REGEL, Nicolas
Dresden

Der Objektaspekt im Fokus: Konzeptuelle Erweiterungen der Funktionenmaschine am Mathe-Synthesizer

In der Mathematikdidaktik besteht Konsens, dass das Konzept der Funktion nicht primär von ihren einzelnen Repräsentationen ausgehend, sondern „vom Phänomen zur Funktion hin“ entwickelt werden sollte. Tall, McGowen und DeMarois (2000) betonen dabei das Problem, dass dieses Lehren neuer Funktionentypen und Darstellungen anhand jeweils neuer Phänomene dazu führe, dass der Lernprozess immer wieder von vorn beginne. Als Lösung schlagen sie vor, dass anstelle einer Vielzahl unterschiedlicher Kontexte, von denen erwartet werde, dass die Schüler:innen den Funktionsbegriff abstrahieren, die Funktionenmaschine als anschlussfähige Metapher, als „Cognitive Root“ genutzt werden könne. Die Funktionenmaschine, gedacht als eine Input-Output-Box, verkörpere bereits sowohl einen objektähnlichen Status als auch den Prozessaspekt von Input zu Output. Die üblichen Repräsentationen einer Funktion - wie Tabellen, Graphen, Formeln und verbale Formulierungen - könnten ebenfalls als Wege betrachtet werden, um die innere Input-Output-Beziehung darzustellen (Tall et al., 2000).

Der hier vorgestellte Mathe-Synthesizer baut auf dieser Cognitive Root auf und erweitert diese. Er integriert Elemente wie eine einfache Verkettungsmechanik, Parameter und Verknüpfungen, um insbesondere das Arbeiten mit der Objektvorstellung zu adressieren.

Vorstellungen zum Funktionsbegriff im Kontext der Funktionenmaschine als Cognitive Root

Es scheint, als ob im Bereich der deutschsprachigen Mathematikdidaktik das Konzept der Funktionenmaschine als Cognitive Root, trotz seiner Bedeutung in der englischsprachigen Fachgemeinschaft, weniger Beachtung gefunden hat. Tall et al. (2000) heben hervor, dass die Funktionenmaschine sowohl den objektartigen Status als auch den Prozessaspekt im Sinne einer Input-Output-Box verkörpere, was Sfards (1991) dualem Verständnis von Funktionen entspricht. Jedoch wird das Konzept der Kovariation hierbei nicht unmittelbar repräsentiert, eine Vorstellung, die in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik, insbesondere durch Vollraths Einfluss, stärker betont wird. Aber auch im Sinne Vollraths (1989) veranschaulicht die Funktionenmaschine sowohl die Objekt- als auch die Zuordnungsvorstellung.

In der deutschsprachigen Fachgemeinschaft ist die Funktionenmaschine vor allem im Kontext von „guess my rule“ Problemen oder zur Darstellung verketteter Funktionen zu finden (z.B. bei Barzel et al., 2021, S. 317). Insbesondere das Potential für das komplexe Operieren in der Objektvorstellung kann also noch besser genutzt werden. Konzeptuelle Erweiterungen, wie sie der Mathe-Synthesizer bietet, können hierbei einen Beitrag leisten.

Erweiterung der Funktionenmaschine am Mathe-Synthesizer

Aufbauend auf dem Potential der Funktionenmaschinen-Metapher für die Objektvorstellung wird die Idee am Mathe-Synthesizer konzeptuell erweitert. Dabei werden die Funktionenmaschinen in Form von Modulen integriert. Neben Verkettungen, die analog zu gängigen Darstellungen funktionieren, gibt es im Mathe-Synthesizer auch Verknüpfungsmodule, Quellmodule und Feedbackmodule. Außerdem enthalten viele Module im Mathe-Synthesizer Parameter. Eine Übersicht über die konzeptuellen Erweiterungen und deren Umsetzung am Synthesizer ist in Abbildung 1 zu sehen.

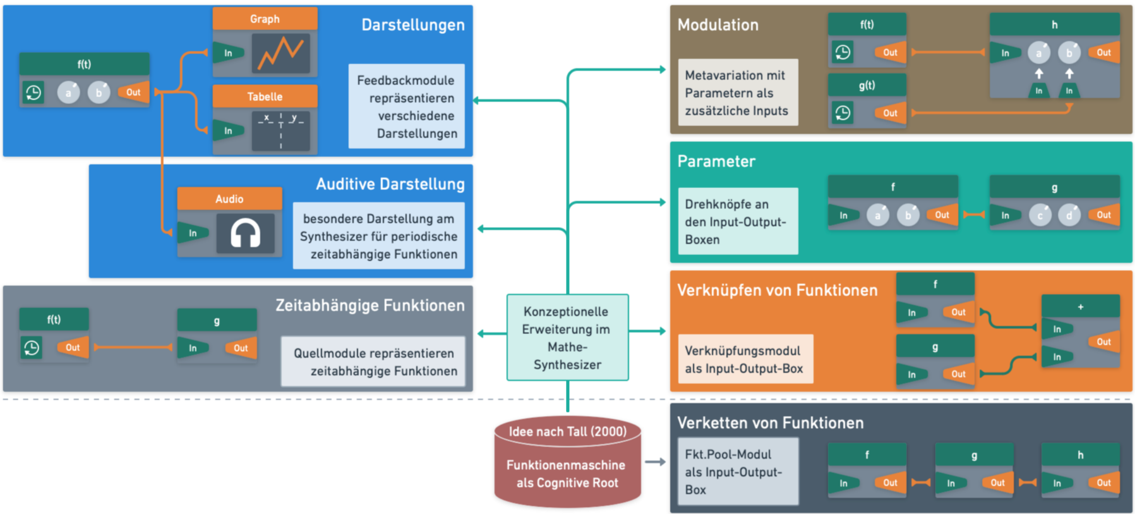

Abb. 1: Erweiterungen der Funktionenmaschine am Mathe-Synthesizer

Module mit Parametern: Umgesetzt werden die Parameter am Mathe-Synthesizer in Form von Drehknöpfen an den Modulen. Diese Erweiterung der Idee Talls et al. (2000) hat mit den Bedeutungen von Parametern nach Drijvers (2003) mehrere Auswirkungen:

Erstens repräsentiert das Modul durch die Parameter nicht nur eine bestimmte Funktion, sondern eine ganze Familie von Funktionen als Objekt und kann somit zur Vergegenständlichung dieser Familie beitragen. Drijvers (2003) beschreibt dies als „parameter to foster reification“.

Zweitens können Parameter im Mathe-Synthesizer im Funktionsverlauf geändert und über zugeordnete Inputs selbst mit anderen Modulen verbunden und „moduliert“ werden. Bei dieser „Metavariation“ kommt den Parametern auf einer höheren Ebene eine ähnliche Rolle zu wie einer „herkömmlichen“ Variable (Drijvers, 2003). Damit können Parameter flexibel die Rolle von Variablen im Einzelzahl- und im Veränderlichenaspekt einnehmen, wodurch laut Drijvers (2003) das Verständnis des Variablenbegriffs wiederaufgegriffen und vertieft werde. Am Mathe-Synthesizer kommt der damit verbundenen Modulationsvorstellung eine besondere Rolle zu, worauf bei Regel (2022) genauer eingegangen wird.

Verknüpfungsmodule: Die Ausweitung von Funktionenmaschinen auf Verknüpfungen erscheint aus theoretischer Perspektive intuitiv, da Black-Box-Darstellungen für zwei- und mehrstellige Verknüpfungen durchaus üblich sind (z.B. Freudenthal, 2002, S. 556). Durch die Einbindung in die Cognitive Root der Funktionenmaschine wird dabei die konzeptuelle Verwandtschaft des Verknüpfungs- und Funktionsbegriffs betont.

Quellmodule: Quellmodule sind zeitabhängige Funktionen, die dem Grundphänomen der „Vorgänge“ nach Vollrath (1989) entsprechen und als solche prototypisch für den Funktionsbegriff stehen. Am Synthesizer spielen insbesondere periodische zeitabhängige Funktionen eine Rolle und verbinden den Funktionsbegriff mit dem realen, zeitabhängigen Phänomen des Tons.

Feedbackmodule: Feedbackmodule im Mathe-Synthesizer sind das Graph-, das Audio- und das Wertetabellen-Modul. Sie haben nur Eingänge und entsprechen verschiedenen Darstellungen einer Funktion. Dadurch, dass Feedbackmodule flexibel im Synthesizer angeschlossen werden können, existieren Funktionen unabhängig von der Repräsentation als eingeständiges Objekt. Insbesondere können auch mehrere Feedbackmodule gleichzeitig angeschlossen werden, wodurch die unabhängige Existenz der Funktion als Objekt von der einzelnen Repräsentation zusätzlich betont wird. Die Arbeitsoberfläche des Synthesizers inkl. seiner Kabelverbindungen stellt dabei selbst eine neue visuelle Repräsentation der Funktion, den „Patch“, dar.

Patchdarstellung: Die Patchdarstellung ist die Arbeitsoberfläche des Mathe-Synthesizers. In ihr können Funktionen mit Kabeln frei verkettet und verknüpft werden. Die symbolische Darstellung lässt sich dabei aus dem Patch mit etwas Übung direkt ablesen und aus der symbolischen Darstellung kann direkt ein Patch erstellt werden.

In der Patchdarstellung wird eine Funktion zumeist „entlang des Signalflusses“ von den Quell- zu den Feedbackmodulen nachvollzogen. Dadurch ist der Einfluss von Teilfunktionen im Vergleich zur symbolischen Darstellung leichter erkennbar. So verbalisieren Studierende im sechsten Semester bei einer Pilotierung die in Abbildung 2 gegebene Funktion folgendermaßen:

Studentin 2: Also, wir haben die eine Sinusfunktion, die als b in die nächste Sinusfunktion eingeht, die dann nochmal quadriert wird und e hoch Dings genommen wird. Also, nochmal von vorne, wir haben ein e hoch, Sinusfunktion zum Quadrat, mit Parameter b auch als Sinusfunktion.

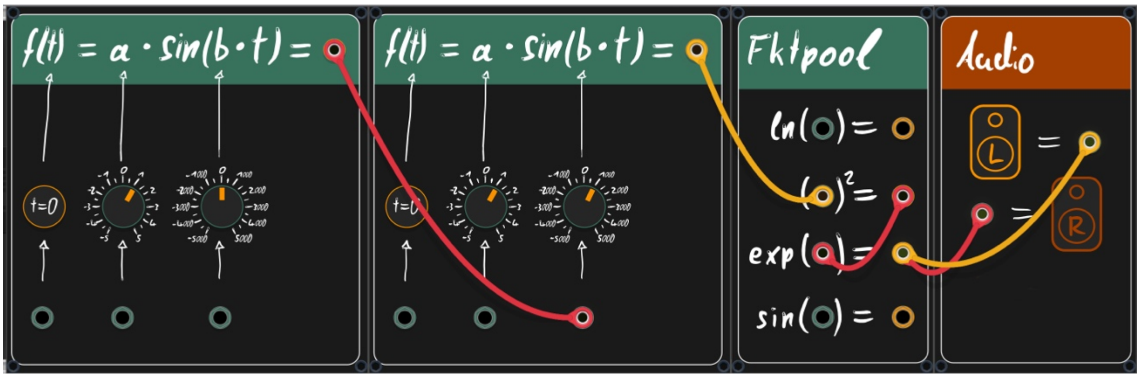

Abb. 2 Beispielaufgabe am Mathe-Synthesizer (leicht geänderte Darstellung)

Erste Ergebnisse der Pilotierung deuten darauf hin, dass Studierende, vor allem im Umgang mit komplex verketteten und verknüpften Funktionen, die Auswirkungen von Teilfunktionen auf den gesamten Funktionsgraphen und den Höreindruck besser vorhersagen können, wenn sie von der Patch-Darstellung ausgehen, im Vergleich zur Nutzung der symbolischen Darstellung. Besonders hervorzuheben ist dabei der Einsatz der Modulationssicht (siehe Regel, 2022), welche es den Studierenden ermöglicht, ihr Verständnis über den Einfluss von Parametern auf Teilfunktionen auf die Gesamtfunktion zu erweitern.

Literatur

Barzel, B., Glade, M., & Klinger, M. (2021). Algebra und Funktionen Fachlich und fachdidaktisch. In Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Springer Spektrum.

Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter. CD-β Press Center for Science and Mathematics Education.

Freudenthal, H. (2002). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Kluwer Academic Publishers.

Regel, N. (2022). Auditive Erlebnisse als Ausgangspunkt für das Verketten und Verknüpfen von Funktionen. Beiträge zum Mathematikunterricht 2022, Vorträge auf den Jahrestagungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 179–182. WTM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36. Springer Nature.

Tall, D. O., McGowen, M., & DeMarois, P. (2000). The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept. Proceedings of PME-NA.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal Für Mathematik-Didaktik, 10(1), 3–37. Springer Nature.