Prof.Dr.W.Timmermann
Institut für Analysis

Bemerkungen zur Tensorrechnung

0. Einführung

Tensorrechnung wird meist als schwierig empfunden. Das hat mindestens zwei Gründe:
1. Etliche Lehrbücher enthalten Darstellungen, die eher verwirrend als motivierend und klärend sind. Da werden Tensoren als "invariante Größen" oder als "Systeme von Zahlen mit gewissem Transformationsverhalten bei Koordinatentransformationen" charakterisiert.
2. Selbst wenn man gute Darstellungen zur Hand nimmt, kann man leicht durch die Flut der Indizes oben, Indizes unten verwirrt werden. Ein Minimum an Anstrengungen kann man aber nicht umgehen, wenn man sich in diese Problematik einarbeiten will - das wird häufig unterschätzt. Dann fängt man jedesmal von vorn an, den Tensorbegriff verstehen zu wollen - auf die Dauer ist das uneffektiv.
Die folgenden Bemerkungen sollen den Einstieg in ein systematisches Lehrbuchstudium erleichtern, keinesfalls ersetzen(!), manche Formulierung ist auch etwas lax und verwaschen.
Es gibt grundsätzlich zwei Zugänge zum Tensorbegriff: der eine beginnt koordinatenfrei (und stellt in den Vordergrund die Frage: was ist ein Tensor, was "macht" er?), der andere ist der "koordinatenorientierte" Zugang (er stellt die Frage in den Vordergrund: wie rechnet man - möglichst mühelos - mit Tensoren?). Da sich der Tensorkalkül gerade dadurch auszeichnet, daß man mit den Tensorkoordinaten automatisch rechnen kann und viele Sachverhalte invariant (d.h. vom Koordinatensystem unabhängig - Achtung: welche Koordinatensysteme, welche Koordinatentransformationen also??) formulieren kann, wird häufig der zweite Zugang favorisiert. Das hat die Konsequenz, daß man - wenn man es kann - nahezu traumwandlerisch sicher rechnen und operieren kann - ohne letztlich genau zu wissen, mit welchen mathematischen Objekten man eigentlich hantiert.
Meine Empfehlung, die Mühe auf sich zu nehmen und kurz mit dem ersten Zugang zu beginnen und daraus den zweiten herzuleiten, ist die eines typischen Mathematikers, beruht aber auf der eigenen Erfahrung mit dieser Materie.

1. Vorbereitungen aus der Linearen Algebra

Wir beginnen mit einigen Wiederholungen aus der Linearen Algebra, vor allem, um die Symbole und Bezeichnungen zu fixieren.
Sei $\mathbf{V}$ ein reeller Vektorraum der Dimension n, $\{\mathbf{e_1}, ..., \mathbf{e_n}\}$ eine beliebige Basis und $\mathbf{x} = \sum x^i\ \mathbf{e_i} =: x^i \mathbf{e_i}$ die entsprechende Zerlegung des Vektors $\mathbf{x}$ nach der Basis.

Bitte beachte, daß wir nur den Vektorraum haben, ohne Skalarprodukt oder sonstige weitere Strukturen, also auch keine Länge der Vektoren usw. Man hätte zwar gleich mit euklidischen Vektorräumen beginnen können, aber das wäre eine Einschränkung gewesen, die nicht sein muß. Meist hat man natürlich euklidische VR vorliegen. Weiterhin benötigen wir Indizes, einmal, um Objekte (z.B. Vektoren) durchzunummerieren, dann um Koordinaten der Objekte durchzunummerieren. Man muß sich einmal festlegen, welche Indizes man oben, welche man unten hinschreibt - und dann muß man das konsequent durchhalten. Weiterhin haben wir jetzt gerade die sog. Einsteinsche Summenkonvention eingeführt. Diese besagt: über doppelt auftretende Indizes, wo einer oben, einer unter steht, wird automatisch (d.h. ohne daß ein Summenzeichen geschrieben wird!) summiert. Will man nicht summieren, muß man explizit dahinterschreiben: nicht summieren!

Mit $\mathbf{V}^*$ bezeichnen wir den zu $\mathbf{V}$ dualen Vektorraum, d.h. der Vektorraum der linearen Funktionale auf $\mathbf{V}$ (= lineare Abbildungen von $\mathbf{V}$ in die reellen Zahlen). Man zeigt leicht, daß $\dim\mathbf{V}^* = n$. Wenn $\mathbf{x} \in \mathbf{V}, \mathbf{f} \in \mathbf{V}^*$, dann ist also $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ der Wert von $\mathbf{f}$ an $\mathbf{x}$. Diese Schreibweise hat zwei Lesarten: die erste haben wir eben erläutert: $\mathbf{f}$ ist fest, $\mathbf{x}$ "läuft" in $\mathbf{V}$, bei der zweiten ist es gerade umgekehrt.
Den zu $\mathbf{V}^*$ dualen VR $\mathbf{V}^{**}$ (der natürlich auch wieder n-dimensional ist!) kann man auf natürliche Weise mit $\mathbf{V}$ selbst identifizieren. Dazu liest man $\mathbf{f(x)}$ auf die zweite oben angegebene Weise.(Genauer: man betrachtet die Abbildung $j : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{**}$ gegeben durch $j(\mathbf{x})(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und zeigt, daß dies ein Isomorphismus ist).
Sei $\mathbf{f^1}, ..., \mathbf{f^n}$ eine beliebige Basis in $\mathbf{V}^*$, dann hat man also für beliebiges $\mathbf{g} \in \mathbf{V}^*$: $\mathbf{g} = g_i \mathbf{f^i}$. Dabei sind dann g_i die Koordinaten von $\mathbf{g}$ bezüglich der Basis. Hat man in $\mathbf{V}$ eine Basis $\mathbf{e_i}$ vorgegeben, dann gibt es in $\mathbf{V}^*$ eine ausgezeichnete Basis, nämlich die duale Basis: $\mathbf{e^1}, ..., \mathbf{e^n}$, die charakterisiert wird durch: $\mathbf{e^i}(\mathbf{e_j}) = \delta^i_j$, wobei δ^i_j das bekannte Kroneckersymbol ist (= 1 wenn i = j; = 0 sonst). Man überlege sich, daß durch diese Vorschrift die $\mathbf{e^i}$ eindeutig definiert sind!
Jetzt fixieren wir die Bezeichnungen für Koordinatentransformationen in $\mathbf{V}, \mathbf{V}^*$. Seien also $\{\mathbf{e_i}\}$, $\{\mathbf{e'_i}\}$ zwei Basen in $\mathbf{V}$, $\{\mathbf{f^i}\}$, $\{\mathbf{f'^i}\}$ zwei Basen in $\mathbf{V}^*$.Dann gelten die folgenden Formeln zur Umrechnung der Basen bzw. der Koordinaten der Vektoren/Funktionale bezüglich der verschiedenen Basen. Gestrichene Koordinaten beziehen sich auf gestrichene Basen.

$$\mathbf{e_j} = a^i_j \ \mathbf{e'_i}, \qquad \mathbf{e'_j} = a'^i_j \ \mathbf{e_i} \tag{1}$$

$$\mathbf{f^j} = b^j_i \ \mathbf{f'^i}, \qquad \mathbf{f'^j} = b'^j_i \mathbf{f^i} \tag{2}$$

Und für die jeweiligen Koordinaten gilt (das ist leicht zu sehen, man entwickle nach den Basen und setze die Transformationsformeln (1), (2) ein):

$$x'^j = a^j_i \ x^i, \qquad x^j = a'^j_i \ x'^i \tag{3}$$

$$f_j = b'^i_j \ f'_i, \qquad f'_j = b^i_j \ f_i \tag{4}$$

Beachte, daß hierbei die Matrizen $A = (a^j_i), A' = (a'^j_i)$ bzw. $B = (b^j_i), B' = (b'^j_i)$ jeweils zueinander invers sind. Beachte ferner, daß sich Basen und Koordinaten jeweils *kontragredient* zueinander transformieren (d.h. wenn sich die Basen mit C transformieren, dann transformieren sich die Koordinaten mit $(C^{-1})^T$.). Man kann sich nun noch überlegen: für den Fall, daß $\{\mathbf{f^i}\} = \{\mathbf{e^i}\}, \{\mathbf{f'^j}\} = \{\mathbf{e'^j}\}$ die jeweils dualen Basen, gilt ist $B = A', B' = A$.

Im wesentlichen interessieren uns nur, wie sich die Koordinaten transformieren. Wir sehen, daß die x^i von den x'^j, die f^i von den f'^j abhängen und umgekehrt - hier allerdings auf ganz einfache Weise, nämlich linear. Dennoch kann man aus den Formeln (3) und (4) ablesen:

$$a_i^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}, \qquad a'^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \tag{5}$$

bzw.

$$b_i^j = \frac{\partial f'_i}{\partial f_j}, \qquad b'^j_i = \frac{\partial f_i}{\partial f'_j} \tag{6}$$

Zunächst sieht es so aus, als ob diese Formeln auch nicht viel bringen, doch dem ist nicht so! Jetzt kann man nämlich die Formeln für die Transformation der Koordinaten (3) und (4) so schreiben:

$$x'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\, x^i, \qquad x^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\, x'^i \tag{7}$$

Diese Formeln (7) bedürfen einiger Kommentare. Der wichtigste Gesichtspunkt ist, daß die Transformationsformeln für krummlinige Koordinaten dann genauso aussehen werden. Die Formeln (7) sind sozusagen das allgemeine Schema für die Transformation beliebiger Indizes für unsere noch zu definierenden Tensoren - auch in Koordinatentransformationen, die sich auf krummlinige Koordinaten beziehen. Weiterhin beachte man in (7), daß das "Indexbild" stimmt, d.h. auf beiden Seiten stehen die "freien" Indizes (d.h. die über die nicht summiert wird) einschließlich der Striche an den richtigen Stellen. Dabei hat man folgende Regel dafür, was bei Brüchen obere und untere Indizes sind: im Ausdruck $\frac{c_j^i}{d_l^k}$ sind i,l- obere, j,k- untere Indizes.

2. Der Tensorbegriff

2.1 Definitionen und Beispiele

Sei $\mathbf{V}$ wieder ein fester n-dimensionaler, reeller Vektorraum.
Ein Tensor T ist eine multilineare Abbildung:

$$T: \qquad \underbrace{\mathbf{V}^* \times \cdots \times \mathbf{V}^*}_{p} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \cdots \times \mathbf{V}}_{q} \to \mathbb{R} \tag{8}$$

Genauer heißt dieser Tensor ein *p-fach kontravarianter und q-fach kovarianter* Tensor über $\mathbf{V}$. Die Menge aller solcher Tensoren bildet - wie man leicht sieht - einen Vektorraum, den wir mit $\mathbf{T}_q^p(\mathbf{V})$bezeichnen.
Über die Dimension dieses Vektorraumes wird später gesprochen.

Spezialfälle
p = 0: kovariante Tensoren; $\mathbf{T}_q(\mathbf{V})$
q = 0: kontravariante Tensoren; $\mathbf{T}^p(\mathbf{V})$.

Man hat also für $\mathbf{g^1}, \cdots, \mathbf{g^p} \in \mathbf{V}^*,\ \mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_q} \in \mathbf{V}:\ T(\mathbf{g^1}, \cdots, \mathbf{g^p}, \mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_q}) \in \mathbb{R}$
und in jedem Faktor liegt Linearität vor.
Wie entstehen nun solche Tensoren?
Ausgangspunkt ist - etwa - die Tatsache, daß durch: $(\mathbf{h}, \mathbf{y}) \to \mathbf{h}(\mathbf{y})$ eine bilineare

Abbildung von $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}$ nach $\mathbf{R}$ gegeben wird. (Man überlege sich hier wie auch im folgenden immer: was machen welche Objekte [Funktionale, Vektoren] mit welchen Objekten [Vektoren, Funktionalen]?)
Konstruieren wir zuerst $T \in \mathbf{T}_q(\mathbf{V})$:
Seien dazu $\mathbf{h^1}, \cdots, \mathbf{h^q} \in \mathbf{V}^*$ fest, setze:
$T = \mathbf{h^1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{h^q}$ (das sog. *Tensorprodukt* der $\mathbf{h^1}, \cdots, \mathbf{h^q}$), und das wirke so:
$T(\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_q}) := \mathbf{h^1}(\mathbf{x_1}) \cdots \mathbf{h^q}(\mathbf{x_q})$ (das ist ein Produkt!).
Solche T heißen auch *elementare* (kovariante) Tensoren.
Man überlegt sich (etwas später), daß die Menge aller Linearkombinationen solcher elementarer Tensoren ganz $\mathbf{T}_q(\mathbf{V})$ aufspannen. Die gleiche Bemerkung gilt für $\mathbf{T}^p(\mathbf{V})$ und $\mathbf{T}^p_q(\mathbf{V})$
Seien jetzt also $\mathbf{y_1}, \cdots, \mathbf{y_p} \in \mathbf{V}$ fest. Der elementare kontravariante Tensor $T = \mathbf{y_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{y_p} \in \mathbf{T}^p(\mathbf{V})$ wirkt dann so:
$T(\mathbf{f^1}, \cdots, \mathbf{f^p}) = \mathbf{f^1}(\mathbf{y_1}) \cdots \mathbf{f^p}(\mathbf{y_p})$ (wieder ein Produkt).
Analog ist nun natürlich $T = \mathbf{y_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{y_p} \otimes \mathbf{h^1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{h^q} \in \mathbf{T}^p_q(\mathbf{V})$ definiert.
Man schreibt dafür auch (bzw. definiert als Linearkombination der entsprechenden elementaren Tensoren):
$$\underbrace{\mathbf{V} \otimes \cdots \otimes \mathbf{V}}_{p} \otimes \underbrace{\mathbf{V}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{V}^*}_{q} := \mathbf{T}^p_q(\mathbf{V}).$$
Wir haben schon vermerkt, daß man von gleichartigen Tensoren Linarkombinationen bilden kann. Jetzt erklären wir noch die Multiplikation (das Tensorprodukt) von Tensoren.
Seien $S \in \mathbf{T}^p_q(\mathbf{V}), T \in \mathbf{T}^r_s(\mathbf{V})$, dann ist $S \otimes T \in \mathbf{T}^{p+r}_{q+s}(\mathbf{V})$ definiert durch:

$$(S\otimes T)(\mathbf{g^1}, \cdots, \mathbf{g^{q+s}}, \mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_{p+r}}) = S(\mathbf{g^1}, \cdots, \mathbf{g^q}, \mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_p}) \cdot T(\mathbf{g^{q+1}}, \cdots, \mathbf{g^{q+s}}, \mathbf{x_{p+1}}, \cdots, \mathbf{x_{p+r}})$$
.
Deutet man die Elemente aus $\mathbf{V}$ als einfach kontravariante, die aus $\mathbf{V}^*$ als einfach kovariante Tensoren, dann sieht man leicht, daß die eben gegebene Definition des Produktes von Tensoren mit der Bildung der elementaren Tensoren konsistent ist.
Beachte: Das Tensorprodukt ist zwar assoziativ aber nicht kommutativ.
Prinzipielle Bemerkung: Man kann auf (abstrakte) Weise das Tensorprodukt linearer Räume bilden, d.h. man kann $\underbrace{\mathbf{V} \otimes \cdots \otimes \mathbf{V}}_{p} \otimes \underbrace{\mathbf{V}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{V}^*}_{q}$ abstrakt definieren, ohne die Elemente daraus als Multilinearformen zu deuten. Die Deutung als Multilinearformen ist sozusagen eine konkrete Realisierung des abstrakten Tensorprodukts. Um sich über diesen Zugang zu informieren schaue man z.B. in ein geeignetes Algebra-Buch.

2.2 Die Koordinatendarstellung von Tensoren

In diesem Abschnitt beantworten wir die Frage nach der Dimension und nach Basen der Vektorräume $\mathbf{T}^p_q$ (wir lassen - wenn alles klar ist - den Vektorraum $\mathbf{V}$ weg).
Seien jetzt $(\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n})$ eine Basis in $\mathbf{V}$, $(\mathbf{e^1}, \cdots, \mathbf{e^n})$ die duale Basis in $\mathbf{V}^*$.
Wir demonstrieren das Vorgehen jetzt am Beispiel $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^* = \mathbf{T}_2$ (das sind also die bilinearen Abbildungen von $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ nach $\mathbb{R}$).
Seien also: $T \in \mathbf{T}_2, \mathbf{x} = x^i \mathbf{e_i}, \mathbf{y} = y^j \mathbf{e_j}$. Dann gilt:
$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T(x^i \mathbf{e_i}, y^j \mathbf{e_j}) = x^i y^j T(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) =: x^i y^j T_{ij}$.
Jedes solche T ist also durch die n^2 Zahlen $T_{ij} = T(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}), 1 \leq i, j \leq n$ charakterisiert.

Betrachtet man nun den *Ansatz* $T = c_{kl}\ \mathbf{e^k} \otimes \mathbf{e^l}$, dann folgt:
$T(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = c_{kl}[\mathbf{e^k} \otimes \mathbf{e^l}](\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = c_{kl} \cdot \delta_i^k \cdot \delta_j^l = c_{ij} = T_{ij}$
Also erhält man: $T = T_{ij}\ \mathbf{e^i} \otimes \mathbf{e^j}$.
Man überzeugt sich leicht, daß die $\{\mathbf{e^i} \otimes \mathbf{e^j}, \quad 1 \leq i, j \leq n\}$ linear unabhängig sind, also - mit dem eben Gezeigtem - eine Basis für $\mathbf{T}_2$ bilden.
Durch vollkommen analoge Überlegungen erhält man nun eine Basis für $\mathbf{T}_q^p$. Man beachte, daß man jetzt viele Indizes braucht, die alle unabhängig voneinander von 1 bis n laufen. Jetzt beginnt also schon der Tanz mit den Indizes!

Satz:
Die Elemente $\mathbf{e_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e_{i_p}} \otimes \mathbf{e^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e^{j_q}} : 1 \leq i_k, j_l \leq n,\ 1 \leq k \leq p,\ 1 \leq l \leq q$ bilden eine Basis für $\mathbf{T}_q^p$.
Jedes $T \in \mathbf{T}_q^p$ hat somit eine eindeutige Darstellung:

$$T = T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} \mathbf{e_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e_{i_p}} \otimes \mathbf{e^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e^{j_q}} \tag{9}$$

wobei:

$$T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = T(\mathbf{e^{i_1}}, \cdots, \mathbf{e^{i_p}}, \mathbf{e_{j_1}}, \cdots, \mathbf{e_{j_q}}) \tag{10}$$

Außerdem ist also dim $\mathbf{T}_q^p = n^{p+q}$.

Bemerkung:
Wir hätten in $\mathbf{V}^*$ nicht unbedingt die duale Basis nehmen müssen, jede andere Basis hätte analoge Ergebnisse geliefert; so war es nur bequemer. Die gleiche Bemerkung gilt auch für die Betrachtungen bei den Koordinatentransformationen.

Ziehen wir ein gewisses Fazit!:
Wir haben jetzt den ersten Schritt dazu getan, um zu verstehen, wo beim Tensorbegriff das System von n^{p+q} Zahlen herkommt (das sind die Koordinaten bezüglich einer Basis). Daß man so schrecklich viele Indizes braucht - dafür kann der Tensor nichts!
Jetzt gehen wir zum nächsten Schritt über, dem Transformationsverhalten dieses Systems von Zahlen (der Koordinaten also). Um den **Witz der Sache** zu verstehen, halten wir uns vor Augen, was ein Tensor eigentlich "macht": er ordnet einem p-Tupel von Funktionalen und q-Tupel von Vektoren (auf multilineare Weise) eine Zahl zu!.
" **Dem Tensor ist es dabei egal, wie er selbst und wie die Vektoren, Funktionale durch Koordinaten beschrieben werden - das Ergebnis muß immer das gleiche sein!!**"
Setzen wir das jetzt um!

Betrachte also Basen in:
$\mathbf{V}: \quad \{\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}\}, \quad \{\mathbf{e'_1}, \cdots, \mathbf{e'_n}\}: \quad \mathbf{e'_j} = a'^i_j \mathbf{e_i}, \quad \mathbf{e_j} = a^i_j \mathbf{e'_i};$
$\mathbf{V}^*: \quad \{\mathbf{e^1}, \cdots, \mathbf{e^n}\}, \quad \{\mathbf{e'^1}, \cdots, \mathbf{e'^n}\}: \quad \mathbf{e'^j} = a^j_i \mathbf{e^i}, \quad \mathbf{e^j} = a'^j_i \mathbf{e'^i}$
und ferner:
$T = T^{\ i_1 \cdots i_p}_{\ j_1 \cdots j_q}\ \mathbf{e_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e_{i_p}} \otimes \mathbf{e^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e^{j_q}} = T'^{\ k_1 \cdots k_p}_{\ l_1 \cdots l_q}\ \mathbf{e'_{k_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e'_{k_p}} \otimes \mathbf{e'}^{\ \mathbf{l_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e'}^{\ \mathbf{l_q}}$
Setzt man jetzt die Transformationsformeln ein, erhält man:

$$\begin{aligned} T &= T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\ a^{k_1}_{i_1}\mathbf{e}'_{\mathbf{k_1}}\otimes\cdots\otimes a^{k_p}_{i_p}\mathbf{e}'_{\mathbf{k_p}}\otimes a'^{j_1}_{l_1}\mathbf{e}'^{\mathbf{l_1}}\otimes\cdots\otimes a'^{j_q}_{l_q}\mathbf{e}'^{\mathbf{l_q}} \\ &= a^{k_1}_{i_1}\cdots a^{k_p}_{i_p}\ a'^{j_1}_{l_1}\cdots a'^{j_q}_{l_q}\ T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\mathbf{e}'_{\mathbf{k_1}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}'_{\mathbf{k_p}}\otimes\mathbf{e}'^{\mathbf{l_1}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}'^{\mathbf{l_q}} \\ &= T'^{\ k_1\cdots k_p}_{\ l_1\cdots l_q}\ \mathbf{e}'_{\mathbf{k_1}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}'^{\mathbf{l_q}} \end{aligned}$$

Damit erhält man die gewünschte Transformationsformel:

$$T'^{\ k_1\cdots k_p}_{\ l_1\cdots l_q} = a^{k_1}_{i_1}\cdots a^{k_p}_{i_p}a'^{j_1}_{l_1}\cdots a'^{j_q}_{l_q}\ T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \tag{11}$$

Wenn wir die Formeln (5) benutzen, dann erhalten wir die in der Tensorrechnung übliche (und eben in manchen Büchern gleich als Definition für einen Tensor genommene) Formel:

$$T'^{\ k_1\cdots k_p}_{\ l_1\cdots l_q} = \frac{\partial x'^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x'^{k_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x'^{l_q}}\ T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \tag{12}$$

Diese Formel kann man sich ohne Mühe merken! Man beachte, daß wieder das Indexbild stimmen muß: auf linker und rechter Seite müssen jeweils bei den gestrichenen und den ungestrichenen Größen die gleichen Indizes stehen. Die Summationsindizes können - wie üblich - beliebig benannt werden.
Ich empfehle dringend, die Struktur dieser Formel richtig zu durchdenken, damit man wirklich die Vorschrift begreift, nach der transformiert wird.

Beispiele , Spezialfälle und weitere Rechenoperationen

Wir zählen kurz einige Beispiele auf, ohne sie ausführlich zu analysieren.

1. Beispiel
Hat man eine Kurve gegeben als $\mathbf{x}(t)$, dann ist der Geschwindigkeitsvektor ein typisch 1-fach kontravarianter Tensor:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx^1}{dt},\cdots,\frac{dx^n}{dt}\right)^T; \qquad \frac{dx'^i}{dt} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\ \frac{dx^j}{dt} \tag{13}$$

2. Beispiel

Sei f eine Funktion von $(x^1,\cdots x^n)$, etwa stetig differenzierbar. Dann ist $(\frac{\partial f}{\partial x^i})_{1\le i\le n}$ ein typischer 1-fach kovarianter Tensor (auch hier ist wieder die Kettenregel in Aktion!):

$$\frac{\partial f}{\partial x'^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\ \frac{\partial f}{\partial x^j} \tag{14}$$

Beachte, daß dieser Tensor in der Tat auf einen Vektor wirken kann (erkennen Sie die Ableitung wieder?).

3. Beispiel

Es gilt: $\mathbf{T}^1_1(\mathbf{V}) \cong L(\mathbf{V},\mathbf{V})$ (= lineare Abbildungen von $\mathbf{V}$ in sich).
Es gibt viele Möglichkeiten, diese Isomorphie zu erkennen, z.B.:

Sei $T = T^i_j \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e^j} \in \mathbf{T}^1_1$ Dann ordne man diesem T die lineare Abbildung $\hat{T}$ zu, die gerade die Matrixdarstellung (bezüglich der oben angegebenen Basis) $\hat{T}^i_j = T^i_j$ hat, d.h $\hat{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ mit: $y^i = T^i_j x^j$.
Umgekehrt: wenn $\hat{T}$ gegebene lineare Abbildung mit Matrixdarstellung $\hat{T}^i_j$, dann ordne man dieser Abbildung den Tensor mit den gleichen Koordinaten zu.

4. Beispiel

Sei für dieses Beispiel $\mathbf{S_m}$ die Gruppe der Permutationen der Zahlen von 1 bis m (wer sich nicht mehr an den Gruppenbegriff erinnert, kann die Menge der Permutationen nehmen). Wenn also $\pi \in \mathbf{S_m}$, dann bezeichnen wir mit $(\pi(1), \cdots, \pi(m))$ die Wirkung von π auf die Zahlen 1,2,...,m. Entsprechend ist π^{-1} die zu π inverse Permutation. Wie üblich bezeichnen wir mit $\varepsilon(\pi)$ das Vorzeichen der Permutation π.

4.1 Symmetrische Tensoren

Wir erklären alles für kontravariante Tensoren.
Ein m-fach kontravarianter Tensor T heißt symmetrisch, wenn für alle $\pi \in \mathbf{S_m}, \mathbf{g^1}, \cdots \mathbf{g^m} \in \mathbf{V}^*$ gilt:

$$T(\mathbf{g^1}, \cdots, \mathbf{g^m}) = T(\mathbf{g}^{\pi(\mathbf{1})}, \cdots \mathbf{g}^{\pi(\mathbf{m})})$$

Für die Koordinaten bedeutet das: sie verändern sich nicht unter beliebiger Permutation.

Nun gibt es die Operation des "Symmetrisierens" von Tensoren. Da wird aus einem beliebigen (kontravarianten) Tensor ein symmetrischer gemacht. Dazu und auf den Symmetriebegriff, der sich nur auf eine gewisse Gruppe von Indizes bezieht, verweisen wir auf die Literatur.

4.2 Antisymmetrische oder alternierende Tensoren

Wir formulieren hier alles für kovariante Tensoren.
Ein m-fach kovarianter Tensor T heißt antisymmetrisch oder alternierend, wenn er bei Vertauschung zweier Argumente (Indizes in den Koordinaten) sein Vorzeichen ändert. Das kann man auch so schreiben:

$$T(\mathbf{x}_{\pi(\mathbf{1})}, \cdots, \mathbf{x}_{\pi(\mathbf{m})}) = \varepsilon(\pi) T(\mathbf{x_1}, \cdots, \mathbf{x_m})$$

für alle $\pi \in \mathbf{S_m}, \mathbf{x_i} \in \mathbf{V}$
Hier sollte man jetzt Differentialformen wiedererkennen (wenigstens im Prinzip).

5. Multiplikation,Verjüngung und Überschiebung von Tensoren

Wir hatten schon das (tensorielle) Produkt von Tensoren erklärt. Jetzt schreiben wir noch kurz auf, wie sich das in den Koordinaten widerspiegelt.
Seien also

$$S = (S^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}) \in \mathbf{T}^p_q, \qquad T = (T^{k_1 \cdots k_r}_{l_1 \cdots l_s}) \in \mathbf{T}^r_s$$

dann ist

$$S \otimes T = (S^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \; T^{k_1 \cdots k_r}_{l_1 \cdots l_s}) \in \mathbf{T}^{p+r}_{q+s} \tag{15}$$

Verjüngung eines Tensors: Gegeben sei ein Tensor mit mindestens einem oberen und einem unteren Index in der Koordinatendarstellung, etwa T^{ikl}_{jm}. Summiert man über einen oberen und einen unteren Index (etwa k und m), dann entstehen wieder die Koordinaten eines Tensors (wobei der Ko- und der Kontravarianzgrad jeweil um Eins erniedrigt sind):

$$S^{il}_{j} := T^{ikl}_{jk} \equiv T^{isl}_{js}$$

Diese Operation nennt man Verjüngung. Man auch auch gleichzeitig über mehrere Indizes verjüngen.

Überschiebung von Tensoren: Multipliziert man erst zwei Tensoren und verjüngt dann über ein oder mehrere Indexpaare, dann entsteht wieder ein Tensor. Diese Operation nennt man Überschiebung (beachte, daß Verjüngung und Überschiebung natürlich nicht eindeutig definiert sind, man muß die Indexpaare noch genau angeben). Also etwa:

$$S = (S^{i}_{jk}), T = (T^{rs}_{t}), \quad S \otimes T \hat{=} (S^{i}_{jk} T^{rs}_{t}) \longrightarrow U^{r}_{j} := S^{i}_{jk} T^{rk}_{i}$$

3. Tensoren über euklidischen Räumen

Sei jetzt $\mathbf{V}, < \ , \ >$ ein reeller, euklidischer n-dimensionaler Vektorraum mit dem angegebenen Skalarprodukt. Jetzt hat man sofort eine reichhaltigere Struktur!
Wir beginnen mit den kontra- und kovarianten Koordinaten von Vektoren.
Sei dazu $\{\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$ eine feste (nicht notwendig orthonormierte!) Basis in $\mathbf{V}, \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \mathbf{x} = x^i\ \mathbf{e_i}$. Dann nennt man die x^i die kontravarianten Koordinaten von $\mathbf{x}$ (das wissen wir ja schon). Setze:

$$g_{ij} =< \mathbf{e_i}, \mathbf{e_j} > \tag{16}$$

Man zeigt unschwer, daß (g_{ij}) die Koordinaten eines 2-fach kovarianten, symmetrischen (d.h. $g_{ij} = g_{ji}$) Tensors sind (bitte selbst nachprüfen!). Die Matrix (g_{ij}) ist natürlich invertierbar (warum?), (g^{ij}) bezeichne die inverse Matrix. Das sind gleichzeitig die Koordinaten eines 2-fach kontravarianten, symmetrischen Tensors.
Wozu sind diese beiden Tensoren gut?
Dazu wiederholen wir kurz noch ein wenig Lineare Algebra.
Wir wissen, daß wegen des Satzes von Riesz zu jeden $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^*$ ein $\mathbf{y_f} \in \mathbf{V}$ existiert, so daß für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) =< \ \mathbf{y_f}, \mathbf{x} \ > .$$

Wenn nun $\{\mathbf{f^1}, \cdots, \mathbf{f^n}\}$ die zu $\{\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$ duale Basis in $\mathbf{V}^*$ (wir ändern ein wenig die Bezeichnungen, früher war die duale Basis mit $(\mathbf{e^j})$ bezeichnet), dann seien die durch den Satz von Riesz den $\mathbf{f^i} \in \mathbf{V}^*$ zugeordneten Elemente aus $\mathbf{V}$(!) mit $\mathbf{e^i}$ bezeichnet. Das ist wieder eine Basis in $\mathbf{V}$, die zu $\{\mathbf{e_i}\}$ reziproke Basis. Man prüft leicht nach:

$$< \ \mathbf{e^i}, \mathbf{e_j} \ >= \delta^i_j$$

Zerlegt man nun $\mathbf{x}$ nach dieser Basis: $\mathbf{x} = x_i\ \mathbf{e^i}$, dann nennt man die (x_i) die kovarianten Koordinaten von $\mathbf{x}$ (und analog benutzt man diese Basis jetzt auch bei der

Bestimmung der Koordinaten von Tensoren!).
Die folgenden Beziehungen rechnet man leicht nach:

$$x_i =< \mathbf{x}, \mathbf{e_i} >, \quad x_i = g_{ij}x^j, \quad x^j = g^{ij}x_i$$
$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= x_i y^i = x^i y_i = g_{ij}x^i y^j = g^{ij}x_i y_j$$

Gerade wegen der letzten Beziehung nennt man (g_{ij}) häufig auch den metrischen Tensor.
Man erhält nun auch leicht, wie sich die kovarianten Vektorkoordinaten bei Koordinatentransformation verhalten (man errät es ja fast):

$$x_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\, x'_j \tag{17}$$

Beachte wieder den Automatismus!
Mittels des metrischen Tensors und seines Inversen kann man nun bei beliebigen Tensoren über dem euklidischen Vektorraum $\mathbf{V}$ Indizes "hoch-" oder "runterziehen" (bitte überprüfen!!), also etwa:

$$T^{ijk} = g^{ir}g^{js}T^k_{rs}, \quad S^i_{jk} = g_{jr}S^{ir}_k$$

4. Schlußbemerkungen

Eigentlich würde nun erst die Theorie richtig beginnen. Wir haben ja bisher nur sog. Tensoralgebra (Im Sinne von: algebraische Operationen mit Tensoren) erläutert. Man will aber vor allem Tensoranalysis betreiben.
Dazu sind aber weitere Anstrengungen nötig.
Man würde jetzt etwa so vorgehen:
Betrachte ein Gebiet oder ein Flächenstück im Raum (genauer: eine Mannigfaltigkeit M). In jedem Punkt x, sagen wir des Flächenstückes (auf dem krummlinige Koordinaten gegeben sind) hat man die Tangentialebene (genauer: den Tangentialraum $\mathbf{T}_x(M)$). Dieser Raum $\mathbf{T}_x(M)$ spielt jetzt die Rolle unseres Vektorraumes $\mathbf{V}$!!
Den zugehörigen Raum $\mathbf{V}^*$ nennt man dann auch den Kotangentialraum. Statt eines (festen) Tensors hat man jetzt ein sog. Tensorfeld T und das bedeutet: jedem $x \in M$ ist ein Tensor $T(x) \in \mathbf{T}^p_q(\mathbf{T}_x(M))$ zugeordnet (nicht an der Symbolik verzweifeln!).
Für die Koordinaten von T bedeutet das: $T^{\cdots}_{\cdots} = T^{\cdots}_{\cdots}(x)$.
Für solche Tensorfelder kann man dann verschiedene Ableitungsbegriffe usw. einführen.
Wenn man etwas genauer nachdenkt, wird man hier den Begriff: "Differentialform auf Flächenstück (auf Mannigfaltigkeit)" wiederfinden.

Einige **Literaturhinweise**:
Im Prinzip kann man alle Bücher über Mannigfaltigkeiten / Vektoranalysis usw. nehmen. Aber man sollte sich dann erst vergewissern, ob einem der dortige Stil liegt. Eine kleine Auswahl ganz unterschiedlicher Bücher folgt.

1. Teubner - Taschenbuch der Mathematik Teil II.
   (Das ist für eine erste Orientierung! geeignet)

2. A.Browder: Mathematical Analysis.

3. Curtis,W.D.; F.R.Miller: Differential Manifolds ans Theoretical Physics, Academic Press 1985

4. Jänich, K.: Vektoranalysis.

5. Raschewski,P.: Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.