Das Lebesgue'sche Integrabilitätskriterium

Wir behandeln der Einfachheit halber alles für reelle Funktionen einer reellen Variablen. Der Beweis für reelle Funktionen mehrerer Variabler geht völlig analog

Vorbetrachtungen über Stetigkeitspunkte von Funktionen:

Sei $f \in B[a,b]$ (Menge aller auf $[a,b]$ beschränkten Funktionen) und $M \subset [a,b]$ eine nichtleere Teilmenge. Dann heißt

$$\Omega_f(M) := \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in M\} = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in M\}$$

die **Schwankung von f auf M**.
Sei $U_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$. Für jedes feste $x \in [a,b]$ ist

$$\delta \mapsto \Omega_f(U_\delta(x) \cap [a,b])$$

eine wachsende, nichtnegative Funktion auf $(0, \infty)$. Also existiert

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta \to 0+0} \Omega_f(U_\delta(x) \cap [a,b])$$

Diese Größe heißt **Schwankung von f im Punkt x**.

Lemma 1: $f \in B[a,b]$ ist in $x \in [a,b]$ genau dann stetig, wenn $\omega_f(x) = 0$.
Beweis: Übungsaufgabe!

Sei $\Delta(f)$die Menge aller Unstetigkeitspunkte von $f \in B[a,b]$ und sei

$$\Delta_\varepsilon := \{x \in [a,b] : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$$

Man zeige:

Lemma 2: $\Delta_\varepsilon(f)$ ist kompakt.
Es ist natürlich nur die Abgeschlossenheit dieser Menge zu zeigen.

Folgerung aus Lemma 1:

$$\Delta(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_{1/n}(f). \qquad (*)$$

Theorem: Eine Funktion f ist R-integrierbar auf $[a,b]$ genau dann, wenn$f$ beschränkt und $\Delta(f)$ das Lebesgue-Maß Null hat (d.h. f auf $[a,b]$ fast überall stetig).
Beweis:
1.Auf $I = [a,b]$ gelte $|f(x)| \leq C$ und $\Delta(f)$ sei eine Nullmenge. Wir wollen das Riemannsche Integrabilitätskriterium anwenden (zu gegebenem $\varepsilon_1 > 0$ existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$, so daß für die Obersumme $O(\mathcal{Z})$ und die Untersumme $U(\mathcal{Z})$ von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ gilt: $O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < \varepsilon_1$).
Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann kann $\Delta(f)$ durch abzählbar viele Intervalle J_k mit $\sum\limits_k |J_k| < \varepsilon$ überdeckt werden. Die gleiche Eigenschaft haben dann die abgeschlossenen Intervalle $\bar{J}_k$. Da f in jedem $x \in [a,b] \setminus \Delta(f)$ stetig ist, existiert ein offenes Intervall U_x um x, so daß $\Omega_f(\bar{U}_x \cap I) < \varepsilon$. Offensichtlich bilden die J_k, U_x eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls I. Also existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{J_{k_1}, ..., J_{k_r}, U_{x_1}, ..., U_{x_s}\}$. Erst recht wird I von den zugehörigen abgeschlossenen Intervallen überdeckt. Jetzt wählen wir eine so feine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{I_1, ..., I_n\}$ von I, daß jedes I_k in einem der $\bar{J}_{k_i}$ bzw. $\bar{U}_{x_j}$ enthalten ist. Wir betrachten

$$O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)|I_k| = \Sigma_1 - \Sigma_2 \qquad (**)$$

Hier bedeuten: $M_k = \sup\{f(x) : x \in I_k\}, m_k = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$ und in Σ_1 sind alle Summanden der Summe $\sum_k$ aus (**) enthalten, wo I_k in einem $\bar{J}_{k_i}$ enthalten ist, Σ_2 enthält die entsprechenden Summanden mit I_k in einem $\bar{U}_{x_j}$. Aus unseren Voraussetzungen folgt nun aber:

$$\Sigma_1 < 2C\varepsilon, \qquad \Sigma_2 < \varepsilon|I|.$$

Damit ist $O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < (2C + |I|)\varepsilon$ Damit ist aber offenbar das Riemannsche Integrabilitätskriterium erfüllt.
2. Angenommen $f \in R(I)$. Die Beschränktheit von f ist klar (entweder:man beweist sie oder beachtet: wir haben sie bei uns vorausgesetzt. Es kommt auf den Zugang an.).
Wegen (*) genügt es zu zeigen, daß jedes $\Delta_{1/n}(f)$ eine Nullmenge ist (weil die abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine ebensolche ist). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $\Delta_{1/n} \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Riemannschen Integrabilitätskriterium existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von I, so daß

$$O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Sei $\mathcal{I}$ die Menge der Teilintervalle I_k von $\mathcal{Z}$ mit $\Delta_{1/n} \cap I_k \neq \emptyset$. Dann ist $\mathcal{I}$ eine Überdeckung von $\Delta_{1/n}$. Angenommen, $I_k \in \mathcal{I}$ enthält einen Punkt $x \in \Delta_{1/n}$ in seinem **Inneren**. Dann existiert eine δ-Umgebung $U(x) \subset I_k$ mit $\Omega_f(U) \geq 1/n$. Erst recht ist also $M_k - m_k = \Omega_f(I_k) \geq 1/n$. Sei nun $\mathcal{I}^*$ die (u.U: leere) Menge aller Intervalle I_k, deren Inneres mindestens einen Punkt aus $\Delta_{1/n}$ enthält. Aus der letzten Abschätzung folgt mithin:

$$\frac{1}{n} \sum_{I_k \in \mathcal{I}^*} |I_k| \leq \sum_{I_k \in \mathcal{I}^*} (M_k - m_k)|I_k| \leq O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Also gilt

$$\sum_{I_k \in \mathcal{I}^*} |I_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit sind die Punkte aus $\Delta_{1/n}$ abgearbeitet, die innere Punkte von Intervallen I_k sind. Es bleiben noch die Randpunkte. Dazu bestimmen wir um jeden Teilpunkt $x_0, x_1, ..., x_m$ von $\mathcal{Z}$ Intervalle I'_k mit Gesamtlänge $< \varepsilon/2$. Offenbar wird $\Delta_{1/n}$ von dem endlichen Intervallsystem $\mathcal{I}^* \cup \{I'_0, ..., I'_m\}$ überdeckt. Die Gesamtlänge dieses Systems ist $< \varepsilon$.
Damit ist das Theorem bewiesen.