Nicolas REGEL, Dresden

Mathematik hören – Analysis mit dem Synthesizer

Historisch sind die Disziplinen Mathematik und Musik eng verwandt. Bei den Pythagoreern galt die Musiklehre (Harmonika) als eine der vier Lehrfächer (Mathemata). Die einfachen Zahlenverhältnisse, die den wohlklingenden (symphonen) Intervallen zu Grunde liegen, waren wichtiger Bestandteil des Lehrsatzes „Alles ist Zahl“. Bis ins Mittelalter, als in eben diesen Verhältnissen ein planender göttlicher Geist vermutet wurde, blieb diese enge Beziehung bestehen. Ab der Renaissance strebten Musiktheorie und Mathematik aus musikpraktischen Gründen langsam auseinander, sodass heute beispielsweise fächerverbindende Ansätze die Ausnahme sind (Reiter 2013).

Bei einer historischen Betrachtung der Musik**theorie** wird weitgehend außer acht gelassen, dass mit der Entwicklung von Synthesizern (Instrumente mit elektronischer Klangerzeugung) seit den 1970er Jahren beide Disziplinen wieder aneinanderrücken. Historisch zum ersten Mal basiert die Klangerzeugung und -formung selbst auf mathematischen Funktionen. Beim „Sounddesign“ am Synthesizer werden auf vielfältige Art Funktionen verknüpft. So ist in Abb. 1 ein typischer „Synthesizer-Patch“ zu sehen. Das zugehörige Audiobeispiel und Material zum Vortrag ist zu finden unter: https://cloudstore.zih.tu-dresden.de/index.php/s/wMyQfArHs8rA7dx.

Einzelne Module des Synthesizers produzieren dabei Funktionen, welche über Kabel verknüpft werden können. Die resultierende Funktion ist dann hörbar bzw. im Oszilloskop sichtbar. Im Beispiel ist das hörbare Ergebnis ein Produkt aus drei Funktionen: Einer Sinusfunktion, deren Frequenz im hörbaren Spektrum liegt, sowie zwei Funktionen, die die Amplitude und damit die wahrgenommene Lautstärke dieses Tons modulieren. Musikalisch würde man eine davon (im Oszilloskop rot) als Hüllkurve des Tons bezeichnen, die zweite Sinusfunktion als „Tremolo-Effekt“.

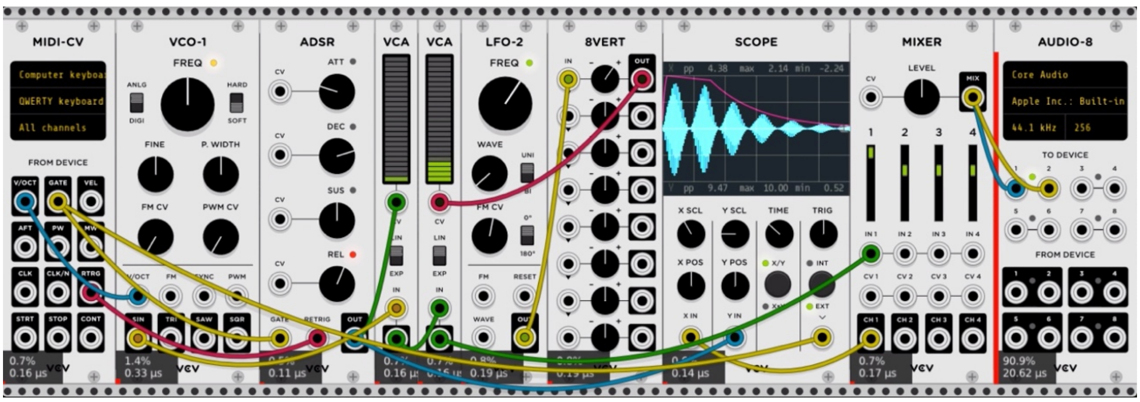

Abb. 1: Beispiel eines Patches in dem Softwaresynthesizer VCV-Rack

Entgegen der auf den ersten Blick vermeintlichen Komplexität ist Sounddesign und somit das Verknüpfen von Funktionen am Synthesizer sehr intuitiv. Parameter können durch die Potentiometer (Drehknöpfe) oder durch Setzen einer Kabelverbindung von einer anderen Funktion bearbeitet werden. Auf diese enaktiven Veränderungen des Patches erfolgt sofort ein ikonisches und auditives Feedback. Bezogen auf den bearbeiteten Parameter ermöglicht dieses direkte Feedback den Aufbau von Kovariationsorstellungen. Die Möglichkeit mittels einer Kabelverbindung „den Knopf von einer anderen Funktion drehen zu lassen“ schafft darüber hinaus einen intuitiven Wechsel zwischen Variablen im Veränderlichen- und Einzelzahlaspekt, wie sie von Greefrath et. al. (2016) formuliert werden.

Auch zwischen den Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff nach Malle (2000) und Vollrath (2014) – Zuordnungsvorstellung, Kovariationsvorstellung und Objektvorstellung – wird intuitiv gewechselt. Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung werden beim Verknüpfen der Funktionen mittels Kabel benötigt. Die Zuordnung findet also tatsächlich haptisch statt, mit dem Ziel einer Kovariation des angeschlossenen Parameters. Die Objektvorstellung wiederum steckt schon im modularen Aufbau an sich. Einzelne Funktionen entsprechen einzelnen Modulen, also Objekten, die als solche verknüpft werden können. Die resultierende Funktion entspricht einem Objekt im Sinne eines „Sounds“ oder „Patches“.

Zentrales Problem der Anwendung gängiger Synthesizer (wie in Abb. 1) im Mathematikunterricht ist die in der Elektrotechnik begründete Bezeichnung der Module und Parameter. Ein Modul, das eine Sinusfunktion erzeugt, wird beispielsweise als VCO (Voltage Controlled Oscillator) bezeichnet. Die neuen Begriffe müssen also zusätzlich gelernt werden und bilden eine zusätzliche Barriere bei der Erfassung des Lerngegenstands. Eine weitere Einschränkung ist die Beschränkung auf Funktionen, die einen spezifischen musikalischen Zweck erfüllen, also üblicherweise periodische Funktionen.

Diese Probleme sind in der Entwicklung für eine rein musikalische Anwendung begründet und würden sich durch einen speziell für den Mathematikunterricht entwickelten Synthesizer lösen lassen. Ein Konzept für einen solchen soll hier im Folgenden vorgestellt werden. Ein Beispielpatch ist als Konzeptdesign in Abb. 2 zu sehen.

Der Grundaufbau dieses Synthesizers ist modular. Das heißt, er besteht gewissermaßen aus einzelnen Bausteinen, die untereinander mittels Kabelverbindungen verknüpft werden können. Die Kabel werden an den einzelnen Modulen in Buchsen gesteckt. Weiße Buchsen sind dabei Ausgänge, farbige Buchsen Eingänge. Eine Kabelverbindung stellt dabei eine Gleichung her, bzw. definiert den Wert der angeschlossenen bunten Buchse als den der weißen. Die Module sind dabei wiederum die Objekte zwischen denen diese Gleichungen hergestellt werden. In Abb. 2 links oben ist beispielsweise ein Sinus-Modul zu sehen, welches eine zeitabhängige Sinusfunktion liefert. Die Parameter der Funktion sind dabei über Potentiometer beeinflussbar. Alternativ kann der Parameterwert über die zugehörige Eingangsbuchse definiert und beispielsweise von einer anderen Funktion gesteuert werden. Auf diese Weise können verschiedene Funktionen verknüpft werden. Oder es stehen dazu verschiedene Verknüpfungsmodule zur Verfügung. Ein Beispiel dafür ist das Plus-Modul unten rechts in Abb. 2.

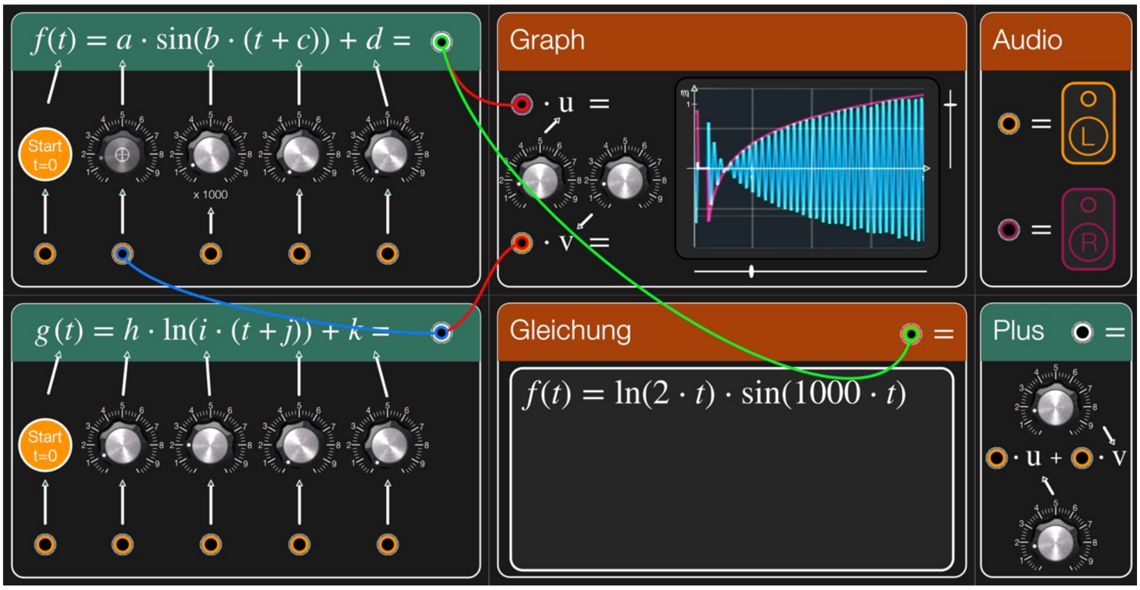

Abb. 2: Konzept eines Synthesizers für den Mathematikunterricht

Die so verknüpften Funktionen können mit den Feedback-Modulen (orange) ausgegeben werden. Das Graph-Modul gibt dabei ikonisches, das Gleichungs-Modul symbolisches und das Audio-Modul auditives Feedback. Dabei wird immer die Verknüpfte und nicht zwangsläufig überall die gleiche Funktion angezeigt. Im Audio- und im Graph-Modul können dabei zwei verschiedene Funktionen gleichzeitig ausgewertet werden. Im Beispiel zeigt das Graph-Modul dabei die resultierende Funktion und die Hüllkurve an.

Die üblichen Ausgaben von Synthesizern werden mit diesem Konzept um ein symbolisches Feedback ergänzt. Das ermöglicht ein direktes ikonisches, symbolisches und auditives Feedback auf enaktive Veränderungen der Funktion.

Letzteres ist eine Besonderheit des Ansatzes und soll hier kurz diskutiert werden.

Funktionen mit anderen Sinnen zu betrachten, also zu erhören, erweitert die Behandlung dieser um einen neuen Aspekt und kann beispielsweise das Denken mit Prototypen nach Dörfler ergänzen (vgl. Reiter 2013 S. 15ff.). Die zeitliche Abhängigkeit ist dabei der auditiven Wahrnehmung immanent. In der zeitlichen Abhängigkeit wird dabei zum einen der Kovariationsaspekt deutlich, die auditive Wahrnehmung hat aber auch zur Folge, dass beim Sprechen über diese nicht direkt darauf verwiesen werden kann. Das schafft einen „authentischen Kommunikationsanlass" zum Aufbau fachsprachlicher Kompetenz (vgl. Reiter 2013 S. 143ff.). Das Betrachten einer Funktion in der Objektvorstellung kann durch die Identifikation mit einem speziellen Sound unterstützt werden.

Der Synthesizer ist aber nicht auf hörbare Funktionen beschränkt. Das auditive Feedback kann hier zusätzlich genutzt werden, ist aber nicht zwingend erforderlich. Generell können beliebige Funktionen am Synthesizer behandelt werden. Die dargestellten Funktionenmodule sind dabei nur als Beispiele zu sehen.

Zusätzlich zu den dargestellten mathematikspezifischen Modulen wird es Module geben, die eine Anbindung an musikalische Umgebungen ermöglichen, sodass die Funktionsparameter beispielsweise mit einer Klaviatur beeinflusst werden können, um die verknüpften Funktionen so tatsächlich als Synthesizersound zu spielen.

Der Synthesizer soll im Laufe meiner Promotion als Software und Hardwaregerät verfügbar und mit dafür entwickelten Unterrichtskonzepten erprobt werden.

Zu vermuten ist, dass die intuitive Verknüpfungs- und Arbeitsmechanik in Kombination mit dem auditiven Feedback einen kreativen Zugang zu und Umgang mit Funktionen ermöglicht.

Literatur

Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V., Weigand H.-G. (2016). Didaktik der Analysis - Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer Verlag

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, 103, 8–11.

Vollrath, H.-J. (2014). Funktionale Zusammenhänge. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik*. Seelze: Friedrich.

Reiter S. (2013). Musikalische Graphen – Entwicklung eines Verständnisses graphischer Darstellungen im Fächerübergreifenden Mathematik- und Musikunterricht. Münster u.a.: Waxmann Verlag