Das nächste Ziel ist der Beweis, daß F und F^{-1} in der Tat invers zueinander sind. Das geschieht der Übersichtlichkeit halber über mehrere Teilschritte. Wir vereinfachen uns die Sache noch etwas mehr, indem wir nur den Fall $n = 1$ behandeln.

Lemma 20.16 *i) Sei $j(x) := \mathrm{e}^{-x^2/2}$. Dann gilt $F(j) = F^{-1}(j) = j$.*
ii) Für $f \in \mathcal{S}, \varepsilon > 0$ seien $f_\varepsilon, f^\varepsilon$ definiert durch

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon}), \quad f^\varepsilon(x) = f(\varepsilon x).$$

Dann gilt:

$$F(f^\varepsilon) = (F(f))_\varepsilon, \qquad (F^{-1}(f^\varepsilon) = (F^{-1}(f))_\varepsilon.$$

iii) Für $f, g \in \mathcal{S}$ gilt

$$F(g \cdot F^{-1}(f))(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} F(g)(x-p) f(p) dp$$

$$F^{-1}(g \cdot F(f))(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} F^{-1}(g)(x-p) f(p) dp.$$

Beweis: i) Es gibt einen recht netten Beweis. Es gilt $j'(x) = -xj(x),\ j(0) = 1$. Mit Satz 20.15 folgt : $F(j')(p) = ipF(j)(p)$ und $F(xj)(p) = i(F(j)'(p)$.
Also $pF(j)(p) = -(F(j))'(p)$ und $F(j)(0) = 1$. Damit sind j und $F(j)$ Lösungen des gleichen AWP! Also sind sie gleich!
ii) Als ÜA zeige man, daß $f^\varepsilon \in \mathcal{S}$. Mit Variablensubstitution (und ohne über den Grenzübergang bei uneigentlichen Integralen zu gehen) folgt:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2\pi}) F(f^\varepsilon)(p) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ipx} f(\varepsilon x) dx = (\text{ mit } y := \varepsilon x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ip\frac{y}{\varepsilon}} f(y) \frac{1}{\varepsilon} dy = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} F(f)(\frac{p}{\varepsilon}) = \sqrt{2\pi}(F(f))_\varepsilon.\end{aligned}$$

iii) Man muß sicherstellen, daß man die Integrationsreihenfolge vertasuchen kann (also Fubini für uneigentliche Integrale). Dann folgt relativ leicht:

$$\begin{aligned}(2\pi) F(g \cdot F^{-1}(f))(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixy} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ipy} f(p) dp \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(p) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i(x-p)y} g(y) dy \right) dp = \sqrt{2\pi} \int f(p) F(g)(x-p) dp\end{aligned}$$

■

Satz 20.17 (Die Fourier-Umkehrformel) *Es gilt*

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = id|\mathcal{S}, \quad d.h.\ F(F^{-1}(f)) = F^{-1}F(f)) = f \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Die Fouriertransformation ist eine eineindeutige, in beiden Richtungen stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf sich.

Beweis: Wir zeigen der Einfachheit halber wieder den eindimensionalen Fall.
Wie oben: j (mit $j(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$), $j_\varepsilon, j^\varepsilon$. Dann $\hat{j} = \check{j} = j$ und die anderen Aussagen aus dem vorigen Lemma.
Behauptung 1: Für $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$F^{-1}(j^\varepsilon F(f))(x) \to F^{-1}(F(f))(x), \quad (\varepsilon \to 0)$$

Beweis: Für $R > 0, |y| \le R$ gilt

$$|j^\varepsilon(y) - 1| = \left|\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2 y^2}{2}} - 1\right| = \Big| \int_0^{\frac{\varepsilon^2 y^2}{2}} \mathrm{e}^{-t} dt \Big| \le 1 \cdot \frac{\varepsilon^2 y^2}{2} \le \varepsilon^2 \frac{R^2}{2}.$$

Da $\hat{f} \in \mathcal{S}$, gilt insbesondere $\|\hat{f}\|_\infty < \infty$, also für $|y| \le R$:

$$\left| j^\varepsilon(y) e^{ixy} \hat{f}(y) - \mathrm{e}^{ixy} \hat{f}(y) \right| \le \varepsilon^2 \frac{R^2}{2} \|\hat{f}\|_\infty.$$

Das bedeutet, daß gleichmäßig auf jeder kompakten Menge K (diese liegt dann in einem $[-R, R]$) gilt:

$$j^\varepsilon(y) e^{ixy} \hat{f}(y) \to \mathrm{e}^{ixy} \hat{f}(y), \quad (\varepsilon \to 0).$$

Da außerdem $|j^\varepsilon(y) e^{ixy} \hat{f}(y| \le |\hat{f}(y)|$ und $|\hat{f}|$ über $\mathbb{R}$ integrierbar, kann man Limes mit Integral vertauschen (das ist ein Satz der für uneigentliche Integrale gilt, vgl. Wüst 2):

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \left(F^{-1} j^\varepsilon F(f) \right)(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} j^\varepsilon(y) \hat{f}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \mathrm{e}^{ixy} \hat{f}(y) dy = F^{-1}(F(f))(x).\end{aligned}$$

Behauptung 2: $\quad F^{-1}(j^\varepsilon F(f))(x) \to f(x), \ (\varepsilon \to 0)$.
Beweis: Mit Lemma 20.16 iii) und danach 20.16 ii) erhält man:

$$\begin{aligned}F^{-1} j^\varepsilon F(f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\check{j^\varepsilon})(x-p) f(p) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x-p) f(p) dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-p}{\varepsilon}\right)^2} f(p) dp.\end{aligned}$$

Mit der Substitution und unter Beachtung daß $\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi}$ erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(y)dy = 1, \quad \text{also auch} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x-p)dp = 1$$

Sei nun $\delta > 0$ beliebig gegeben. Dann folgt

$$F^{-1}(j^\varepsilon F(f))(x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-p}{\varepsilon}\right)^2} (f(p) - f(x))dp = (*)$$

Die rechte Seite geht aber gegen Null. Das sieht man so. Sei $d > 0$. Dann (um den Faktor mit π nicht immer mitzuschleppen):

$$\begin{aligned} |\sqrt{2\pi} \cdot (*)| &\leq \int\limits_{|x-p|\leq d} j_\varepsilon(x-p)|f(p) - f(x)|dp \ + \int\limits_{|x-p|\geq d} j_\varepsilon(x-p)|f(p) - f(x)|dp \\ &\leq \sup_{|x-p|\leq d} |f(p) - f(x)| \ \cdot \int\limits_{|x-p|\leq d} j_\varepsilon(x-p)dp + 2\|f\|_\infty \int\limits_{|x-p|\geq d} j_\varepsilon(x-p)dp \end{aligned}$$

1. Summand: Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f und weil das Integral durch 1 majorisiert wird, ist für hinreichend kleines d der erste Summand $< \delta/2$.
2. Summand: Für alle $d > 0$ gilt: $\int\limits_{|x-p|\geq d} j_\varepsilon(x-p)dp \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Das sieht man so:

$$0 \leq j_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{e}^{-(\frac{y}{\varepsilon})^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{\varepsilon^2}} \leq \varepsilon \frac{1}{y^2}$$

Damit:

$$0 \leq \int\limits_{|y|\geq d} j_\varepsilon(y)dy \leq \varepsilon \int\limits_{|y|\geq d} \frac{1}{y^2}dy \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

Mithin kann auch der 2. Summand $< \delta/2$ gemacht werden. Damit ist alles gezeigt.
Die Linearität der Fouriertransformation ist klar. Die Stetigkeit sei eine Übungsaufgabe zum selbständigen Bearbeiten. ■

Wir fügen noch einige Bemerkungen zu der in der Vorlesung angegebenen Kette von Inklusionen

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}' \qquad (*)$$

an. Der Einfachheit halber betrachten wir alles für den Fall $n = 1$, also $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{R}^n$. Wir kommentieren die verschiedenen Inklusionen.
1. $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$:
Das ist sehr einfach. Sei $\varphi \in \mathcal{D}, \mathrm{supp}\varphi \subset K \subset \mathbb{R}$ und K kompakt. Dann gilt offenbar

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n D^m \varphi(x)| = \sup_{x\in K} |x^n D^m \varphi(x)| < \infty,$$

weil $x^n D^m \varphi$ für alle m, n stetig, also auf jeder kompakten Menge beschränkt. Also $\varphi \in \mathcal{S}$.
2. $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$:
Das ist im Sinne der Einbettung zu verstehen. $f \in \mathcal{S}$ wird zugeordnet T_f mit der Wirkung

$$T_f(g) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx, \qquad \forall g \in \mathcal{S}.$$

Das obige Integral existiert auf alle Fälle, da $f \cdot g \in \mathcal{S}$.
Es ist zu zeigen, dass T_f **stetiges** lineares Funktional auf $\mathcal{S}$. Linearität ist klar. Sei also (g_n) eine Folge aus $\mathcal{S}$, die bezüglich der Konvergenz in $\mathcal{S}$ gegen Null konvergiert. Nach Definition der Konvergenz in $\mathcal{S}$ gilt auf alle Fälle: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \to 0$. Dann folgt aber auch

$$|T_f(g_n)| = |\int_{\mathbb{R}} f(x)g_n(x)dx| \leq (\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)|) \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \to 0.$$

(beachte: f ist absolut integrierbar!)
3. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$:
Hier ist also zu zeigen: wenn $T \in \mathcal{S}'$, dann ist auch $T \in \mathcal{D}'$. Trivial ist, das T auch auf $\mathcal{D}$ ein lineares Funktional (denn $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$). Der springende Punkt ist, dass T auch stetig bezüglich der Konvergenz in $\mathcal{D}$. Das ist aber einfach, denn für eine Folge (φ_n) aus $\mathcal{D}$ gilt: wenn $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}$, dann auch $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{S}$. Das sieht man wie folgt: $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}$ bedeutet insbesondere: es existiert kompaktes K mit supp $\varphi_n \subset K$ für alle n. Also gilt für alle k, m:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k D^m \varphi_n(x)| = \sup_{x\in K} |x^k D^m \varphi_n(x)| \leq C \sup_{x\in K} |D^m \varphi_n(x)| \to 0$$

mit $C := \sup\limits_{x\in K} |x^k| (< \infty)$. Die Konvergenz gegen Null auf der rechten Seite ist genau die Konvergenz von $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}$.