunktion* wider. In der Lernumgebung sind genau diese Ebenen dynamisch visualisiert und verbunden. Hahn & Prediger (2008), S. 177, beschreiben dies als Ebenen- und Aspektwechsel: Der Aspekt der Änderung auf Ebene der Funktion f entspricht dem Zuordnungsaspekt auf Ebene der Ableitungsfunktion f'.

Abbildung 1.4 zeigt in diesem Zusammenhang einen kleinen Ausschnitt eines Transkriptes einer längeren Diskussion zweier Schülerinnen. Der Diskussion geht voraus, dass S1 der Ansicht ist, dass der Flächeninhaltsgraph nach Überschreiten der Wendestelle sinkt, aber S2 damit nicht einverstanden ist. Schließlich schaltet sich ein Mitschüler (J) aus der vorderen Bankreihe ein (82) und sagt *‚Wie wär's, wenn ihr sagt ‚die Steigung nimmt ab'*. Damit war auf der Seite der graphischen Darstellung ein Begriff (*Steigung*) für das Änderungsverhalten gefunden worden. Auf der Seite der Situation gelang es den Schülerinnen jedoch nicht, das Änderungsverhalten geeignet zu beschreiben. Das Transkript zeigt, dass sie von einem *Verhältnis* sprechen, das *abnimmt* (72, 75). Ihr Antwortsatz auf dem Arbeitsbogen zur Beantwortung der Frage *Warum hat der Graph diese Gestalt?* lautet:

Da der Flächeninhalt in Abhängigkeit zu $\overline{AD}$ anfangs steigt, dann nimmt die Steigung leicht ab, da die Strecke AD im Verhältnis zum Flächeninhalt abnimmt, der Graph muss immer steigen, da der Flächeninhalt auch immer größer wird.

Auf Situationsseite sprechen sie davon, dass das *Verhältnis Länge AD zu Flächeninhalt* nach Überschreiten der Wendestelle abnimmt, was in diesem Fall nicht korrekt ist. Statt Änderungsraten und abschnittweiser Sicht, wird hier jeweils nur der Abschnitt vom Ursprung ausgehend gesehen.

Die Monotonie erfassen sie sowohl auf graphischer als auch situativer Seite (*‚der Graph muss immer steigen, da der Flächeninhalt auch immer größer wird*').

Abbildung 1.5 zeigt einen Transkiptauszug, der die **Epistemologische Hürde ‚Steigung in einem Punkt**' deutlich macht. Wieder geht es um Frage, warum der Graph diese Gestalt hat und insbesondere, was sich bei Überschreiten des Punktes C ändert. S2 ist der Ansicht, die Funktion hätte *keinen Anstieg* (36,37), weil der Begriff *Anstieg* für Geraden reserviert ist. In (39, 40) verschiebt sie Punkt C horizontal (Metavariation) und sagt: *‚da gibt es keinen Anstieg, weil der Anstieg ist überall unterschiedlich*'.

Gerade das horizontale Verschieben von C scheint zu verdeutlichen, dass sich der

35 S1: [..] ich würde sagen ‚der Anstieg der Funktion' ändert sich
36 S2: Ne,ne, der Anstieg, die Funktion hat keinen Anstieg, weil, wenn
37 sie einen Anstieg hätte, wäre sie gerade
[..]
39 S2: *(verschiebt C horizontal ein paar Mal hin und her)* Der guck mal, weil der das ääh, da gibt es
40 keinen Anstieg, weil der Anstieg ist überall unterschiedlich.

Abbildung 1.5: Transkriptauszug eines Schülerpaares zur epistemologischen Hürde *Steigung in einem Punkt*

Anstieg in jedem Punkt ändert. Die Beobachtung von S2 ist somit ein Moment, der im Lernprozess produktiv aufgegriffen werden kann, um das *Konzept von Steigung* zu erweitern. Die Notwendigkeit dieser Konzepterweiterung hat S2 im Prinzip selbst formuliert.

Metavariation verdeutlicht Grapheneigenschaften und hat dadurch einen auffordernden Charakter, wenn es um Erklärungssuche geht. Metavariation wurde von den Schülerinnen und Schülern häufig genutzt, um Vermutungen zu überprüfen und Grapheneigenschaften zu erkunden.

Metavariation verdeckt aber auch oft die Variation erster Stufe, da visuell bei Bewegung von Punkt D (Variation erster Stufe) weniger geschieht, als bei Bewegung der anderen Punkte. Deswegen war es oft wichtig, die Schülerinnen und Schüler nochmals über die Art der Zuordnung (also auf eine punktweise Sicht) aufmerksam zu machen.

Zusammenfassung

Die Diskussionen der Schülerinnen und Schüler sind geprägt von einem begrifflichen und gedanklichen Ringen um Bestand und Änderung. Insbesondere fällt es schwer, das Änderungsverhalten auf situativer Seite geeignet zu beschreiben. Auf graphischer Seite werden hierfür meist die Begriffe *Steigung* oder *Anstieg* benutzt. Dabei ist es eine epistemologische Hürde, den Begriff der Steigung auf einzelne Punkte anzuwenden. Dies kann im Lernprozess produktiv genutzt werden, wenn es um die Erweiterung des Konzeptes *Steigung* geht.

Metavariation verdeutlicht Grapheneigenschaften z.B. dadurch, dass gewisse Eigenschaften invariant unter Metavariation sind. Das führt zu Erklärungszwängen. Sie wird oft zur Überprüfung von Vermutungen über den funktionalen Zusammenhang genutzt, aber sie verdeckt auch die Variation erster Stufe durch den stärkeren visuellen Eindruck.

Literatur

Hahn, Steffen & Susanne Prediger (2008): Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. JMD, 29(3/4), 163–198

Hoffkamp, Andrea (2009a): Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. In: Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematical Education, Lyon

Hoffkamp, Andrea (2009b): Funktionales Denken und Analysispropädeutik – Ein Beitrag zu einem qualitativen Einstieg in die Schulanalysis durch Computereinsatz. Computeralgebra–Rundbrief, 45, 27–29

Hoffkamp, Andrea (2009c): Homepage Andrea Hoffkamp. URL `http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp`

Janvier, Claude (1978): The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Dissertation, University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education

Krüger, Katja (2000): Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. Mathematische Semesterberichte, 47, 221–241

Maier, Hermann & Jörg Voigt (Hg.) (1991): Interpretative Unterrichtsforschung. Aulis Verlag

Richter-Gebert, Jürgen & Ulrich Kortenkamp (2006): The Interactive Geometry Software Cinderella, Version 2.0. URL `http://www.cinderella.de`

Sierpinska, Anna (1992): On understanding the notion of function. In: Harel, Guershon & Ed Dubinsky (Hg.): The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy, Mathematical Association of America, 25–58

Stellmacher, Hubertus (1986): Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht. In: Harten, Gerd, Hans N. Jahnke, Thomas Mormann et al. (Hg.): Funktionsbegriff und funktionales Denken, Aulis Verlag, 21–34

Vollrath, Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken. JMD, 29(1), 3–37

Vosniadou, Stella & Xenia Vamvakoussi (2006): Examining Mathematics Learning from a Conceptual Point of View. In: Verschaffel, Lieven et al. (Hg.): Instructional Psychology: Past, present, and future trends – Sixteen essays in honour of Eric De Conte. Advances in Learning and Instruction Series, Elsevier