Fachrichtung Mathematik
Institut für Analysis
Prof.Dr.W.Timmermann
e-mail: timmerma@math.tu-dresden.de

Ergänzungen zur Kompaktheit

1. Diesen Begriff lernt man erst im Laufe der Zeit richtig verstehen (wenn man etwas dafür tut).
Hier werden einige ganz einfache Tips gegeben, wie man sich diesen Begriff erschließen kann.

2. Zuerst sollte man sich die Definition nochmals gang genau ansehen! Ein immer wiederkehrender Fehler ist folgende Argumentation von Studenten:
Warum ist eigentlich das offene Intervall $(0, 1)$ keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$? Ich kann dieses Intervall doch durch endlich viele offene Mengen (Intervalle) überdecken.
Antwort: Hier wurde die Definition total mißverstanden! Man kann natürlich **jede** Teilmenge eines metrischen Raumes M durch eine offene Menge überdecken (durch M z.B.). Der Witz der Sache besteht aber darin, daß man für den Nachweis der Kompaktheit von K zeigen muß, daß aus **jeder** Überdeckung durch offene Mengen endlich viele Mengen (aus dieser Überdeckung!) ausgewählt werden können, die K überdecken. Das bedeutet: wenn man zeigen will, daß eine Menge A nicht kompakt ist, muß man eine solche (nichtendliche!) Überdeckung durch offene Mengen angeben, aus der man keine endliche Überdeckung auswählen kann. Wir haben das in der Vorlesung am Beispiel eines Intervalls gemacht. Man sehe sich den dortigen Beweis nochmals genau an.

3. Wer sich richtig dafür interessiert, sollte mal versuchen (mit Hilfe der Literatur) die verschiedenen äquivalenten Charakterisierungen für Kompaktheit in metrischen Räumen allgemein und im $\mathbb{R}^n$ im besonderen zu beweisen.
Sehr nützlich ist es, den Beweis dafür, daß endliche Teilmengen metrischer Räume stets kompakt sind, in allen Varianten zu führen. Auch für den Spezialfall, das sich die endliche Menge in einem $\mathbb{R}^n$ befindet, sind die vielen Beweisvarianten sehr nützlich.

4. So richtig interessant wird es aber erst, wenn man sich nichttriviale nichtkompakte Mengen in **unendlichdimensionalen** Räumen anschaut. Dann versteht man auch besser, warum die Äquivalenz (für Mengen des $\mathbb{R}^n$) " kompakt genau dann, wenn beschränkt und abgeschlossen" im allgemeinen falsch ist.
Lassen Sie sich nicht gleich abschrecken durch unendlichdimensionale Räume, daran werden Sie sich auch noch gewöhnen (müssen)!
Also hier ein Beispiel.
Als Raum nehmen wir den Vektorraum ℓ^∞ aller beschränkten Folgen komplexer Zahlen (man kann sich auch auf reelle Folgen beschränken), versehen mit der Norm: $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$, wenn mit x die (beschränkte) Folge (x_n) bezeichnet wird. Betrachte in diesem Raum die Einheitskugel $E = \{x \in \ell^\infty : \|x\| \leq 1\}$. Das ist bestimmt eine beschränkte Menge (warum?). Beachten Sie, daß hier zwei Beschränktheitsbegriffe auftauchen: beschränkte Folgen und beschränkte Mengen in einem normierten Raum! Bitte nicht durcheinanderbringen! Diese Menge ist außerdem abgeschlossen (wiederholen Sie, was Abgeschlossnheit einer Menge im metrischen Raum bedeutet und

beweisen Sie dann die Abgeschlossenheit von E. Dafür gibt es verschiedene Varianten!).
E ist aber keineswegs eine kompakte Teilmenge von ℓ^∞!
Das sieht man z.B. so. Betrachte die Folge $(e^{(n)})$ aus E (nachprüfen, daß die Folgenelemente in E liegen!), $e^{(n)} = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$, wobei die 1 genau an der n-ten Stelle steht. Ich habe hier den Folgenindex oben geschrieben. Das soll verdeutlichen, daß es also um eine Folgen von Elementen aus ℓ^∞ geht (und diese Elemente sind selbst Folgen - am Anfang ist Konfusion möglich, sollte sich aber schnell beseitigen lassen).
Aus dieser Folge kann man keine konvergente Teilfolge auswählen, denn der Abstand zweier beliebiger (verschiedener) Elemente der Folge ist stets 1:$\|e_n - e_m\| = 1$ (das sollte jeder sofort sehen). Wissen Sie auch genau, warum daraus folgt, daß es keine konvergente Teilfolge gibt?
Sehr interessant ist es auch, den Beweis für die Nichtkompaktheit von E (im Lichte der eben durchgeführten Diskussion) mit Überdeckungen zu führen. Versuchen Sie es!