

Die folgenden zwei Kapitel überdecken in etwa den Stoff der entsprechenden Kapitel in der Vorlesung "Mathematik für Physiker". Sie haben Anleihen aus mehreren Standardwerken zur Analysis. Sie tragen Skript-Charakter auch in dem Sinne, daß sie nicht frei sind von Fehlern und nicht alle Argumentationen/ Beweise ausgearbeitet wurden. Sie ersetzen weder die Vorlesung, die Übungen noch die zusätzliche Arbeit mit Büchern

11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

11.1 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Ziel: Beschreibung von Flächen im \mathbb{R}^3 und ihren Tangentialebenen und Verallgemeinerung auf den \mathbb{R}^n . Hier werden nur sog. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n betrachtet. Das genügt für unsere Bedürfnisse. Für die allgemeine Relativitätstheorie benötigt man aber den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff, der abstrakter ist. Mit den Kenntnissen in diesem Kapitel kann man ihn sich aber leichter erschließen, als ohne diese Kenntnisse.

Wir benutzen folgende Bezeichnung:

$$\mathbb{R}_0^k = \mathbb{R}^k \times \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{n-k} = \{y \in \mathbb{R}^n : y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

Der Übersichtlichkeit halber werden Vektoren vorerst in Zeilenschreibweise geschrieben.

Definition 11.1 i) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\Phi : U \rightarrow V$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn Φ bijektiv und Φ, Φ^{-1} beide stetig differenzierbar sind. (beachte: $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n), \Phi_i(x) = \Phi_i(x_1, \dots, x_n)$).

ii) Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n (UM)*, wenn folgendes gilt.

Für alle $a \in M$ existieren:

- eine offene Umgebung U von a im \mathbb{R}^n ,
- eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$,
- ein Diffeomorphismus $h : U \rightarrow V$ mit

$$h(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}_0^k = \{y \in V : y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}$$

Eine $(n - 1)$ -dimensionale UM heißt auch *Hyperfläche*.

Eine k -dimensionale UM sieht also lokal wie ein (Stück vom) \mathbb{R}^k aus.

Das Paar $(h, U \cap M)$ nennt man auch *Karte um a*. Ein System von Karten, das M überdeckt, heißt *Atlas* für M .

Bemerkungen 11.2 i) Da h ein Diffeomorphismus, hat die Funktionalmatrix

$$h' = \frac{\partial(h_1, \dots, h_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

den vollen Rang n , ist also invertierbar, hat also eine von Null verschiedene Determinante.

ii) Wir werden häufig von offenen Teilmengen einer UM M sprechen. Darunter ist folgendes zu verstehen: Eine Teilmenge $W \subset M$ heißt *offen in M* (manchmal auch: relativ offen bezüglich M), wenn es eine in \mathbb{R}^n offene Menge V gibt mit $W = M \cap V$. Achtung: (relativ) offene Teilmengen von M sind i.a. keineswegs offene Teilmengen des \mathbb{R}^n ! Anders hingegen bei kompakten Mengen.

Man kann zeigen: eine Menge $K \subset M$ ist kompakt (im Sinne relativ kompakt bezüglich M) genau dann, wenn sie als Teilmenge des \mathbb{R}^n kompakt ist.

iii) Wir werden häufig stetige oder stetig differenzierbare Funktionen auf UM M betrachten. Bei allgemeinen Mannigfaltigkeiten würde man diese Begriffe über Karten definieren (müssen). Hier reicht es, sich folgendes vorzustellen: die betreffende Funktion f ist nicht nur auf M sondern noch in einer (\mathbb{R}^n -) Umgebung von M definiert und hat dann die betreffende Eigenschaft als Abbildung aus dem \mathbb{R}^n in \mathbb{R} oder in einen \mathbb{R}^l .

iv) Wir benötigen später noch den Begriff des Trägers einer Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Der Träger ist der Abschluss der Menge aller Punkte, auf der f nicht Null ist, d.h.

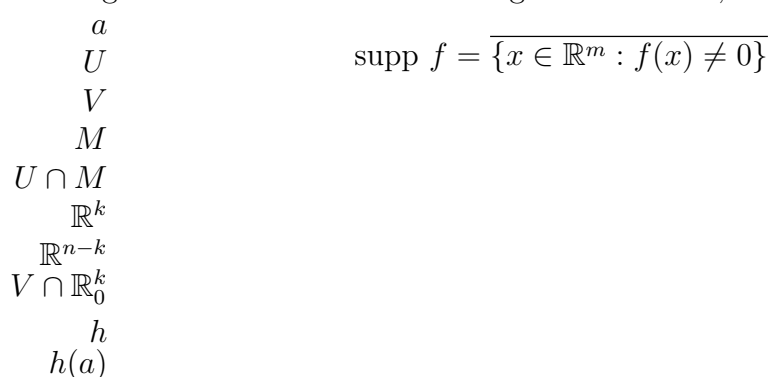


Abbildung 1: Veranschaulichung der Mannigfaltigkeitsdefinition

Beispiele 11.3 1. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann ist der Graph von f

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in (a, b)\}$$

eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 .

Wie findet man h ? Setze $U = V = (a, b) \times \mathbb{R}$ und $h : U \rightarrow V$ sei gegeben durch: $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - f(x_1))$. Dann gilt also $(x_1, x_2) \in G(f) = U \cap G(f) \mapsto (x_1, 0)$, d.h. $h(G(f) \cap U) = V \cap \mathbb{R}_0^1 = (a, b)$ (als Teilmenge des \mathbb{R}^2 betrachtet); h ist also die Projektion. Als Ableitung erhält man:

$$h'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f'(x_1) & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist h' tatsächlich invertierbar und h ist ein Diffeomorphismus. Die Inverse kann man leicht ausrechnen: $h^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_2 + f(y_1))$

2. Die Verallgemeinerung des 1. Beispiels auf höhere Dimensionen:

Sei $U' \subset \mathbb{R}^k$ offen. $f : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ stetig diffbar. Dann ist der Graph von f eine

k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Das sieht man analog zu oben.

Setze:

$$U = V = U' \times \mathbb{R}^{n-k}, h(x) = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1} - f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, x_n - f_{n-k}(x_1, \dots, x_k))$$

Hier erhält man für die Ableitung:

$$h'(x) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -f'(x_1, \dots, x_k) & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

Wir werden im nächsten Satz zeigen, dass jede UM lokal durch den Graphen einer Abbildung gegeben werden kann.

3. Die (n-1)dimensionale Einheitskugel

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

ist eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n . Man kann dazu 2. benutzen.

Überlegen Sie (Skizze benutzen), wie man im \mathbb{R}^2 die Einheitskreislinie im Sinne von 1. beschreiben kann. Wieviele lokale Darstellungen benötigt man?

Zur Formulierung des nächsten Satzes benötigen wir einen Begriff, den wir schon bei der Parameterdarstellung von Kurven benutzt hatten.

Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen. Die Abbildung $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, wenn Φ stetig diffbar, injektiv, $\Phi^{-1} : \Phi(T) \rightarrow T$ stetig und $\text{rang } \Phi'(x) = k$ für alle $x \in T$.

Satz 11.4 Sei $M \subset \mathbb{R}^n, 1 \leq k \leq n-1$. Dann sind äquivalent:

i) M ist eine k-dimensionale UM;

ii) M ist lokale Nullstellenmenge (lokal durch Nebenbedingungen definiert; Darstellung durch Gleichungen), d.h. für alle $a \in M$ existiert offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}, f = (f_1, \dots, f_{n-k})$, stetig diffbar, so dass

$$\text{rang } f'(x) = \text{rang } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = n - k \quad \forall x \in U$$

und

$$M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0, \text{ d.h. } f_1(x) = 0, \dots, f_{n-k}(x) = 0\};$$

iii) M ist lokal Graph einer Abbildung (Darstellung als Graph), d.h. für alle $a \in M$ gilt (nach geeigneter Nummerierung der Koordinaten): es existieren offene Umgebungen

$U' \subset \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k); U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ und eine Abbildung $g : U' \rightarrow U''$, stetig diffbar, so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\} = G(g)$$

iv) Lokale Parameterdarstellung von M :

Für alle $a \in M$ existieren: eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a , eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^k$ und eine reguläre Abbildung $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit:

$\Phi(T) = U \cap M$. Die Abbildung Φ oder deutlicher (Φ, T) heißt lokale Parameterdarstellung von M .

Beweis: i) \Rightarrow ii):

Seien $U, V, h = (h_1, \dots, h_n)$ wie in der Definition der UM. Setzt man $f := (h_{k+1}, \dots, h_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, dann hat

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_{k+1}(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_{k+1}(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

den Rang $n - k$ für alle $x \in U$. Außerdem gilt:

$$M \cap U = \{x \in U : h_{k+1}(x) = \dots = h_n(x) = 0\}.$$

ii) \Rightarrow iii):

Seien f, U wie in ii). Da $f'(a)$ den Rang $n - k$ hat, besitzt $f'(a)$ $n - k$ linear unabhängige Spalten. Nach eventueller Umnummerierung seien das die hinteren. Das bedeutet: mit den Bezeichnungen $x' = (x_1, \dots, x_k), x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ ist

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x''} = \frac{\partial (f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial (x_{k+1}, \dots, x_n)}(a)$$

invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren mithin Umgebungen U' von a', U'' von a'' und stetig differenzierbares $g : U' \rightarrow U''$ so dass

$$f(x', g(x')) = 0, \forall x' \in U', \text{ d.h. } M \cap U = M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

iii) \Rightarrow iv):

Seien U', U'', g wie in iii). Mit $U := U' \times U'', T := U'$ und $\Phi(x') := (x', g(x'))$ folgt sofort iv) ($\Phi(T)$ ist also gerade der Graph der Funktion/Abbildung g).

iv) \Rightarrow i):

Das ist der aufwendigste Teil, auch hier benötigt man wieder Satz über implizite Funktionen/ lokale Invertierbarkeit.

Seien also U, T, Φ wie in iv), $c \in T$ mit $\Phi(c) = a$. Da Φ regulär, kann man o.E.d.A. annehmen, dass die ersten k Zeilen in $\Phi'(c)$ (welches eben den Rang k hat) linear unabhängig sind.

Definiere nun

$\tilde{\Phi} : T \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch:

$$\tilde{\Phi}_1(x) := \Phi_1(x') \text{ (d.h. } \tilde{\Phi}_1(x_1, \dots, x_n) = \Phi_1(x_1, \dots, x_k)),$$

\vdots

$$\tilde{\Phi}_k(x) := \Phi_k(x'),$$

$$\tilde{\Phi}_{k+1}(x) := \Phi_{k+1}(x') + x_{k+1},$$

\vdots

$$\tilde{\Phi}_n(x) := \Phi(x') + x_n$$

Dann erhält man für alle $x \in T \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\tilde{\Phi}'(x) = \left(\Phi'(x') \mid \begin{array}{c} 0 \\ I_{n-k} \end{array} \right)$$

ist eine invertierbare Matrix, womit die lokale Invertierbarkeit von $\tilde{\Phi}$ gesichert ist. Damit existiert also eine offene Umgebung $V_1 \subset T \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(c, 0)$, so dass $\tilde{\Phi} : V_1 \rightarrow$

$\tilde{\Phi}(V_1)$ ein Diffeomorphismus ist. Da aber $\Phi^{-1} : \Phi(T) \rightarrow T$ stetig ist, ist $V_1 \cap (T \times \{0\})$ offen und somit $\tilde{\Phi}(V_1 \cap (T \times \{0\}))$ relativ offen in $\Phi(T)$, d.h. es existiert eine offene Menge $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\tilde{\Phi}(V_1 \cap (T \times \{0\})) = \Phi(T) \cap U_1 = (M \cap U) \cap U_1.$$

Setzt man nun $\tilde{U} := \Phi(V_1) \cap U \cap U_1$, $\tilde{V} := \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{U})$, $h := \Phi^{-1}|_{\tilde{U}}$, dann sieht man, dass (h, \tilde{U}) eine Karte um a ist. ■

Als nächstes wird der fundamentale Begriff des *Tangentialraumes an eine UM in einem Punkt a* eingeführt. Die Wichtigkeit dieses Begriffes ergibt sich - grob gesagt - aus der Bemerkung, dass der Tangentialraum **das** fundamentale **lineare** Objekt ist, das der Mannigfaltigkeit zugeordnet wird. Es entspricht der Zuordnung: Abbildung \mapsto Ableitung der Abbildung in einem Punkt.

Definition 11.5 Sei M eine k -dimensionale UM des \mathbb{R}^n , $a \in M$.

Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\alpha(0) = a$ eine stetig differenzierbare Kurve auf M durch a . Dann heißt $v = \alpha'(0) \in \mathbb{R}^n$ Tangentialvektor an M im Punkt a . Die Menge aller Tangentialvektoren an M in a wird mit $T_a M$ bezeichnet und heißt Tangentialraum von M in a . (Rechtfertigung des Namens "Raum" erfolgt sofort.)

Bemerkungen:

i) Man kann sich in der Definition auch auf glatte Kurven beschränken, aber dann ist der Nullvektor nicht in $T_a M$ und man muss die Definition des Tangentialraumes so fassen, dass eben auch der Nullvektor dazugehört.

ii) Ein beliebtes Verfahren, um Kurven auf Mannigfaltigkeiten zu erzeugen, besteht darin, die Parameterdarstellung Φ zu benutzen und eine Kurve $\mathcal{C}_1 \subset T$ mittels Φ auf M zu transportieren: $\mathcal{C} = \Phi(\mathcal{C}_1)$

iii) Beachten Sie (auch in Hinblick auf den nächsten Satz): Obwohl der Tangentialraum einer k -dimensionalen UM sich als k -dimensionaler Vektorraum herausstellen wird, sind seine Elemente Vektoren aus dem \mathbb{R}^n , haben also n Komponenten (und nicht k , wie man es bei den k -dimensionalen Standard-Vektorräumen hat). Es ist eben ein k -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n .

Hat man es mit abstrakten Mannigfaltigkeiten zu tun (die also nicht a priori in einen \mathbb{R}^n eingebettet sind), dann ist der Tangentialraum einfach ein k -dimensionaler Vektorraum und wird nicht als Unterraum betrachtet!

Satz 11.6 Sei M eine k -dimensionale UM des \mathbb{R}^n .

i) $T_a M$ ist ein k -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n .

ii) Sei $\Phi : T \rightarrow W \subset M$ eine lokale Parametrisierung, $c \in T$ mit $\Phi(c) = a$. Dann bilden die Vektoren

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c)$$

eine Basis für $T_a M$.

iii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a , $f_1, \dots, f_{n-k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar mit

$$M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0, \text{ d.h. } f_1(x) = 0, \dots, f_{n-k}(x) = 0\}$$

und

$$\text{rang } f'(x) = \text{rang } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = n - k \quad \forall x \in U.$$

Dann gilt:

$$T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \text{grad } f_j(a) \rangle = 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, n - k\}.$$

Beweis: Wir definieren die folgenden beiden k -dimensionalen Unterräume von \mathbb{R}^n :
 E_1 - der von den $\frac{\partial \Phi}{\partial t_j}, j = 1, \dots, k$ aufgespannte Unterraum,

(beachte: Parameterdarstellungen waren so definiert, dass diese k Vektoren immer linear unabhängig sind!), und

$$E_2 = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \text{grad } f_j(a) \rangle = 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, n - k\}.$$

Wir zeigen: $E_1 \subset T_a M \subset E_2$. Aus der k -Dimensionalität von E_1, E_2 folgt die Gleichheit aller drei Mengen, womit der Beweis beendet ist.

i) Es gilt: $E_1 \subset T_a M$:

Sei $v = \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c) + \dots + \lambda_k \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c) \in E_1$ beliebig. Die Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ definiert durch $\alpha(\tau) = \Phi(c_1 + \lambda_1 \tau, \dots, c_k + \lambda_k \tau)$ erfüllt $\alpha(0) = \Phi(c) = a$ und $\alpha'(0) = v$ (Kettenregel anwenden!), also $v \in T_a M$.

ii) Es gilt $T_a M \subset E_2$:

Sei $v \in T_a M, v = \alpha'(0)$, wobei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine Kurve durch a ($\alpha(0) = a$). Da die Kurve in M verläuft, gibt es also ein ε_1 mit $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$, so dass $f_j(\alpha(\tau)) = 0$ für $1 \leq j \leq k$ und $|\tau| < \varepsilon_1$ (beachten Sie die Stetigkeit der involvierten Abbildungen und die Offenheit der Mengen, die hier relevant sind!). Benutzt man die Kettenregel, um an $\tau = 0$ nach τ zu differenzieren, so erhält man:

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\alpha(0)) \cdot \alpha'_i(0) = \langle \text{grad } f_j(a), \alpha'(0) \rangle = \langle v, \text{grad } f_j(a) \rangle, \text{ für } 1 \leq j \leq k.$$

Damit ist $v \in E_2$. ■

Bemerkung 11.7 Die unter iii) angegebene Charakterisierung des Tangentialraumes kann man also auch so interpretieren: Die Vektoren $\text{grad } f_j(a)$ stehen orthogonal auf $T_a M$, liegen also im sogenannten Normalenraum.

Eine häufig anzutreffende Anwendung dieser Bemerkung ist folgende: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\text{grad } f \neq 0$ in G . Dann sind die Niveaumengen $M_c = \{x \in G : f(x) = c\}$ $(n-1)$ -dimensionale UM des \mathbb{R}^n und $\text{grad } f$ steht auf M_c orthogonal, ist also ein Vektor in Richtung der Normalen!

Wir werden mitunter auch von folgender Charakterisierung des Tangentialraumes $T_a M$ Gebrauch machen, die direkt aus ii) folgt. Sei $\Phi : T \rightarrow M, \Phi(t) = a$ eine lokale Parametrisierung um a . Dann ist $T_a M = \Phi'(t)\mathbb{R}^k$. Dazu beachte man, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(c) = \Phi'(c)e_j$, wobei die e_j die Standardbasisvektoren im \mathbb{R}^k (jetzt natürlich als Spaltenvektoren geschrieben).

11.2 Erste Anwendungen

Mit diesem Abschnitt unterbrechen wir die Betrachtungen zu Untermannigfaltigkeiten erst einmal und gehen auf zwei Anwendungen der bisherigen Begriffe ein: Relative Extrema mit Nebenbedingungen und Inhalt von Flächenstücken im \mathbb{R}^3 . Insbesondere letzteres wird im allgemeinen Kontext nochmals behandelt. Um aber konkrete Beispiele und Übungsmöglichkeiten zu haben, wurde dieser Abschnitt eingefügt.

11.2.1 Relative Extrema mit Nebenbedingungen

Häufig besteht die Aufgabe darin, von einer Funktion f Extremwertstellen unter zusätzlichen Einschränkungen an die Koordinaten zu bestimmen. Man denke an die physikalische Situation, dass ein System mit fester Energie vorliegt und dann Funktionen der Koordinaten auf Extremwerte untersucht werden sollen. Diese Suche findet dann auf den "Flächen" konstanter Energie statt.

Die genaue Formulierung lautet wie folgt: Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, und seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k (k < m)$ Abbildungen.

Definition 11.8 Man sagt, an der Stelle $x^0 \in M := \{x \in U : \varphi(x) = 0\}$ liegt ein lokales Minimum (Maximum) für die Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$ vor, wenn es eine Umgebung W von x^0 in M gibt, so dass $f(x) \geq f(x^0)$ (bzw. $f(x) \leq f(x^0)$) für alle $x \in W$ gilt.

Idee für Bestimmung der lokalen Extrema:

Wir betrachten Spezialfall: $m = 2, k = 1, \varphi(x, y) = 0$. Wenn man diese Gleichung nach einer Variablen, etwa nach y , auflösen kann, $y = h(x)$, dann kann man neue Funktion betrachten: $F(x) := f(x, h(x))$. Jetzt sucht man für F auf übliche Weise ein lokales Extremum.

Das Problem ist, man müsste explizit auflösen können. Das ist nur selten möglich und bei mehreren Nebenbedingungen sehr unübersichtlich. Lagrange hat entdeckt, wie man ohne Auflösung auf einfache Weise zum Ziel kommt.

Satz 11.9 (*Multiplikatorenregel von Lagrange*)

Sei f differenzierbar und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ stetig differenzierbar auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Ferner habe φ' in jedem Punkt der Nullstellenmenge

$M = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}$ den Rang k . Dann gilt:

Ist $x^0 \in M$ ein Extrempunkt von f unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$, so ist $f'(x^0)$ eine Linearkombination von $\varphi'_1(x^0), \dots, \varphi'_k(x^0)$, d.h. es existieren Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (die sog. Lagrange-Multiplikatoren) mit

$$f'(x^0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi'_i(x^0), \quad \text{d.h.} \quad \text{grad } f(x^0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } \varphi_i(x^0) \quad (1)$$

Bemerkung:

Bevor wir den Beweis führen, soll erläutert werden, welche Vorschrift sich aus diesem Satz zur Bestimmung der extremwertverdächtigen (kritischen) Punkte ergibt. Bilde die Hilfsfunktion H

$$H(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) := f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n).$$

Dann sucht man relatives Extremum von H als Funktion der x_i, λ_j , d.h.

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, 1 \leq i \leq n; \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = 0 = \varphi_j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

In konkreten Beispielen haben die λ_j oft konkrete Interpretation, häufig ist ihre explizite Bestimmung aber uninteressant und überflüssig zur Lösung der Aufgabe.

Beweis: Wir haben schon im vorigen Abschnitt 11.1 betont, dass wegen der Bedingungen an φ die Menge M eine $(n-k)$ -dimensionale UM des \mathbb{R}^n ist (die Rangbedingung besagt u.a., dass keine der Nebenbedingungen überflüssig ist). Um (1) zu zeigen, reicht es, folgende Implikation nachzuweisen:

$$\text{für jedes } v \in \mathbb{R}^n \text{ gilt } \varphi'(x^0)v = 0 \implies f'(x^0)v = 0. \quad (2)$$

Wieso zeigt das (1)? Sei E die Menge aller v mit $\varphi(x^0)v = 0$, d.h. die Vektoren $\text{grad } \varphi_j(x^0)$ liegen im orthogonalen Komplement von E (und spannen dieses auf!). Die Implikation (2) besagt, dass dann auch $\text{grad } f(x^0)$ im orthogonalen Komplement von E . Also muss $\text{grad } f(x^0)$ Linearkombination der $\text{grad } \varphi_j(x^0)$ sein.

Zeigen wir (2)! Aus Satz 11.6 iii) folgt: $\varphi'(x^0)v = 0$ bedeutet: $v \in T_{x^0}M$. Es existiert also eine Kurve $\alpha : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \alpha(0) = x^0, \alpha'(0) = v$. Da f in $x^0 \in M$ ein relatives Extremum hat, hat auch die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R} : F(t) := f(\alpha(t))$ an $t = 0$ ein relatives Extremum, d.h. $F'(0) = 0$. Die Kettenregel liefert dann aber: $F'(0) = f'(x^0)\alpha'(0) = f'(x^0)v = 0$. Damit ist (2) bewiesen. ■

Beispiel:

Man bestimme das Maximum von $f(x) = x_1 \cdots x_n$ auf der Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 1, x_i > 0 \forall i\}$. Hier ist also $k = 1, \varphi(x) = x_1 + \dots + x_n - 1 (= 0)$. Da $\varphi'(x) = (1, \dots, 1) \neq 0$ für alle x , kann der Satz angewendet werden. Es existiert also ein $\lambda : f'(x^0) = \lambda \varphi'(x^0)$, d.h. (wenn man $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ kompakt aufschreibt):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \frac{x_1^0 \cdots x_n^0}{x_i^0} = \lambda, \quad 1 \leq i \leq n$$

Daraus folgt aber (man schreibe diese Gleichung für i und j auf!): $x_1^0 = \cdots = x_n^0$. Wegen der Nebenbedingung folgt daraus: $x_i^0 = \frac{1}{n}$ für alle i . Das Maximum wird also im Punkt $x^0 = (1/n, \dots, 1/n)$ angenommen und $f(x^0) = 1/n^n$. (Dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt müsste man sich noch extra überlegen! Man sieht außerdem, dass λ hier gar nicht konkret bestimmt werden muss.). Es ergibt sich also: $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n \leq 1/n^n$ für alle x .

Daraus ergibt sich die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:

Seien a_1, \dots, a_n beliebige positive Zahlen. Setze $a := a_1 + \cdots + a_n$. Dann ist $(a_1/a, \dots, a_n/a) \in M$, also ist $\frac{a_1}{a} \cdots \frac{a_n}{a} = \frac{a_1 \cdots a_n}{a^n} \leq 1/n^n$. Daraus folgt aber sofort:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Auch im Fall der Extrema mit Nebenbedingungen kann man hinreichende Bedingungen angeben. Dabei betrachtet man die Hessematrix der zweiten partiellen Ableitungen der Funktion H an der Stelle (x^0) . Die davon induzierte quadratische Form wird jetzt aber nicht auf dem gesamten \mathbb{R}^n sondern nur auf dem Tangentialraum $T_{x^0}M$ betrachtet. Ist sie dort positiv (negativ) definit, liegt ein relatives Minimum (Maximum) vor.

11.2.2 Inhalt von Flächenstücken im \mathbb{R}^3

Das ist ein aus pragmatischen Gründen eingeschobener Abschnitt. Die Begriffe sollen etwas geübt und veranschaulicht werden. Darüberhinaus sollen Übungsmöglichkeiten geschaffen werden.

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine solche 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die durch eine einzige (globale) Parameterdarstellung $\Phi : T \rightarrow M$ gegeben werden kann. Dann sprechen wir auch von einem (glatten) Flächenstück M . Gesucht ist der Inhalt $|M|$ von M . Das bedeutet etwas genauer gesagt folgendes. Wir suchen eine solche *Definition* des Inhalts von M , dass möglichst viele wünschenswerte Eigenschaften erfüllt sein sollen. Außerdem soll dieser Inhaltbegriff im Falle eines in einer Ebene liegenden Flächenstücks mit dem üblichen Jordan-Inhalt übereinstimmen und für bekannte geometrische Figuren soll der bekannte geometrische Inhalt wiedergefunden werden (Kugeloberfläche, Kegel, Zylinder usw.). Zu den wünschenswerten Eigenschaften gehören u.a.: Translations- und Rotationsinvarianz des Inhalts.

Bei Kurven haben wir die Länge dadurch definiert, dass wir einbeschriebene Polygonzüge betrachtet haben. Die analoge Idee, einbeschriebene Polyederflächen zu benutzen, führt auf erhebliche Schwierigkeiten und Pathologien (vgl. "Schwarz'scher Zylinder", beschrieben etwa in Fichtenholz: Differential- und Integralrechnung, Teil III). Deshalb geht man einen ganz anderen Weg.

Betrachte ein kleines achsenparalleles Rechteck $Q \subset T$ mit $c = (c_1, c_2)$ als Mittelpunkt. Sei $\widehat{M} \subset M$, $\Phi(c) = a$. Als Approximation von $|\widehat{M}|$ nimmt man den Inhalt des Parallelogramms $\Phi'(c)(Q) \subset \mathbb{R}^3$. Sei o.E.d.A. Q aufgespannt von $\Delta t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Delta t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann wird $\widehat{Q} = \Phi'(c)(Q)$ aufgespannt von $\Delta t_1 \Phi_{t_1}(c), \Delta t_2 \Phi_{t_2}(c)$. Hier benutzen wir die Bezeichnung: $\Phi_{t_j} = (\Phi_{t_j}^1, \Phi_{t_j}^2, \Phi_{t_j}^3)^T$ und natürlich ist $\Phi_{t_j}^i = \frac{\partial \Phi^i}{\partial t_j}$. Wir schreiben ausnahmsweise die Komponenten von Φ mit oberen Indizes. Bekanntlich ist der Inhalt des von zwei Vektoren des \mathbb{R}^3 aufgespannten Parallelogramms die Länge des Vektorproduktes dieser zwei Vektoren. Also $|\widehat{Q}| = \|\Phi_{t_1} \times \Phi_{t_2}\| \Delta t_1 \Delta t_2$. Damit ist folgende Definition plausibel.

Definition 11.10 Sei $\Phi : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \Phi(T) \subset \mathbb{R}^3$ globale Parameterdarstellung der 2-dimensionalen UM M . Unter dem Inhalt von M versteht man

$$|M| := \int_T \|\Phi_{t_1}(t_1, t_2) \times \Phi_{t_2}(t_1, t_2)\| dt_1 dt_2 \quad (1).$$

Man nennt $dS(x) := dS := \|\Phi_{t_1} \times \Phi_{t_2}\| dt_1 dt_2 = \|\Phi_{t_1} \times \Phi_{t_2}\| dt$ das 2-dimensionale *Flächenelement* von M (bezüglich Φ).

Bemerkungen 11.11 i) Man muss natürlich voraussetzen, dass das in (1) rechts stehende Integral überhaupt existiert. Da der Integrand stetig ist, wäre das nur eine Forderung an T (also etwa T zulässig). Wir werden beim allgemeinen Fall sehen, dass man immer lokal beliebig "gute" Parameterbereiche nehmen kann, diese Einschränkung also wegfällt.

ii) Man muss zeigen, dass die Definition von der Parameterdarstellung unabhängig ist. Das holen wir auch später nach.

iii) Bekannte Fälle ordnen sich hier unter (s. Übungsaufgaben).

- iv) Hier und im allgemeinen Fall bleiben die Formeln und Aussagen noch gültig, wenn die Voraussetzungen auf niederdimensionalen Untermannigfaltigkeiten von M verletzt sind. Auf diese Weise kann man noch Gebilden einen Inhalt zuordnen, die sich durch "Aneinandersetzen" von Flächenstücken ergeben - etwa ein Würfel, Parallelepipid usw.
- v) Als Vorbereitung für den allgemeinen Fall wird empfohlen, die folgenden angedeuteten Rechnungen und Umformungen explizit nachzuvollziehen. In der Vektoranalysis ist folgende Formel für $a, b \in \mathbb{R}^3$ bekannt:

$$\|a \times b\|^2 = \langle a \times b, a \times b \rangle = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2$$

In unserem Fall bedeutet das mit $a = \Phi_{t_1}, b = \Phi_{t_2}$:

$$\|\Phi_{t_1} \times \Phi_{t_2}\|^2 = \det(\langle \Phi_{t_i}, \Phi_{t_j} \rangle), \quad i, j = 1, 2$$

Man setzt $g_{ij} = \langle \Phi_{t_i}, \Phi_{t_j} \rangle$ und nennt (g_{ij}) den Maßtensor von M (zu Tensoren siehe einen späteren Abschnitt!). Führt man noch die Standardbezeichnung $g := \det g_{ij}$ ein, dann erhält (1) die Gestalt:

$$|M| = \int_T \sqrt{g} dt.$$

Man rechnet leicht nach:

$$(g_{ij}) = (\Phi')^T \Phi', \quad \text{d.h.} \quad g = \det(\Phi')^T \Phi'$$

Beispiel

Als Beispiel für die Anwendung wollen wir jetzt die Oberfläche der Einheitskugel berechnen, d.h. den Inhalt von S^2 (bekanntlich muss 4π erhalten werden).

Als Parametrisierung wählen wir Kugelkoordinaten:

$$x = \Phi^1(\varphi, \vartheta) = \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = \Phi^2(\varphi, \vartheta) = \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = \Phi^3(\varphi, \vartheta) = \cos \vartheta, \\ 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi.$$

Man hat also: $t_1 = \varphi, t_2 = \vartheta, \quad T = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, eine offene Menge, und dann $\Phi(T) = S^2 \setminus A$, wobei A der Nullmeridian ist - auf diese Menge kommt es bei den Betrachtungen nicht an. Man muss A zunächst ausschliessen, weil sonst Φ nicht mehr die Bedingungen an die Parameterdarstellung erfüllt!

Dann erhält man durch direktes Nachrechnen sofort:

$$dS(x) = \|\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta\| d\varphi d\vartheta = \sin \vartheta d\varphi d\vartheta.$$

Beachte, dass man im Laufe der Rechnung erhält: $\|\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta\| = (\sin^2 \vartheta)^{1/2}$. Weil der Sinus aber im betrachteten Definitionsbereich immer nichtnegativ ist, erhält man das oben angegebene Resultat (und nicht etwa den Betrag). Damit ergibt sich dann:

$$|S^2| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi.$$

11.3 Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten (globale Parametrisierung)

Wir beginnen mit einigen Vorbetrachtungen, die größtenteils zur Linearen Algebra gehören.

Sei eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^k in den \mathbb{R}^n durch eine Matrix A mit den Spalten a^1, \dots, a^k gegeben. Dann nennt man die $(k \times k)$ - Matrix $A^T A$ die Gramsche Matrix der Abbildung, und es gilt (nachrechnen!):

$$A^T A = (\langle a^i, a^j \rangle), \quad \text{wobei } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ das Standardskalarprodukt } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ des } \mathbb{R}^n \text{ ist.}$$

Da für alle $x \in \mathbb{R}^k$ gilt: $\langle A^T A x, x \rangle = \langle A x, A x \rangle \geq 0$, ist die durch $A^T A$ induzierte quadratische Form positiv definit und man erhält insbesondere $\det A^T A \geq 0$.

Setze $\gamma(A) := \sqrt{\det A^T A}$. Für $n = k$ erhält man: $\gamma(A) = \sqrt{\det A^T \cdot \det A} = |\det A|$. Wir geben zunächst eine (geometrische) Interpretation der Größe $\gamma(A)$.

Wenn $A = (a^1, \dots, a^k)$, dann ist das Bild des k -dimensionalen Einheitswürfels unter A das von $A e_i = a^i$ (also den Spaltenvektoren von A) aufgespannte Parallelepiped im \mathbb{R}^n . Im Falle $n = k$ ist das Volumen dieses Parallelepipeds gerade $|\det A| = \gamma(A)$. Nun setzt man auch im Falle $k < n$: $\gamma(A) = k$ -dimensionales Volumen des aufgespannten Parallelepipeds =: $V_k(a^1, \dots, a^k)$. Dann kann man grundlegende Eigenschaften des Volumen des n -dimensionalen Parallelepipeds (Fall $n = k$) auch hier beweisen. Zum Beispiel gelten Beziehungen wie:

$$V_k(e_1, \dots, e_k) = 1, \quad V_k(a^1, \dots, \lambda a^i, \dots, a^k) = |\lambda| V_k(a^1, \dots, a^k)$$

und weitere Eigenschaften wie: Invarianz unter Translationen oder orthogonalen Transformationen. Das sieht man z.T. auch aus dem nächsten Lemma, das wir benutzen werden, um die Unabhängigkeit der Definition des Integrals über M von der Parameterdarstellung zu zeigen.

Lemma 11.12 Wenn $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineare Abbildungen (Matrizen), dann gilt:

$$\gamma(AB) = \gamma(A) \cdot |\det B|.$$

Beweis: $\gamma(AB)^2 = \det((AB)^T AB) = \det(B^T A^T AB) = (\text{weil } B^T, A^T A, B \text{ } (k \times k) \text{ - Matrizen sind}) = \det B^T \cdot \det A^T A \cdot \det B = (\det B)^2 \det A^T A$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Wir geben noch eine geometrische Interpretation dieses Lemma: Sei $B = (b^1, \dots, b^k)$, b^i die Spalten von B und Q das von den b^i aufgespannte Parallelepiped. Dann ist $|Q| \equiv V_k(b^1, \dots, b^k) = |\det B|$. Das Bild $A(Q)$ von Q unter A hat dann das Volumen $|A(Q)| = \gamma(A) \cdot |Q|$.

Es erweist sich als günstig, für die Berechnung von $\det A^T A$ eine Formel zu haben.

Lemma 11.13 Sei $k \leq n$ und seien A, B zwei $(n \times k)$ - Matrizen. Für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ bezeichne $A_{i_1 \dots i_k}$ die Matrix, die aus den Zeilen mit den Nummern i_1, \dots, i_k besteht. Entsprechend seien Untermatrizen von B bezeichnet. Dann gilt:

$$\det A^T B = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \det A_{i_1 \dots i_k} \det B_{i_1 \dots i_k}$$

Speziell für $A = B$ erhält man:

$$\det A^T A = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\det A_{i_1 \dots i_k})^2.$$

Für den Beweis (der elementare Eigenschaften der Determinante benutzt) sei auf Forster: "Analysis 3" verwiesen.

Als Anwendung erhält man: Wenn $\Phi : T \rightarrow M$ eine (lokale) Parametrisierung von M , dann erhält man mit den Bezeichnungen:

$(g_{ij}) := (\langle \Phi_{t_i}, \Phi_{t_j} \rangle) = (\Phi')^T \Phi'$, $g := \det g_{ij}$ die folgende Formel:

$$g = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\det \frac{\partial(\Phi^{i_1}, \dots, \Phi^{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} \right)^2.$$

Die Größe g heißt auch *Gramsche Determinante* der Mannigfaltigkeit M bezüglich der Parametrisierung Φ . Will man die Abhängigkeit von Φ besonders unterstreichen, so schreiben wir auch g^Φ statt g .

Definition 11.14 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale UM des \mathbb{R}^n . Es liege einer der folgenden beiden Fälle vor:

- i) es existiert eine globale Parametrisierung $\Phi : T \rightarrow M$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion;
- ii) $\Phi : T \rightarrow M$ ist eine lokale Parameterdarstellung und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion mit kompaktem Träger $\text{supp } f \subset \Phi(T)$ (d.h. $f \circ \Phi$ hat kompakten Träger in T , siehe auch Bemerkungen 11.2. iv)). Dann heißt f über M integrierbar, falls

$$f(\Phi(t))\sqrt{g(t)} \equiv f(\Phi(t))\sqrt{\det(\Phi'(t)^T \Phi'(t))} \quad (1)$$

über T integrierbar ist und man setzt

$$\int_M f(x) dS(x) := \int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)} dt \quad (2).$$

Bemerkungen 11.15 i) Wir deuten im nächsten Satz an, wie man die Unabhängigkeit der obigen Definition von der Parameterdarstellung zeigt.

ii) Man kann die obige Definition ohne Probleme wie folgt erweitern: wenn f ohne weitere Voraussetzungen auf $V = \Phi(T)$ definiert ist und (1) über T integrierbar ist, dann heißt f über V integrierbar. Das Integral wird dann mittels (2) definiert. Links steht dann $\int_V \dots$

iii) Es ist eine nützliche ÜA, sich für verschiedene Beschreibungsvarianten von Mannigfaltigkeiten das Oberflächenelement $dS(x)$ explizit auszurechnen. Dazu geht man (fast immer) zu einer geeigneten Parameterdarstellung über und benutzt zur Berechnung von g das Lemma 11.13.

Der nächste Satz beinhaltet nicht nur die angekündigte Unabhängigkeit des Integrals von der Parameterdarstellung. Er wird auch gleich genutzt, um den wichtigen Begriff des *Kartenwechsels* einzuführen. Mittels dieses Begriffes wird in abstrakten Mannigfaltigkeiten der Begriff der Differenzierbarkeit der Mannigfaltigkeit eingeführt.

Satz 11.16 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale UM und $\Phi_j : T_j \rightarrow W_j, j = 1, 2$ seien zwei lokale Parametrisierungen mit der Eigenschaft $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Sei ferner $S_j := \Phi_j^{-1}(W_1 \cap W_2)$. Dann gilt:

- i) der Kartenwechsel $h := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : S_1 \rightarrow S_2$ ist ein Diffeomorphismus.
 ii) Wenn $W_1 = W_2 =: W$ und $\text{supp } F \subset W$, dann gilt:

$$\int_{T_1} f(\Phi_1(t)) \sqrt{g^{\Phi_1}(t)} dt = \int_{T_2} f(\Phi_2(w)) \sqrt{g^{\Phi_2}(w)} dw.$$

Beweis: i) Die Behauptung folgt aus dem Satz über implizite Funktionen bzw. dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit von Abbildungen. Grob argumentiert man so: da Φ_j Diffeomorphismen, ist auch Φ_2^{-1} und $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ ein Diffeomorphismus (man muss nur jeweils die Definitionsbereiche im Auge haben).

ii) Hier werden Lemma 11.12 und die Transformationsformel für Mehrfachintegrale angewendet. Es ist $\Phi_1 = \Phi_2 \circ h$, also $\Phi_1' = \Phi_2' \cdot h'$, d.h. genauer: $\Phi_1'(t) = \Phi_2'(h(t)) \cdot h'(t)$. Lemma 11.12 wird angewendet mit: $A = \Phi_2', B = h$. Also:

$$\sqrt{g^{\Phi_1}(t)} = \gamma(\Phi_1'(t)) = \gamma(\Phi_2'(h(t)) \cdot h'(t)) = \gamma(\Phi_2'(h(t)) \cdot |\det h'(t)|) = \sqrt{g^{\Phi_2}(h(t))} |\det h'(t)|.$$

Also erhält man (mit $w := h(t)$ und unter Beachtung von $h(T_1) = T_2$) aus der Transformationsformel:

$$\int_{T_1} f(\Phi_1(t)) \sqrt{g^{\Phi_1}(t)} dt = \int_{T_1} f(\Phi_1(h(t)) \sqrt{g^{\Phi_2}(h(t))} |\det h'(t)| dt = \int_{T_2} f(\Phi_2(w)) \sqrt{g^{\Phi_2}(w)} dw.$$

■

PSfrag replacements

Φ_1
 Φ_2
 T_1
 T_2
 $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$

Abbildung 2: Zum Beweis von Satz 11.16

Der im Satz benutzte Begriff ‘‘Kartenwechsel’’ wird eigentlich verwendet, wenn man statt Parametrisierungen Karten zugrunde legt. An den Abbildungen ändert sich aber nichts (da die Inversen zu den Parametrisierungen gerade die Karten sind).

11.4 Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten (allgemeiner Fall)

Wenn die in Definition 11.14 beschriebene Situation nicht vorliegt, dann versucht man durch ‘‘Zusammenstückerln’’ von lokaler Integration zu globaler Integration überzugehen. Das ist ein wichtiges Prinzip für viele Situationen in der Mathematik. Das Hilfsmittel dazu heißt: *Zerlegung der Eins*. Wir geben einen Spezialfall des allgemeinen Satzes dazu an.

Satz 11.17 (Variante der Zerlegung der Eins) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,

$W_1, \dots, W_k \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $K \subset \bigcup_{j=1}^k W_j$. Dann existieren $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

folgenden Eigenschaften:

$\text{supp} \varphi_j \subset W_j, 0 \leq \varphi_j \leq 1$ für $j = 1, \dots, k$ und $\sum \varphi_j(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ heißen eine der Überdeckung W_1, \dots, W_k untergeordnete Zerlegung (Partition) der Eins auf K .

Beweis: Der Beweis ist etwas technisch, weil man unendlich oft differenzierbare Funktionen erhalten will (für unsere Zwecke würden stetige Funktionen vollkommen ausreichen).

Wir skizzieren die Idee. O.E.d.A. seien die W_j beschränkte Mengen. Dann ist $K' := \bigcup_{j=1}^k W_j$

eine kompakte Menge und $W_0 := \mathbb{R}^n \setminus K$ ist offen. Für alle $x \in K'$ existiert $r_x > 0$ und $j \in \{0, \dots, k\}$ mit: $K(x, 2r_x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < 2r_x\} \subset W_j$ (offene Kugel um x mit Radius $2r_x$). Offenbar überdecken alle $K(x, 2r_x)$ wie auch alle $K(x, r_x)$ die kompakte Menge K' . Aus dieser offenen Überdeckung kann endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden, d.h. es existieren: $x_1, \dots, x_m \in K'$ so dass $K' \subset \bigcup_{i=1}^m K(x_i, r_{x_i})$. Betrachte nun zunächst folgenden ‘‘Standard-Hut’’:

$$j(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{falls } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{falls } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

Das ist eine C_0^∞ -Funktion mit $\text{supp} j = K(0, 1)$. Diese Funktion wird jetzt verschoben und geeignet gestaucht/gestreckt. Genauer, es werden die Funktionen gebildet: $g_i(x) := j(\frac{x-x_i}{r_{x_i}})$. Das sind wieder C_0^∞ -Funktionen, nun aber mit $\text{supp} g_i = \overline{K(x_i, r_{x_i})} \subset K(x_i, 2r_{x_i})$. Für $j = 0, 1, \dots, k$ sei $I_j := \{i \in \{1, \dots, m\} : K(x_i, 2r_{x_i}) \subset W_j\}$. Setze $\psi_j := \sum_{i \in I_j} g_i$

und $\psi := \sum_{j=0}^k \psi_j$. Die Funktionen $\varphi_j := \frac{\psi_j}{\psi}, j = 1, \dots, k$ haben dann genau die im Satz angegebenen Eigenschaften. ■

Der Name *Zerlegung der Eins* kommt natürlich daher, dass auf K gilt: $\sum \varphi_j = 1$ (wobei hier ‘‘1’’ die Funktion bezeichnet, die auf K identisch Eins ist). Die Zerlegung der Eins kann man auch für abzählbar viele Mengen W_j konstruieren.

Nun können wir das Integral über UM definieren.

Definition 11.18 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f \in C_0(M)$ (stetige Funktionen mit kompaktem Träger). Dann gibt es lokale Parametrisierungen $\Phi_j : T_j \subset \mathbb{R}^k \rightarrow W_j \subset M, j = 1, \dots, m$, so dass $\text{supp} f \subset \bigcup_{j=1}^m W_j$.

Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ eine W_1, \dots, W_m untergeordnete Zerlegung der Eins von $\text{supp } f$. Für $j = 1, \dots, m$ ist dann $\varphi_j f \in C_0(M)$ und $\text{supp } (\varphi_j f) \subset W_j$. Daher sind gemäss Definition 11.14 die Integrale $\int_{W_j} (\varphi_j f)(x) dS(x)$ schon erklärt. Dann wird gesetzt:

$$\int_M f(x) dS(x) := \sum_{j=1}^m \int_{W_j} (\varphi_j f)(x) dS(x).$$

Man muss nun auch hier noch zeigen, dass die Definition unabhängig von der Parametrisierung ist. Wir haben stetige Funktionen genommen, weil dann die angegebenen Integrale immer existieren. Die allgemeine Definition für eine beliebige Funktion (mit kompaktem Träger, damit man mit endlicher Zerlegung der Eins auskommt), müsste also noch voraussetzen, dass die Funktionen $(\varphi_j f)$ integrierbar sind. Dann heißt f über M integrierbar, und das Integral wird wie in der obigen Definition gesetzt.

Wenn $A \subset M$ und χ_A über M integrierbar, dann setzt man:

$$|A| := \int_M \chi_A dS = \int_A dS(x).$$

11.5 Der Gaußsche Integralsatz

Die Integralsätze der Vektoranalysis haben alle im wesentlichen die folgende (schematische) Struktur

$$\int_B \dots = \int_{\partial B} \dots$$

Dabei ist B eine (näher zu charakterisierende) Menge und ∂B ihr Rand (Achtung: man muss genau zwischen topologischen Rand und Rand der Mannigfaltigkeit unterscheiden, s. 12.5). Diese Integralsätze sind (in gewissem Sinne) Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Der allgemeinste Satz ist der allgemeine Satz von Stokes (siehe späterer Abschnitt). Wir behandeln hier den Satz von Gauß. Dabei geben wir eine ziemlich allgemeine Formulierung und führen den Beweis in einem sehr speziellen Fall. Zuerst wird die Struktur von B erläutert.

Definition 11.19 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein solches Gebiet (offene zusammenhängende Menge), dass \overline{G} kompakt ist im \mathbb{R}^n . ∂B sei der übliche (topologische) Rand von B (d.h. in jeder Umgebung von $a \in \partial B$ liegen Punkte aus B und solche, die nicht zu B gehören). Man sagt, B ist ein *Kompaktum mit glattem Rand*, wenn folgendes gilt: Für jedes $a \in \partial B$ existiert eine offene Umgebung (etwa eine Kugel) U und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$B \cap U = \{x \in U : g(x) \leq 0\} \text{ und } \text{grad } g(x) \neq 0 \forall x \in U.$$

Dann heißt $n(a) := \frac{\text{grad } g(a)}{\|\text{grad } g(a)\|}$ der *äußere Einheitsnormalenvektor* an B im Punkt a .

Wir bemerken, dass man das Vorzeichen von g auch ändern kann, d.h. dass die Bedingung auch lauten kann: $g > 0$ in B und $g < 0$ außerhalb B . Dann hat man bei der äußeren Normalen auch einen Vorzeichenwechsel.

Wir geben zunächst ein ganz einfaches Beispiel.

Sei B die n -dimensionale Einheitskugel (d.h. $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$). Dann ist $\partial B = S^{n-1}$ die $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre. Wählt man g mit $g(x) = \|x\| - 1$, dann sind alle Bedingungen der Definition erfüllt. Speziell hat man im Inneren tatsächlich: $g(x) < 1$.

Abbildung 3: Kompaktum mit glattem Rand

Bemerkungen 11.20 i) Aus der Definition folgt:

$$\partial B \cap U = \{x \in U : g(x) = 0\}.$$

Das sieht man etwa so:

" \subset ": $\mathbb{R}^n \setminus B \supset \{x \in U : g(x) > 0\}$ - das ist offene Menge, weil g stetig.

$B \supset \{x \in U : g(x) < 0\}$ - auch offen.

Nach der Randdefinition ist dann $\partial B \cap U \subset \{x : g(x) = 0\}$.

" \supset ": Sei $g(x_0) = 0$. zu zeigen: $x_0 \in \partial B$.

Taylorentwicklung von g bis zu Gliedern 1.Ordnung:

$g(x_0 + h) = g(x_0) + \langle \text{grad } g(x_0), h \rangle + o(h) = \langle \text{grad } g(x_0), h \rangle + o(h)$. Beachte nun, dass $v := \text{grad } g(x_0) \neq 0$ und setze $h := t \cdot \text{grad } g(x_0)$. Dann erhält man:

$$g(x_0 + tv) = t\|v\|^2 + o(tv).$$

Mithin existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$g(x_0 + tv) > 0$ für alle $t : 0 < t < \varepsilon$ und $g(x_0 + tv) < 0$ für alle $t : -\varepsilon < t < 0$.

Also gilt:

$x_0 + t \text{grad } g(x_0) \notin B$ für alle $0 < t < \varepsilon$ und $x_0 + t \text{grad } g(x_0) \in B$ für alle $-\varepsilon < t < 0$.

Das bedeutet aber gerade, dass in jeder Umgebung von x_0 Punkte aus B und dem Komplement liegen, d.h. $x_0 \in \partial B$.

Damit erhält man folgende Aussage:

Wenn B ein Kompaktum mit glattem Rand, dann ist ∂B eine $(n-1)$ -dimensionale UM des \mathbb{R}^n (d.h. eine Hyperfläche).

ii) Der Vektor $n(a)$ hat folgende Eigenschaften: - er steht orthogonal auf $T_a(\partial B)$,
 - $\|n(a)\| = 1$,
 - es existiert ein $\varepsilon > 0 : a + t \cdot n(a) \notin B$ für alle $0 < t < \varepsilon$.
 (Wir bemerken noch, dass durch diese Eigenschaften der Vektor $n(a)$ eindeutig bestimmt ist.)

Man kann dies auch so formulieren: wenn B ein Kompaktum mit glattem Rand, dann existiert ein stetiges Vektorfeld $n : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass für alle $a \in \partial B$ der Vektor $n(a)$ gerade der äußere Normaleneinheitsvektor ist.

iii) Wir geben noch an, wie im Fall eines Kompaktums mit glattem Rand (lokal) das Flächenelement aussieht. Hat man die lokale Randdarstellung als Graph von h (von $(n-1)$ Variablen!), dann ist die in der Definition vorkommende Funktion g bei geeigneter Nummerierung der Variablen gegeben durch $g(x) = x_n - h(x_1, \dots, x_{n-1})$. Mithin ergibt sich:

$$n(a) = \frac{(-\text{grad } h(a'), 1)}{\sqrt{1 + \|\text{grad } h(a')\|^2}} \text{ wobei } (a', h(a')) = a \in \partial B$$

$$dS(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } h(x')\|^2} dx', \text{ wobei } x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Es wird dringend empfohlen, das alles selbst nachzurechnen!

Theorem 11.21 (Gaußscher Integralsatz) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $n : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $U \supset B$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\int_B \text{div } F(x) dx = \int_{\partial B} \langle F(x), n(x) \rangle dS(x) \quad (1).$$

Zusatz: Der Satz gilt auch noch, wenn B niederdimensionale Singularitäten (z.B. Ecken, Kanten hat, wie etwa beim Würfel). Auch die Bedingungen an das Vektorfeld F kann man noch abschwächen.

Beweis: Der allgemeine Beweis ist relativ aufwendig (vgl. etwa Forster: Analysis 3, woher auch die Formulierungen genommen sind). Wir beweisen den GIS für $n = 3$ und spezielle B (sog. "Normalbereiche" bezüglich der z -Achse) und spezielle F : Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ (das sei die $x - y$ -Ebene), $f_1, f_2 : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig diffbar (d.h. etwa: stetig diffbar in einer offenen Menge, die \overline{G} enthält) und $f_1 \leq f_2$;

$$B := \{(x, y, z) : (x, y) \in \overline{G}, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}.$$

B ist also eine Art Zylinder über \overline{G} mit oberem Deckel $\mathcal{F}_2 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \overline{G}, f_2(x, y) = z\}$ und entsprechendem unteren Deckel \mathcal{F}_1 (bezüglich f_1 dann), mit \mathcal{F}_3 sei der "Zylindermantel" bezeichnet. Bis auf niederdimensionale Singularitäten ist B ein Kompaktum mit glattem Rand.

Entsprechend sind "Normalbereiche" bezüglich der anderen Achsen definiert. Man denkt sich nun ein allgemeines B in endlich viele Normalbereiche bezüglich jeder Achse zerlegbar.

Ein Vektorfeld $F = (P, Q, R)$ lässt sich zerlegen: $F = (P, 0, 0) + (0, Q, 0) + (0, 0, R)$. Wir betrachten für unser spezielles B den Spezialfall: $F = (0, 0, R)$.

Den allgemeinen Fall erhält man dann wieder durch Addieren der einzelnen speziellen VF. Dabei ist klar, dass man die Auswahl jeweils nach Art der betrachteten Normalbereiche vornimmt.

Seien also diese Voraussetzungen erfüllt. Dann erhält man:

$$\int_B \operatorname{div} F dx dy dz = \int_B \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = (\text{vgl. Kapitel über Mehrfachintegrale}) = \iint_G \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_G [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))] dx dy \quad (2).$$

Jetzt betrachten wir die äußeren Einheitsnormalen an ∂B :

$$\mathcal{F}_1 : n_1(x, y, z) = ((f_1)_x, (f_1)_y, -1) / \|\dots\| =: \frac{\nu_1}{\|\nu_1\|};$$

$$\mathcal{F}_2 : n_2(x, y, z) = (-(f_2)_x, -(f_2)_y, 1) / \|\dots\| =: \frac{\nu_2}{\|\nu_2\|};$$

$\mathcal{F}_3 : n_3$ hat keine z -Komponente, ist für uns also irrelevant.

Auf \mathcal{F}_1 gilt: $dS(x) = \|\nu_1\| dx dy$, auf \mathcal{F}_2 : $dS(x) = \|\nu_2\| dx dy$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \langle F, n \rangle dS(x) &= \int_{\mathcal{F}_2} \langle (0, 0, R), n \rangle dS(x) + \int_{\mathcal{F}_1} \langle (0, 0, R), n \rangle dS(x) = \\ &= \iint_G \langle (0, 0, R), \frac{\nu_2}{\|\nu_2\|} \rangle \|\nu_2\| dx dy + \iint_G \langle (0, 0, R), \frac{\nu_1}{\|\nu_1\|} \rangle \|\nu_1\| dx dy = \\ &= \iint_G R(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, f_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Das ist aber genau (2).

Damit ist der GIS für diesen Spezialfall gezeigt. ■

Wir formulieren explizit noch den GIS für $n = 2$. Das ist der *Gaußsche Integralsatz in der Ebene*, manchmal auch *Satz von Green* genannt (Achtung: es gibt viele Sätze und Formeln von Green!).

Folgerung 11.22 Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand, P, Q in einer offenen Umgebung von B stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial B} P dy - Q dx.$$

Das wird häufig in einer anderen Form geschrieben (die an die Benutzung von Differentialformen besser angepasst ist. Vgl. auch Abschnitt über allgemeinen Stokesschen Satz):

$$\int_{\partial B} F dx + G dy = \int_B \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy.$$

Bemerkung: $\int_{\partial B}$ ist das Integral über den gesamten Rand von B (wenn also B z.B. ein Kreisring, dann über die beiden begrenzenden Kreislinien). Man beachte, dass hier implizit eine Randorientierung drinsteckt. Wenn man z.B. die Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t)$ hat, dann muss man, um mit $(\dot{y}, -\dot{x})$ immer die äußere Normale zu erhalten, die Parameterdarstellung so wählen, dass mit wachsendem t der Durchlauf des Randes stets so erfolgt, dass B zur Linken liegt!

Ein Gegenbeispiel zur Warnung:

Sei B die Einheitskreisscheibe. Es soll bestimmt werden: $\int_{\partial B} Fdx + Gdy$ wobei:

$$F = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad G = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Würde man Gauß in der Ebene gedankenlos anwenden, so erhält man für da Integral $\int_B (\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}) dx dy$ sofort Null. Das ist aber **nicht** der Wert des Kurvenintegrals. Man darf den Gaußschen Satz nicht anwenden, weil F, G im Ursprung natürlich nicht stetig diffbar sind!

11.6 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

Sei V ein k -dimensionaler Vektorraum, $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_k), \mathcal{B}_2 = (w_1, \dots, w_k)$ seien zwei Basen, $A = (a_{ij})$ sei die Matrix, die durch $\sum_j a_{ij} v_j = w_i, 1 \leq i \leq k$ definiert ist.

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ heißen *gleichorientiert*, wenn $\det A > 0$. Man schreibt $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ und zeigt, dass dadurch eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Basen von V festgelegt ist. Es existieren genau zwei Äquivalenzklassen.

Eine Orientierung (bei Bedarf benutzen wir das Symbol \mathcal{O}) in V festlegen heißt, eine Äquivalenzklasse auszuzeichnen, ihr die positive Orientierung zuzuschreiben.

Vereinbarung: Die kanonische Basis (e_1, \dots, e_n) des \mathbb{R}^n sei positiv orientiert. (Im $\mathbb{R}^{2,3}$ wird dadurch ein Umlaufsinn definiert; im \mathbb{R}^3 spricht man manchmal auch von der "Rechte-Hand-Regel", d.h. Daumen, Zeige- und Mittelfinger entsprechen der x-, y- bzw. z-Achse).

Jetzt sollen UM des \mathbb{R}^n auf Orientierbarkeit untersucht werden (hier klingt schon an, dass es Probleme geben kann, auf M eine Orientierung einzuführen, vgl. weiter unten, Möbius'sches Band). Als zugeordnete lineare Räume stehen uns die Tangentialräume zur Verfügung. Wir entsteht z.B. eine Basis im Tangentialraum? Sei

$\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung,

$t_0 \in T \rightarrow \Phi(t_0) = a \in M$

Benutzt man die in Bemerkung 11.7 gegebene Charakterisierung des Tangentialraumes: $T_a M = \Phi'(t_0)\mathbb{R}^k$, dann ist (a_1, \dots, a_k) mit $a_i = \Phi'(t_0)e_i$ eine Basis in $T_a M$ und diese soll positive Orientierung des Tangentialraumes liefern. Man spricht dann manchmal auch von positiv orientierter Parameterdarstellung.

Definition 11.23 Eine Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn es eine lokal verträgliche Menge von Orientierungen der Tangentialräume gibt, d.h es gibt ein System \mathcal{O} von Parametrisierungen (T_Φ, Φ) (oder Karten (h, W)) mit:

i) $\bigcup_{W \in \mathcal{O}} W = M$ und

ii) wenn $W, V \in \mathcal{O}$ und $W \cap V \neq \emptyset$, dann liefern (h, W) und (g, V) für alle $a \in W \cap V$ die gleiche Orientierung von $T_a M$. Das bedeutet also: wenn $a \in W \cap V$ und (b_1, \dots, b_k) eine Basis in $T_a M$, dann gilt in $\mathbb{R}^k : (g'(a)b_1, \dots, g'(a)b_k) \sim (h'(a)b_1, \dots, h'(a)b_k)$.

Unter einer Orientierung \mathcal{O} von M versteht man häufig ein maximales System \mathcal{O} mit den Eigenschaften i) und ii) in der obigen Definition.

Man kann das auch noch anders formulieren. Seien

$\Phi_i : T_i \rightarrow W_i$ zwei Parametrisierungen (bzw. (h_i, W_i) zwei Karten). Dann sind

$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ (bzw. $h_2 \circ h_1^{-1}$) : $T_1 \rightarrow T_2$ Diffeomorphismen und $(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)'$ bzw. $(h_2 \circ h_1^{-1})'$ invertierbare lineare Abbildungen ($\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$). Man nennt die Kartenwechsel orientierungserhaltend (bzw. die Karten gleichorientiert), wenn $\det(h_2 \circ h_1^{-1})' > 0$ (falls $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, dann sollen die Karten per def. gleichorientiert heißen).

Lemma 11.24 *Eine Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas aus gleichorientierten Karten gibt.*

Beweis: Wir formulieren den Beweis in der Sprache der Parametrisierungen. Seien $\Phi_i : T_i \rightarrow W_i$ mit $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ zwei Parametrisierungen und $a \in W_1 \cap W_2, \Phi_1(t_1) = \Phi_2(t_2) = a$. Zur Abkürzung setzen wir: $f := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ (entspricht dem Kartenwechsel). Dann ist also $\Phi_1 = \Phi_2 \circ f$ und aus der Kettenregel ergibt sich: $\Phi_1' = \Phi_2' \circ f'$. Daraus sieht man: Φ_1 und Φ_2 liefern dieselbe Orientierung am Punkt a , genau dann, wenn $\det f'(t_1) > 0$. ■

Für $(n-1)$ -dimensionale UM des \mathbb{R}^n gibt es eine weitere Charakterisierung der Orientierbarkeit. Wir geben ohne Beweis das nachstehende Lemma:

Lemma 11.25 *Wenn M eine $(n-1)$ -dimensionale UM des \mathbb{R}^n , dann existiert eine eindeutige Beziehung zwischen den Orientierungen von M und den stetigen Einheitsnormalen-Vektorfeldern auf M .*

Genauer wird das wie folgt erreicht: Wenn \mathcal{O} eine Orientierung von M und $a \in M$, dann hat $T_a M$ die Dimension $(n-1)$, es gibt also genau zwei auf $T_a M$ orthogonale Einheitsvektoren. Wir wählen $n(a)$ so, dass

$$(n(a), \Phi'(t)e_1, \dots, \Phi'(t)e_{n-1}) \quad (*)$$

positiv orientiert in $T_a M$. Dabei ist Φ eine Parametrisierung um $\Phi(t) = a$. Damit wird ein Vektorfeld mit den o.g. Eigenschaften definiert. Wenn ein solches VF existiert, dann wird durch $(*)$ eine Orientierung auf M gegeben.

Das Standardbeispiel einer nichtorientierbaren Mannigfaltigkeit ist das sog. *Möbiusband*. Man erhält es, wenn man einen rechteckigen Streifen in Längsrichtung einmal verdreht und dann an den Schmalseiten zusammenklebt.

Wenn wir später Mannigfaltigkeiten mit Rand betrachten, dann werden wir noch über die Orientierung des Randes zu sprechen haben.

12 Tensoren und Differentialformen

In diesem Kapitel führen wir Tensoren und Differentialformen ein (genau genommen benötigen wir nur letztere) und geben die wichtigsten Rechenoperationen mit ihnen an, die wir im folgenden benötigen. Tensoren gehören eigentlich unter der Überschrift "Multilineare Algebra" in die Vorlesung "Lineare Algebra". Aus Zeitgründen werden sie dort oft nicht behandelt. Der Tensorbegriff wird häufig als schwierig empfunden. Das hat mehrere Ursachen. Einmal schrecken in (exakten) mathematischen

Darstellungen die vielen Indizes den Anfänger ab. Zum anderen gibt es zahlreiche Bücher (häufig physikalischer Natur), in denen der Tensorbegriff so “pragmatisch” eingeführt wird, dass man beim besten Willen nicht verstehen kann, um welche Art von mathematischen Objekten / Strukturen es sich handelt. Auch in der mathematischen Literatur gibt es verschiedene Zugänge. Es lohnt sich, verschiedene Darstellungen anzusehen. Eine recht geeignete Darstellung findet man u.a. in A. Browder: Mathematical Analysis.

Wir verwenden aber z.T. etwas andere Bezeichnungen.

12.1 Der Tensorbegriff

Wir fixieren zunächst die Bezeichnungen. Im folgenden sei V stets ein n -dimensionaler, reeller Vektorraum und $V^* := L(V, \mathbb{R}) := \{\omega : V \rightarrow \mathbb{R}, \omega \text{ linear}\}$ der duale Vektorraum, der Raum der linearen Funktionale auf V .

Wenn (e_1, \dots, e_n) eine Basis in V , $x \in V$, dann ist $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$. Die (x^i) heißen die

Koordinaten von x (bezüglich der Basis (e_i)). Im folgenden kommt es stets sehr genau auf die Stellung der Indizes an (das ist Konvention, die aber konsequent eingehalten werden soll - Ausnahmen werden extra benannt).

Wir benutzen außerdem häufig die sog. *Einsteinsche Summenkonvention*, d.h. wir schreiben $\sum_{i=1}^n x^i e_i$ als $x^i e_i$ ($= x^k e_k$).

Die Konvention lautet: über doppelt auftretende obere und untere Indizes wird automatisch summiert. Das Summenzeichen wird weggelassen. Soll nicht summiert werden, muss es extra vermerkt werden.

Satz 12.1 *Sei (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V . Dann existiert eine (eindeutig bestimmte) Basis (e^1, \dots, e^n) von V^* , die sogenannte duale Basis zu (e_i) mit der Eigenschaft: $e^i(e_j) = \delta_j^i$ (δ_j^i ist das bekannte Kroneckersymbol).*

Insbesondere ist $\dim V = \dim V^$.*

Der Beweis wird in der Linearen Algebra geführt.

Als Folgerung ergibt sich (was man auch direkt beweisen könnte):

Für alle $u \in V, u \neq 0$ existiert ein $\alpha \in V^*$ mit $\alpha(u) \neq 0$.

Wir erinnern daran, dass endlichdimensionale Vektorräume über dem gleichen Körper genau dann isomorph sind (d.h. es existiert eine eineindeutige lineare Abbildung zwischen ihnen), wenn sie die gleiche Dimension haben. Aber: es existiert i.a. kein ausgezeichnete Isomorphismus. Eine Ausnahme bilden die Vektorräume V und V^{**} . Zwischen beiden existiert ein natürlicher Isomorphismus, nämlich:

$$j : V \rightarrow V^{**} \quad \text{mit} \quad j(u) : V^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad j(u)(\alpha) := \alpha(u).$$

In diesem Sinne wird $u \in V$ mit $j(u) \in V^{**}$ identifiziert. Damit hat der Satz 12.1 auch eine Lesart, die V und V^* vertauscht: wenn (α^i) eine Basis von V^* , dann existiert eine Basis (u_j) in V , so dass $(u_j), (\alpha^i)$ zueinander dual sind.

Alle bisher gemachten Aussagen sind nützliche Übungsaufgaben zum Wiederholen einiger Begriffe aus der linearen Algebra.

Definition 12.2 Seien E_1, \dots, E_k, E reelle Vektorräume. Eine Abbildung

$$\alpha : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow E$$

heißt *multilinear*, wenn α in jeder Komponente linear ist, d.h.

$$\alpha(u_1, \dots, u_i + cv_i, u_{i+1}, \dots, u_k) = \alpha(u_1, \dots, u_i, \dots, u_k) + c\alpha(u_1, \dots, v_i, \dots, u_k)$$

an jeder Stelle i und für alle $u_j, v_i \in V, c \in \mathbb{R}$.

Im Falle $E = \mathbb{R}$ heißt α *Multilinearform*.

Definition 12.3 i) Seien $r, s \in \mathbb{N}$. Ein *r-fach kovarianter Tensor* auf (über) V ist eine multilineare Abbildung

$$\alpha : V^r \equiv \underbrace{V \times \dots \times V}_r \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ein *s-fach kontravarianter Tensor* auf V ist eine multilineare Abbildung

$$\alpha : (V^*)^s \equiv \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_s \rightarrow \mathbb{R}.$$

ii) Seien $r, s \geq 0$, ganz. Ein *r-fach kovarianter, s-fach kontravarianter Tensor* ist eine Multilinearform

$$\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_r \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_s \rightarrow \mathbb{R}.$$

(Offenbar schließt ii) die Fälle unter i) mit ein.)

Bezeichnungen (Achtung nicht einheitlich in der Literatur!):

$T_r(V) \equiv T_r^0(V) (= \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_r)$ - Menge der r-fach kovarianten Tensoren;

$T^s(V) \equiv T_0^s(V) (= \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_s)$ - Menge der s-fach kontravarianten Tensoren;

$T_r^s(V) (= V^* \otimes \dots \otimes V^* \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_s)$ - Menge der r-fach ko- und s-fach kontravarianten Tensoren.

Achtung! Die jeweils in den Klammern stehenden Symbole heißen *Tensorprodukt* der dort angeführten Räume. Dieser Begriff wurde (noch) nicht eingeführt. Er gibt aber die Möglichkeit, Tensoren zu betrachten entweder als Multilinearformen (wie in der Definition 12.2) oder als Elemente der entsprechenden Tensorprodukte. Wir nehmen den ersten Standpunkt ein, obwohl vom Standpunkt eines befriedigenden Aufbaus her, der Start mit dem Tensorprodukt günstiger ist.

Alle auftretenden Mengen sind Vektorräume (das ist ganz leicht zu sehen! ÜA!). Die Dimensionen dieser Räume werden wir gleich bestimmen.

Vorher geben wir einige Rechenoperationen mit Tensoren an. Aus der eben gemachten Bemerkung ist klar, dass man gleichartige Tensoren addieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren kann. Wir erklären zunächst noch

Tensorprodukt von Tensoren:

Seien $\alpha \in T_r^s(V), \beta \in T_{r'}^{s'}(V)$. Dann ist $\alpha \otimes \beta \in T_{r+r'}^{s+s'}(V)$ erklärt durch:

$(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+r'}, w^1, \dots, w^s, w^{s+1}, \dots, w^{s+s'}) :=$
 $\alpha(v_1, \dots, v_r, w^1, \dots, w^s) \cdot \beta(v_{r+1}, \dots, v_{r+r'}, w^{s+1}, \dots, w^{s+s'})$ für alle $v_i \in V, w^j \in V^*$.

Eine entsprechende Definition auch für das Tensorprodukt einer endlichen Anzahl von Tensoren.

Beispiel: Seien $f^1, \dots, f^r \in V^*$ dann ist $\alpha = f^1 \otimes \dots \otimes f^r$ der r-fach kovariante Tensor aus $T_r(V)$, definiert durch $f^1 \otimes \dots \otimes f^r(u_1, \dots, u_r) = f^1(u_1) \cdot \dots \cdot f^r(u_r)$ für beliebige $u_1, \dots, u_r \in V$.

Achtung: Da wir es vermieden haben, Vektoren durch besondere Schrift (etwa Fettdruck) hervorzuheben, muss man sehr aufpassen, ob ein Index der Nummerierung dient oder eine Koordinate bezeichnet. Aus dem Zusammenhang sollte aber immer eindeutig hervorgehen, was gemeint ist. Oben ist eben ein Nummerierungsindex gemeint.

Beispiele für Tensoren

Beispiel 1:

Sei $\alpha \in V^*$. Durch $\alpha(x), x \in V$ wird klar, dass α ein einfach kovarianter Tensor ist. Analog wird für $x \in V$ durch die Definition $x(\alpha) := \alpha(x), \alpha \in V^*$ klar, dass x ein einfach kontravarianter Tensor ist (Hier wird die Identifizierung von V und V^{**} benutzt, s.o.).

Beispiel 2:

Auf V sei ein Skalarprodukt \langle, \rangle gegeben. Die Abbildung $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ definiert also einen zweifach kovarianten Tensor (der zudem noch symmetrisch ist, s.u.).

Beispiel 3:

Sei A eine lineare Abbildung auf V . Dann lässt sich A als ein einfach ko- und einfach kontravarianter Tensor α auffassen. Dazu definiert man: $\alpha(x, w) = w(Ax)$ für alle $x \in V, w \in V^*$.

Beispiel 4:

Determinanten sind Prototypen für alternierende Tensoren (s.u.). Sei in V eine feste Basis gewählt, seien $u_1, \dots, u_n \in V$, als Spaltenvektoren bezüglich dieser Basis geschrieben. Dann ist die Abbildung $(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \det(u_1, \dots, u_n)$ ein n-fach kovarianter Tensor (alternierend, s.u.).

Beispiel 5: *Der Trägheitstensor*

Sei jetzt $V = \mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt \langle, \rangle , K ein Körper, der mit dem Masseschwerpunkt im Koordinatenursprung liegt und dessen Massendichte m wenigstens integrierbar sein soll. Das Trägheitsmoment von K bezüglich der Achse e (wobei e ein Einheitsvektor ist) wird gegeben durch:

$$J(e) := \int_K \langle e \times x, e \times x \rangle dm(x).$$

Der Trägheitstensor Θ ist die bilineare Abbildung:

$$\Theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \Theta(a, b) := \int_K \langle a \times x, b \times x \rangle dm(x).$$

Aus Θ erhält man dann die quadratische Form J gemäß $J(a) := \Theta(a, a)$ und für Einheitsvektoren die obige Gleichung für das Trägheitsmoment.

Im nächsten Punkt werden wir gleich die Koordinatendarstellung von Tensoren behandeln. Dann findet man auch mehr oder weniger leicht die Koordinatendarstellung

des Trägheitstensors, wie er auch in den Physikbüchern steht.

Basis und Koordinatendarstellung

Der folgende Satz stellt den Ausgangspunkt dar, um den Anschluss an den in zahlreichen Physikbüchern benutzten Tensorbegriff zu erhalten.

Satz 12.4 Sei (e_i) eine Basis für V , (e^k) die duale Basis in V^* . Dann ist die folgende Menge eine Basis für $T_r^s(V)$:

$$\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s} : i_k, j_l \in \{1, \dots, n\}\} \quad (*).$$

Damit ist $\dim T_r^s(V) = n^{r+s}$.

Beweis: Wir müssen zeigen: die Menge (*) ist linear unabhängig und erzeugt $T_r^s(V)$. Um den Schreibaufwand zu reduzieren, zeigen wir alles nur für $T_r(V)$, d.h. wir betrachten die Menge

$$\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}, i_k \in \{1, \dots, n\}\} \quad (**).$$

Aus der Definition der dualen Basis und des Tensorproduktes sieht man:

$$(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r})(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) = \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_r}^{i_r}$$

und dieser Ausdruck ist Eins falls $(i_1, \dots, i_r) = (k_1, \dots, k_r)$, sonst ist er Null. Wenn also

$$\sum c_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r} \equiv (\text{Summenkonvention!}) \equiv c_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r} = 0,$$

dann erhält man durch Anwendung auf $(e_{k_1}, \dots, e_{k_r})$: $c_{k_1 \dots k_r} = 0$ für alle r-Tupel (k_1, \dots, k_r) . Mithin ist die Menge (**) linear unabhängig. (Beachten Sie: in der obigen Summe wird über alle r-Tupel (j_1, \dots, j_r) mit $1 \leq j_l \leq n$ summiert.)

Jetzt zeigen wir, dass die Menge (**) erzeugend ist. Sei also $\alpha \in T_r(V)$. Wir definieren für alle r-Tupel (k_1, \dots, k_r) , $1 \leq k_l \leq n$ die Zahlen $a_{k_1 \dots k_r} := \alpha(e_{k_1}, \dots, e_{k_r})$. Dann gilt für beliebige $u_1, \dots, u_r \in V$ mit $u_i = x_i^k e_k$ (Summenkonvention beachten!) unter Berücksichtigung der Multilinearität:

$$\begin{aligned} \alpha(u_1, \dots, u_r) &= \alpha(x_1^{k_1} e_{k_1}, \dots, x_r^{k_r} e_{k_r}) = x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} \alpha(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) = x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} a_{k_1 \dots k_r} \\ &= (\text{unter Beachtung der Definition des Tensorproduktes!}) \\ &= (a_{k_1 \dots k_r} e^{k_1} \otimes \dots \otimes e^{k_r})(u_1, \dots, u_r) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass (**) den Vektorraum $T_r(V)$ aufspannt.

(Verdeutlichen Sie sich noch einmal, was wir dazu genau gezeigt haben. Die obige Kette von Gleichungen diente dazu, zu zeigen, dass die Wirkung von α auf beliebige r-Tupel von Vektoren aus V gleich der Wirkung der Linearkombination $a_{k_1 \dots k_r} e^{k_1} \otimes \dots \otimes e^{k_r}$ auf diese r-Tupel ist.)

■

Sei $\alpha \in T_r^s(V)$, (e_i) eine Basis in V mit dualer Basis (e^k) in V^* . Dann heißt das System der n^{r+s} Zahlen

$$a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} := \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s})$$

die *Koordinaten* von α bezüglich der Basis (e_i) , d.h. man hat:

$$\alpha = a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}.$$

Beachten Sie: Obwohl man mit beliebigen (voneinander unabhängigen) Basen in V und V^* arbeiten könnte, setzt man immer stillschweigend voraus, dass man zueinander duale Basen nimmt.

Zusammenhang mit anderen Tensordefinitionen

Wir wollen jetzt den Zusammenhang mit anderen Tensordefinitionen herstellen. Zunächst muss unterstrichen werden, dass natürlich nicht jedes System von n^{r+s} Zahlen einen Tensor aus $T_r^s(V)$ definiert!! Wir untersuchen jetzt zunächst, wie sich die Tensorkoordinaten bei Koordinatentransformationen in V transformieren. Sei $(e_i), (e'_i)$ Basen in V und $(e^j), (e'^j)$ die zugehörigen dualen Basen in V^* . Die Transformationsformeln zwischen diesen Basen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} e_j &= a_j^i e'_i, & e'_j &= a_j^i e_i \\ e^k &= a_l^k e'^l, & e'^k &= a_l^k e^l. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei sind die Matrizen $(a_j^i), (a_l^k)$ invers zueinander und die zweite Zeile ergibt sich automatisch aus der ersten (nachprüfen!). Insbesondere erhält man also: $a_j^i \cdot a_k^j = \delta_k^i$ (das Kroneckersymbol oder - auch das wird oft benutzt - die Einheitsmatrix).

Für die zugehörigen Koordinaten der Vektoren aus V bzw. Funktionale aus V^* ergeben sich mithin folgende Transformationsformeln.

Wenn $x = x^i e_i = x'^j e'_j \in V, w = w_i e^i = w'_j e'^j \in V^*$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x^j &= a_i^j x'^i, & x'^j &= a_i^j x^i \\ w_j &= a_j^i w'_i, & w'_j &= a_j^i w_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Im Vorgriff auf Mannigfaltigkeiten / krummlinige Koordinaten kann man die Gleichungen (2) auch anders schreiben. Man bemerkt, dass

$$a_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \quad \alpha_j^i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}. \quad (3)$$

(Man beachte, dass man für das gesamte Transformationsgeschehen nur $\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$ und dazu die Inverse $\frac{\partial x'^k}{\partial x^l}$ benötigt. Die Koordinaten mit den unteren Indizes braucht man nicht, weil sie sich automatisch ergeben, vgl. die zweite Zeile in (2).)

Damit schreiben sich die oberen der Transformationsformeln (2) (auf den ersten Blick kompliziert) als

$$x^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} x'^i, \quad x'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} x^i \quad (2')$$

Damit kann man jetzt die Transformationsformeln für die Tensorkoordinaten leicht aufschreiben. Sei $\alpha \in T_r^s(V)$ mit:

$$\alpha = a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s} = a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} e'^{i_1} \otimes \dots \otimes e'^{i_r} \otimes e'_{j_1} \otimes \dots \otimes e'_{j_s}$$

Einsetzen der Formeln (1) liefert:

$$a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = a_{k_1}^{j_1} \dots a_{k_s}^{j_s} a_{i_1}^{l_1} \dots a_{i_r}^{l_r} a_{l_1 \dots l_r}^{k_1 \dots k_s} \quad (4)$$

Offensichtlich kann man sich solch eine Formel kaum merken. Ganz anders sieht es aus, wenn man (2') benutzt. Dann wird aus (4)

$$a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{k_s}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_r}}{\partial x^{i_r}} a_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_s} \quad (4')$$

An dieser Formel kann man ein wichtiges Prinzip des Indexkalküls erläutern. In solchen Gleichungen muss immer das Indexbild stimmen. Das bedeutet: die Summationsindizes sind - wie immer - frei wählbar. Dann aber müssen links und rechts die oberen/unteren, gestrichenen/ungestrichenen Indizes jeweils zueinander passen. Also in (4'): links stehen die j_m als gestrichene obere, die i_h als gestrichene untere Indizes - und so muss es auch rechts aussehen. Dann muss man noch bei Brüchen sagen, was obere und was untere Indizes sind: in $\frac{c_j^i}{d_k^l}$ sind i, l obere und j, k untere Indizes! Der Vorteil ist, dass dieser Kalkül "von allein" arbeitet - was den Nachteil hat, dass man sich nicht mehr darum kümmert, was eigentlich an Struktur dahintersteckt!

Fazit: Hat man einen Tensor $\alpha \in T_r^s(V)$, dann transformieren sich die Koordinaten bei Basiswechsel gemäß (4) bzw. (4'). Daher liest man in manchen Büchern auch solche Formulierungen wie: "Ein Tensor ist eine Zuordnung, die jeder Basis in V ein System von Zahlen a_{\dots} so zuordnet, dass sich diese Systeme bei Basiswechsel gemäß (4) oder (4') transformieren." - Na ja...

Im Zusammenhang mit Tensoren fallen auch häufig Begriffe wie "invariant", "unabhängig vom Koordinatensystem" usw. Das soll noch kurz erläutert werden. Direkt aus der Tensordefinition folgt, dass für $\alpha \in T_r^s$ und feste (aber beliebige) $u_1, \dots, u_r \in V, v^1, \dots, v^s \in V^*$ die Zahl $\alpha(u_1, \dots, v^s)$ vom Koordinatensystem unabhängig ist. In physikalischen Anwendungen haben solche Größen/Zahlen dann häufig auch eine direkte physikalische Bedeutung. Physiker "wissen" dann, dass diese Größe ein "echter Skalar" ist, d.h. nicht einfach eine Zahl, sondern in jedem Koordinatensystem dieselbe Zahl!

Einfache Beispiele für "offensichtliche Tensoren" sind die meisten vektoriellen Größen wie Geschwindigkeit, Drehimpuls usw., die eben auch tensorielle Größen in dem Sinne sind, dass sie Tensoren 1. Grades/1.Stufe sind. Ein nichttriviales Beispiel ist der sog. Trägheitstensor, der bei der Behandlung des starren Körpers auftritt (s.o.). Man beachte noch, dass hierbei - wie in vielen physikalischen Betrachtungen auch - nicht beliebige Koordinatentransformationen sondern nur orthogonale ins Auge gefasst werden und man sich automatisch in euklidischen Räumen befindet. Das ist der Grund, weshalb man - zumindest in der Mechanik - ganz selten zwischen oberen und unteren Indizes unterscheidet. Gerade beim Trägheitstensor schaue man sich die verschiedenen Definitionen an: die Koordinatendefinition und die koordinatenfreie Definition (die das Vektorprodukt benutzt s.o.).

12.2 Symmetrische und alternierende Tensoren

Bei den symmetrischen Tensoren beschränken wir uns im wesentlichen auf die Definition und konzentrieren uns dann auf die alternierenden Tensoren, da wir genau diese für die Differentialformen benötigen. Ferner beschränken wir uns auf die kovarianten Tensoren $T_r(V)$.

Wir führen das Symbol \mathbf{S}_r für die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, r\}$ (also einer Menge aus r Elementen) ein (Sie erinnern sich: \mathbf{S}_r enthält $r!$ Elemente!). Wenn $\pi \in \mathbf{S}_r$, dann bezeichne $\text{sgn } \pi$ das Vorzeichen der Permutation π . Wir führen jetzt noch folgende Operation auf den Tensoren $\alpha \in T_r(V)$ ein. Für $\pi \in \mathbf{S}_r$ sei α^π definiert durch

$$\alpha^\pi(u_1, \dots, u_r) := \alpha(u_{\pi^{-1}(1)}, \dots, u_{\pi^{-1}(r)}).$$

Definition 12.5 Ein Tensor $\alpha \in T_r(V)$ heißt:
symmetrisch vom Grad r , wenn für alle $\pi \in \mathbf{S}_r$ gilt: $\alpha^\pi = \alpha$;
alternierend vom Grad r (oder *r-Form*), wenn für alle $\pi \in \mathbf{S}_r$ gilt:

$$\alpha^\pi = (\text{sgn } \pi) \cdot \alpha.$$

Achtung: auch hier sind die Bezeichnungen und Definitionen nicht einheitlich! Die Definition von α^π unter Benutzung von π^{-1} wurde gewählt, damit man z.B. erhält: $(\alpha^{\pi_1})^{\pi_2} = \alpha^{\pi_1\pi_2}$ für alle $\pi_1, \pi_2 \in \mathbf{S}_r$.

Satz 12.6 Für einen Tensor $\alpha \in T_r(V)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- i) α ist alternierend;
- ii) $\alpha(v_1, \dots, v_r) = 0$, falls zwei Argumente übereinstimmen;
- iii) $\alpha(v_1, \dots, v_r) = 0$, falls die v_1, \dots, v_r linear abhängig sind.

Beweis: Übungsaufgabe!

Man überlege sich, welches Verhalten die Koordinaten eines alternierenden Tensors aufweisen.

Bezeichnung: Für die Menge der alternierenden Tensoren vom Grad r führt man gewöhnlich das Symbol $A_r(V)$ ein. Wir benutzen aber - aus Gründen, die in Kürze klar werden, gleich das Symbol: $\bigwedge^r V^*$ (r -faches äußeres oder Keilprodukt von V^*). Spezialfälle: $\bigwedge^0 V^* = \mathbb{R}$, $\bigwedge^1 V^* = V^*$.

Aus der Definition folgt: $\bigwedge^k V^* = \{0\}$ für $k > n = \dim V$. Die Dimension des Vektorraumes $\bigwedge^r V^*$ werden wir weiter unten bestimmen.

Das wichtigste Beispiel für alternierende Tensoren sind die Determinanten! Seien $f^1, \dots, f^r \in V^*$. Dann ist die Abbildung

$$(u_1, \dots, u_r) \rightarrow \det(f^i(u_j)), \quad u_j \in V$$

eine r -Form (es ist in gewissem Sinne der Prototyp einer r -Form).

Man kann aus einem gegebenen Tensor auf verschiedene Weise einen alternierenden Tensor erzeugen. Dazu betrachten wir die folgende lineare Abbildung (*Antisymmetrisierungs- oder Alternierungsabbildung*) $A : T_r(V) \rightarrow \bigwedge^r V^*$ definiert durch:

$$A\alpha := \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \mathbf{S}_r} \text{sign}(\pi) \alpha^\pi, \quad \alpha \in T_r(V).$$

d.h.

$$(A\alpha)(u_1, \dots, u_r) := \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \mathbf{S}_r} \text{sign}(\pi) \alpha(u_{\pi^{-1}(1)}, \dots, u_{\pi^{-1}(r)})$$

Achtung! Der Faktor $(1/r!)$ ist reine Konvention, die dann aber Auswirkungen auf viele weitere Formeln hat. Man muss in Büchern genau beachten, wie die jeweiligen Operationen definiert sind!

Beispiel: Sei $\alpha = f \otimes g$; $f, g \in V^*$. Dann ist $A\alpha = \frac{1}{2}(f \otimes g - g \otimes f)$.

Die Konvention über den Faktor garantiert z.B., dass die folgenden Formeln so einfach aussehen (und ohne zusätzliche Faktoren geschrieben werden müssen).

Lemma 12.7 i) A ist eine Projektion, d.h. $A^2 = A$ (d.h. wenn $\alpha \in \bigwedge^r V^*$, dann ist $A\alpha = \alpha$).

ii) Für $\alpha \in T_r(V), \beta \in T_s(V)$ gilt:

$$A(\alpha \otimes \beta) = A(\alpha \otimes A\beta) = A(A\alpha \otimes \beta) \quad (5)$$

Beweis: s. Literatur (z.B. Loomis; Sternberg: Advanced Calculus).

Als nächstes führen wir eine Multiplikation zwischen alternierenden Tensoren ein, die wieder alternierende Tensoren erzeugt.

Das äußere Produkt (Keilprodukt, Dachprodukt)

Wir definieren auf folgende Weise eine Abbildung:

$$\wedge : \quad \bigwedge^r V^* \times \bigwedge^s V^* \rightarrow \bigwedge^{r+s} V^*,$$

Wenn $\alpha \in \bigwedge^r V^*, \beta \in \bigwedge^s V^*$, dann sei

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(r+s)!}{r!s!} A(\alpha \otimes \beta) \quad (\wedge).$$

Beispiel: Seien $f, g \in V^*$, also $f = \alpha, g = \beta, r = s = 1$.

$$f \wedge g = \frac{2!}{1!1!} A(f \otimes g) = \frac{2!}{1!1!} \cdot \frac{1}{2!} (f \otimes g - g \otimes f).$$

Damit hat man:

$$(f \wedge g)(u, v) = \begin{vmatrix} f(u) & f(v) \\ g(u) & g(v) \end{vmatrix}.$$

Wir sehen gleich weiter unten nochmals, auf welche Weise Determinanten und alternierende Tensoren zusammenhängen (in Heuser: Analysis 2 werden Determinanten direkt zur Definition benutzt.)

Eigenschaften des äußeren Produkts

i) \wedge ist eine bilineare Operation, d.h. $(c\alpha_1 + d\alpha_2) \wedge \beta = c(\alpha_1 \wedge \beta) + d(\alpha_2 \wedge \beta)$ und analog im zweiten Faktor.

ii) Das Keilprodukt ist in folgendem Sinne nichtkommutativ (manchmal auch antikommutativ genannt):

Für $\alpha \in \bigwedge^r V^*, \beta \in \bigwedge^s V^*$ gilt:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha.$$

iii) \wedge ist assoziativ: für $\alpha \in \bigwedge^r V^*, \beta \in \bigwedge^s V^*, \gamma \in \bigwedge^t V^*$ gilt:

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} A(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma).$$

Ganz allgemein gilt (mittels Induktion zu zeigen): wenn

$$\alpha^i \in \bigwedge^{r_i} (V^*), i = 1, \dots, k; \quad r_1 + \dots + r_k = r,$$

dann ist

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = \frac{r!}{r_1!r_2! \dots r_k!} A(\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^k)$$

Alle diese Eigenschaften sind (mitunter etwas technisch) aus der Definition und mittels Lemma 12.7 nachprüfbar.

Folgerungen

i) Seien $f, g \in V^*$, dann ist $f \wedge g = -g \wedge f$. Insbesondere ist $f \wedge f = 0$ für alle $f \in V^*$.

ii) Wenn $f^i \in V^*$, $1 \leq i \leq r$, $u_i \in V$, dann ist

$$(f^1 \wedge \dots \wedge f^r)(u_1, \dots, u_r) = \begin{vmatrix} f^1(u_1) & \dots & f^1(u_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ f^r(u_1) & \dots & f^r(u_r) \end{vmatrix}.$$

iii) Sei $\alpha \in \bigwedge^r V^*$, $v_i = v_i^j e_j \in V$, $1 \leq i \leq r$. Dann gilt (zunächst wegen der Multilinearität):

$$\alpha(v_1, \dots, v_r) = \alpha(v_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, v_r^{j_r} e_{j_r}) = v_1^{j_1} \dots v_r^{j_r} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}).$$

(Es ist vielleicht wieder einmal angebracht, auf die Summenkonvention hinzuweisen. In obiger Formel stehen r Summenzeichen, die Summation erfolgt jeweils von 1 bis n.)

Man sieht, dass α eindeutig durch die Werte $\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ bestimmt ist. Da aber $\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ auch eindeutig alle Werte bestimmt, die durch Permutation der e_{j_k} entstehen, benötigt man nur die Kenntnis von

$$\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \text{ für alle } r\text{-Tupel } (j_1, \dots, j_r), 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n.$$

Satz 12.8 Sei (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V mit der dualen Basis (e^1, \dots, e^n) von V^* . Dann ist

$$\{e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n\} \quad (6)$$

eine Basis für $\bigwedge^r V^*$. Mithin gilt: $\dim \bigwedge^r V^* = \binom{n}{r}$.

Beweis: Zunächst hat man für $\alpha \in \bigwedge^r V^* (\subset T_r(V))$ nach Satz 12.4:

$$\alpha = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}.$$

Summation über **alle** r-Tupel (j_1, \dots, j_r) von 1 bis n. Anwendung der Alternierung A und Ausnutzung der Linearität liefert:

$$\alpha = A\alpha = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) A(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}) = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \cdot \frac{1}{r!} \cdot e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}.$$

(hier wurde Eigenschaft iii) des äußeren Produkts benutzt).

Aus der Antisymmetrie von α folgt, dass $\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 0$, wenn die j_1, \dots, j_r nicht voneinander verschieden sind. Weiter gilt: wenn sie voneinander verschieden sind und $\pi \in \mathbf{S}_r$, dann gilt:

$$\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} = \alpha(e_{\pi(j_1)}, \dots, e_{\pi(j_r)}) e^{\pi(j_1)} \wedge \dots \wedge e^{\pi(j_r)}.$$

(Man beachte: auf der rechten Seite müsste eigentlich noch $(\text{sign } \pi)^2 (= 1)$ stehen). Es gibt aber genau $r!$ solcher Permutationen. Damit hat man:

$$\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_r} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}.$$

Mithin spannt die Menge (6) tatsächlich $\bigwedge^r V^*$ auf. Es bleibt zu zeigen, dass die Menge (6) linear unabhängig ist. Sei also

$$\sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} = 0.$$

Für festes (beliebiges) j'_1, \dots, j'_r sei l'_{r+1}, \dots, l'_n die komplementäre Indexmenge zu $j'_1 < \dots < j'_r$ mit $l'_{r+1} < \dots < l'_n$. Dann gilt natürlich auch:

$$\sum_{j_1 < \dots < j_r} c_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} \wedge e^{l'_{r+1}} \wedge \dots \wedge e^{l'_n} = 0.$$

Diese Summe reduziert sich aber auf:

$$c_{j'_1 \dots j'_r} e^1 \wedge \dots \wedge e^n = 0.$$

Da aber natürlich $e^1 \wedge \dots \wedge e^n \neq 0$, ist $c_{j'_1 \dots j'_r} = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der Menge (6) gezeigt. ■

Bezeichnung:

Wenn $\alpha \in \bigwedge^r V^*$, dann nennt man

$$\alpha = \sum_{j_1 < \dots < j_r} a_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r}$$

die *Standarddarstellung* von α (bezüglich der gegebenen Basis).

Jetzt versteht man auch, warum die Bezeichnung für die Menge der alternierenden Tensoren vom Grad r so wie bei uns gewählt wurde. Aus (6) sieht man, dass die alternierenden Tensoren gut durch $V^* \wedge \dots \wedge V^*$ (r Terme) zu bezeichnen sind. Abgekürzt wird das durch $\bigwedge^r V^*$.

Beispiel:

Um das äußere Produkt von Formen zu bestimmen, benutzt man i.a. nicht (die viel zu umständliche) Gleichung (\wedge). Man benutzt einfach die Eigenschaften von \wedge . Sei also etwa: $n = 5$, $\alpha = 2e^1 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 + 4e^3 \wedge e^4$, $\beta = 3e^1 + 4e^5$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (2e^1 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 + 4e^3 \wedge e^4) \wedge (3e^1 + 4e^5) \\ &= 2e^1 \wedge e^2 \wedge 3e^1 + 2e^1 \wedge e^2 \wedge 4e^5 + e^1 \wedge e^3 \wedge 3e^1 + e^1 \wedge e^3 \wedge 4e^5 \\ &\quad + 4e^3 \wedge e^4 \wedge 3e^1 + 4e^3 \wedge e^4 \wedge 4e^5 = \\ &= 0 + 8e^1 \wedge e^2 \wedge e^5 + 0 + 4e^1 \wedge e^3 \wedge e^5 + 12e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 + 16e^3 \wedge e^4 \wedge e^5. \end{aligned}$$

In der nächsten Definition wird ein wichtiger Begriff definiert (der an vielen Stellen in der Mathematik vorkommt).

Definition 12.9 (pull-back; Rücktransport) Seien V, W Vektorräume, $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann induziert φ eine lineare Abbildung

$$\varphi^* : T_r(W) \rightarrow T_r(V) \text{ für alle } r$$

gemäß

$$(\varphi^* \alpha)(u_1, \dots, u_r) := \alpha(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_r)), \quad \alpha \in T_r(W), u_1, \dots, u_r \in V.$$

Die r -Form $\varphi^* \alpha$ heißt pull-back (Rücktransport) von α (bezüglich φ).

Man hat also:

$$V \xrightarrow{\varphi} W \implies T_r(W) \xrightarrow{\varphi^*} T_r(V) \quad \forall r.$$

Eigenschaften des pull-back:

- i) $\varphi^* : \bigwedge^r W^* \rightarrow \bigwedge^r V^*$;
- ii) $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ für $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} X$.
- iii) $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$ für $\alpha \in \bigwedge^r W^*, \beta \in \bigwedge^s W^*$.

Beweis: ÜA.

12.3 Differentialformen

Unser Ziel besteht darin, Differentialformen über Mannigfaltigkeiten zu integrieren. Wie wir wissen, sind die grundlegenden linearen Objekte, die einer Mannigfaltigkeit M zugeordnet sind, die Tangentialräume $T_p M, p \in M$ (und damit sind auch automatisch die Dualräume $(T_p M)^* \equiv T_p^* M$ gegeben). Diese beiden Räume werden dann die Rolle von V und V^* übernehmen.

Wir beginnen aber zunächst mit der Definition von Differentialformen in offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ (man beachte hierbei: wenn $p \in U$, dann ist $T_p U \cong \mathbb{R}^n \cong T_p^* U$). Die natürliche Basis in \mathbb{R}^n sei (e_i) .

Definition 12.10 i) Ein *Vektorfeld* \mathbf{v} in U ist eine Abbildung $\mathbf{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (genauer: $p \mapsto \mathbf{v}(p) \in \mathbb{R}^n \cong T_p U$).

ii) Ein *Tensorfeld* (s-fach kontravariant, r-fach kovariant) in U ist eine Abbildung $\alpha : U \rightarrow T_r^s(\mathbb{R}^n)$ (genauer: $p \mapsto \alpha(p) \in T_r^s(T_p U) \cong T_r^s(\mathbb{R}^n)$).

iii) Eine *Differentialform vom Grad r* ist eine Abbildung $\omega : U \rightarrow \bigwedge^r(\mathbb{R}^{n*})$ (genauer: $p \mapsto \omega(p) \in \bigwedge^r(T_p^* U) \cong \bigwedge^r(\mathbb{R}^{n*})$).

Grob gesprochen: für jedes $p \in U$ ist $\omega(p)$ eine r-Form.

Bezeichnung: Die Menge aller Differentialformen vom Grade r in U bezeichnen wir mit $\Omega^r(U)$. (Manchmal werden wir auch Differentialformen vom Grad r einfach als r-Formen bezeichnen).

Man sagt, $\omega \in \Omega^r(U)$ ist k-mal stetig differenzierbar ($\omega \in C^k(U)$), wenn die Abbildung $p \mapsto \omega(p)(v_1, \dots, v_r)$ k-mal stetig differenzierbar (als Abbildung von $U \rightarrow \mathbb{R}$ also) für jedes (feste) r-Tupel (v_1, \dots, v_r) von Vektoren aus \mathbb{R}^n .

Tensorfelder bzw. Differentialformen vom Grade Null sind einfach reelle Funktionen in U . Im folgenden behandeln wir nur noch Differentialformen

Koordinatendarstellung von Differentialformen

Seien x^1, \dots, x^n die kanonischen Koordinatenfunktionen in U (oder auch in ganz \mathbb{R}^n), d.h. $x^i(p^1, \dots, p^n) = p^i$. Ferner seien dx^i die zugehörigen (Koordinaten-)Differenziale, d.h. $dx^i(p) = dx^i$ für alle $p \in U$ mit: $dx^i(h) = h^i$ für alle Vektoren $h \in \mathbb{R}^n$. Mit anderen Worten: Die dx^i sind gerade die duale Basis (e^i) zur kanonischen Basis (e_i) in \mathbb{R}^n . Das bedeutet also: (dx^i) ist eine Basis für $T_p^* U \cong \mathbb{R}^{n*}$. Unter Benutzung von Satz 12.7 gilt:

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\} \quad (7)$$

ist eine Basis für $\bigwedge^r \mathbb{R}^{n*}$.

Mithin hat jedes $\omega \in \Omega^r(U)$ die Standarddarstellung

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (8)$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $f_{i_1 \dots i_r} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn alle $f_{\dots} \in C^k(U)$, dann ist auch $\omega \in C^k(U)$.

Bemerkung: Wir werden Differentialformen nicht notwendigerweise immer in Standarddarstellung angeben.

Beispiel für das Rechnen mit Koordinatendifferentialen:

Sei $n = 2$, $u = (u^1, u^2)^T, v = (v^1, v^2)^T \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$(dx^1 \wedge dx^2)(u, v) = \begin{vmatrix} dx^1(u) & dx^1(v) \\ dx^2(u) & dx^2(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix}$$

und das ist gerade der Inhalt des von u, v aufgespannten Parallelogramms (eine analoge Interpretation für größere n).

Algebraische Rechenregeln für Differentialformen

Alle algebraischen Rechenoperationen werden punktweise definiert.

- i) Seien $\omega, \sigma \in \Omega^r(U), f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist
 $(\omega + \sigma)(p) = \omega(p) + \sigma(p), (f \cdot \omega)(p) = f(p) \cdot \omega(p)$ für alle $p \in U$.
- ii) Für $\omega \in \Omega^r(U), \sigma \in \Omega^s(U)$ ist $\omega \wedge \sigma \in \Omega^{r+s}(U)$ definiert durch

$$(\omega \wedge \sigma)(p) = \omega(p) \wedge \sigma(p).$$

Speziell ist für in U definierte Funktionen f :

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f = f \cdot \omega.$$

Wir werden laufend die folgenden Rechenregeln benutzen (vgl. die Eigenschaften des äußeren Produktes):

$$dx^i \wedge dx^j = - dx^j \wedge dx^i, \quad dx^i \wedge dx^i = 0$$

Als nächstes definieren wir einen außerordentlich wichtigen Ableitungsbegriff für Differentialformen:

Die äußere Ableitung (Cartansche Ableitung)

Definition 12.11

- i) Die äußere Ableitung einer 0-Form $f (\in C^k(U), k \geq 1)$ ist die 1-Form

$$df := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

(Das ist also das übliche Differential der Funktion f .)

ii) Sei $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^r(U)$.

Dann ist die äußere Ableitung $d\omega \in \Omega^{r+1}(U)$ definiert durch

$$d\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_r} df_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Hierbei ist df_{\dots} in i) definiert. Die oben definierte $(r+1)$ -Form $d\omega$ ist noch nicht in Standarddarstellung gegeben.

Wir geben jetzt drei Standardbeispiele an. Dabei seien der Einfachheit halber alle Differentialformen in ganz \mathbb{R}^n für das entsprechende n definiert und differenzierbar.

Bemerkungen 12.12 (Standardbeispiele)

Beispiel 1

Es sei $n = 2$, $\omega = Pdx + Qdy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &\quad \text{(Grüße von Gauß im } \mathbb{R}^2\text{!)} \end{aligned}$$

Beispiel 2

Sei $\omega = f_i dx^i$. Dann ist (ÜA!)

$$d\omega = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j.$$

Speziell für $n = 3$ und $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ erhält man:

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

(Stokes lässt grüßen!)

Betrachtet man das Vektorfeld $\mathbf{v} := (P, Q, R)^T$, dann sind die Koeffizienten in obigem $d\omega$ gerade die Koordinaten von $\text{rot } \mathbf{v}$!

Beispiel 3

Sei $n = 3$, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. Dann gilt (ÜA!):

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

(Grüße von Gauß im } \mathbb{R}^3\text{)}

Betrachtet man wieder das Vektorfeld $\mathbf{v} = (P, Q, R)^T$, dann steht als Koeffizient in $d\omega$ gerade $\text{div } \mathbf{v}$!

Beachten Sie, dass in manchen Fällen die Formen nicht in der Standarddarstellung aufgeschrieben sind (weil man dann geeignete Interpretationen besser sieht!)

Der nächste Satz fasst wichtige Eigenschaften und Rechenregeln für die äußere Ableitung zusammen.

Satz 12.13

i) $d : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^{r+1}(U)$ ist eine lineare Abbildung:

$$d(\lambda\omega + \mu\sigma) = \lambda \cdot d\omega + \mu \cdot d\sigma \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \omega, \sigma \in \Omega^r(U).$$

(Manchmal wird zur Kennzeichnung des Definitionsbereiches von d genauer geschrieben: d_r .)

ii) Für $\omega \in \Omega^r(U), \sigma \in \Omega^s(U)$ gilt:

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge d\sigma.$$

(Das ist also eine Art Produktregel.)

iii) (erster Teil des Lemmas von Poincaré): Für alle $\omega \in \Omega^r(U)$ gilt

$$d(d\omega) = 0, \quad \text{d.h. grob gesprochen: } d^2 \equiv d \circ d = 0.$$

(Genauer würde man schreiben: $d_{r+1} \circ d_r = 0$, und diese "0" ist die Differentialform Null vom Grade $(r+2)$, d.h. die Differentialform, die in jedem Punkt $p \in U$ die $(r+2)$ -Form Null ergibt. Diese $(r+2)$ -Form bildet also alle $(r+2)$ -Tupel von Vektoren auf die Zahl Null ab. Durchdenken Sie das genau!)

Beweis: Überall ist natürlich vorausgesetzt, dass die Differentialformen so oft differenzierbar sind, wie es für die Eigenschaften mindestens nötig ist.

i) Das ist trivial und folgt direkt aus der Definition.

Für den Beweis von ii) und iii) machen wir eine Konvention über eine sehr effektive Schreibweise (vergleiche etwa Browder):

Statt $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ schreiben wir:

$$\omega = \sum_{|I|=r} f_I dx^I \quad \text{mit} \quad dx^I := dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r},$$

wobei $I = (i_1, \dots, i_r), 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ alle strikt aufsteigenden Multiindizes der Länge $|I| = r$ durchläuft.

ii) Wir behandeln zuerst den Fall $r = s = 0$, d.h. $f, g \in C^1(U)$. Da

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x^i} g + f \frac{\partial g}{\partial x^i},$$

erhält man

$$d(f \cdot g) \equiv d(f \wedge g) = df \cdot g + f \cdot dg = df \wedge g + f \wedge dg \tag{9}$$

Sei nun allgemein: $\omega = \sum_{|I|=r} f_I dx^I, \sigma = \sum_{|J|=s} g_J dx^J$. Dann erhält man:

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{|I|=r, |J|=s} f_I g_J dx^I \wedge dx^J =: \sum_{I, J} f_I g_J dx^I \wedge dx^J.$$

Unter Benutzung der Eigenschaft iii) auf S. 28 und der Linearität von d folgt:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= \sum_{I,J} (g_J df_I + f_I dg_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{I,J} g_J df_I \wedge dx^I \wedge dx^J + (-1)^r f_I dx^I \wedge dg_J \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge d\sigma \end{aligned}$$

Der Faktor $(-1)^r$ entsteht durch r -maliges Vertauschen von jedem dx^i aus dg_J mit $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ aus dx^I . Damit ist ii) gezeigt.

iii) Der Beweis ist eine schöne Anwendung des Satzes von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Sei zuerst wieder $r = 0, f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Also: $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Nimmt man nun in den Standardbeispielen (12.11) in Beispiel 2 statt der dortigen f_i jetzt $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, dann erhält man:

$$d(df) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j = 0.$$

Sei nun allgemein

$$\omega = \sum_{|I|=r} f_I dx^I, \quad \text{also} \quad d\omega = \sum_{|I|=r} df_I \wedge dx^I,$$

dann erhält man mit ii):

$$d(d\omega) = \sum_{\|I\|=r} (d(df_I) \wedge dx^I - df_I \wedge d(dx^I)) = 0.$$

Dabei ist wegen des oben betrachteten Falles $r = 0$ der erste Summand Null, weil $d(df_I) = 0$. Das „-“ ist $(-1)^1$, da df_I eine 1-Form.

Außerdem gilt: $d(dx^I) = d(1 \cdot dx^I) = d(1) \wedge dx^I = 0$, womit der zweite Summand verschwindet. ■

Wir führen noch folgende Begriffe ein:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

i) Eine stetig differenzierbare k -Form ω in U heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$.

ii) Für $k \geq 1$ heißt eine stetige k -Form ω in U *exakt* (oder *total*), wenn es eine stetig differenzierbare $(k-1)$ -Form σ in U gibt mit $d\sigma = \omega$.

Damit lautet die Aussage ii) des obigen Satzes: ω exakt $\implies \omega$ geschlossen.

Das Lemma von Poincaré macht nun Aussagen über die Umkehrung. Diese hängt von der Topologie / Geometrie des Gebietes U ab. Die Umkehrung gilt generell für einfach zusammenhängende U . Ähnlich wie bei der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen formulieren wir das Lemma aber für sternförmige U .

Lemma von Poincaré :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, ω eine stetig differenzierbare k -Form ($k \geq 1$) in U . Dann gilt:

$$\omega \text{ geschlossen} \quad \iff \quad \omega \text{ exakt} .$$

Den Zusammenhang mit Kurvenintegralen werden wir in den Übungen behandeln.

Pull-back (Rücktransport) von Differentialformen

Sei $\varphi : V \subset \mathbb{R}_t^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}_x^n$ eine glatte Abbildung zwischen den offenen Mengen V, U . (Wir deuten mit den unteren Indizes in \mathbb{R}_t an, wie die Variablen bezeichnet werden sollen.) Man hat also: $\varphi(t) = (\varphi^1(t^1, \dots, t^m), \dots, \varphi^n(t^1, \dots, t^m))^T$ (Spaltenschreibweise der Vektoren).

Dieses φ induziert eine Abbildung $\varphi^* : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^r(V)$, (vgl. mit Definition 12.8). Im einfachsten Fall: $r = 0$ hat man: $f \in \Omega^0(U) \Rightarrow \varphi^* f = f \circ \varphi \in \Omega^0(V)$, d.h. $(\varphi^* f)(t) := f(\varphi(t))$. Das ist uns schon früher begegnet. Allgemein lautet die Definition so:

Definition 12.14 Seien U, V, φ wie oben, $\omega \in \Omega^r(U)$. Dann heißt $\varphi^* \omega$ gegeben durch

$$(\varphi^* \omega)(t)(v_1, \dots, v_r) := \omega(\varphi(t))(\varphi'(t)v_1, \dots, \varphi'(t)v_r) \quad (10)$$

der pull-back (Rücktransport) von ω unter φ .

Übungsaufgabe: Man zeige, dass folgendes gilt. Wenn

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^r(U),$$

dann ergibt sich

$$\varphi^* \omega := \sum_{i_1 < \dots < i_r} (f_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi) d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_r} \quad (11)$$

Man errechnet $\varphi^* \omega$ also, indem man in (11) einsetzt: $d\varphi^{i_k} = \frac{\partial \varphi^{i_k}}{\partial t^j} dt^j$ und dann die Rechenregeln für das äußere Produkt anwendet.

Beispiel

Wir demonstrieren das in einem ganz einfachen Fall. Sei $r = 1$, $\omega = f_j dx^j$ (beachte, dass man bei der Summenkonvention immer wissen muss, wie weit die Summation geht, hier also von 1 bis n). Wir berechnen $\varphi^* \omega$ und insbesondere die Wirkung auf einen Vektor $v \in \mathbb{R}^m$:

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) d\varphi^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} dt^j.$$

Sei nun $v = (v^1, \dots, v^m)^T \in \mathbb{R}^m$ und $\varphi' = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} \right)$, mit $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ die zugehörige Ableitung. Dann ist:

$$\begin{aligned} ((\varphi^* \omega)(t))(v) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_i(\varphi(t)) \frac{\partial \varphi^i(t)}{\partial t^j} dt^j(v) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(\varphi(t)) \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi^i(t)}{\partial t^j} v^j \right) = \sum_{i=1}^n f_i(\varphi(t)) (\varphi'(t)v)^i \\ &= \omega(\varphi(t))(\varphi'(t)v) \end{aligned} \quad (12)$$

Die Struktur und Logik der Gleichung (12) ist also: $(\varphi^*\omega)(t)(v) =$ alte Form ω ,
genommen am Bildpunkt $\varphi(t)$ und angewendet auf den Bildvektor $\varphi'(t)v$.
Und so ist auch die Interpretation bei Formen höherer Ordnung.

Satz 12.15 (Eigenschaften von φ^*)

Seien U, V, φ wie oben, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^r(U), \sigma \in \Omega^s(U), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- i) φ^* ist linear: $\varphi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda\varphi^*\omega_1 + \mu\varphi^*\omega_2$;
- ii) φ^* ist multiplikativ: $\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\sigma$;
- iii) φ^* und die äußere Ableitung d vertauschen: $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$;
- iv) Wenn $W \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\psi : W \rightarrow V$ stetig diffbar, dann ist

$$(\varphi \circ \psi)^*\omega = (\psi^* \circ \varphi^*)\omega = \psi^*(\varphi^*\omega)$$

Beweis: Wir zeigen nur iii). Sei zuerst $r = 0$, d.h. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ergibt sich mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} d(\varphi^*f) &= d(f \circ \varphi) = df(\varphi^1(t^1, \dots, t^m), \dots, \varphi^n(t^1, \dots, t^m)) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t^j} dt^j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} dt^j \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi \right) d\varphi^i = \varphi^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) = \varphi^*(df) \end{aligned}$$

Nun behandeln wir den allgemeinen Fall:

Sei $\omega = \sum_I f_I dx^I$. Dann ist $\varphi^*\omega = \sum_I (f_I \circ \varphi) d\varphi^I$. Andererseits erhält man mittels des eben betrachteten Spezialfalls:

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\omega) &= \sum_I d(f_I \circ \varphi) \wedge d\varphi^I = \sum_I \varphi^*(df_I) \wedge d\varphi^I = \sum_I \varphi^*(df_I) \wedge \varphi^*(dx^I) \\ &= (\text{unter Benutzung von ii)}) = \varphi^* \left(\sum df_I \wedge dx^I \right) = \varphi^*(d\omega) \end{aligned}$$

■

12.4 Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Unser Ziel besteht darin, k -Formen auf k -dimensionalen UM zu integrieren. Das wird dadurch geschehen, dass man mittels Parameterdarstellung die Form von der Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^k zurücktransformiert und dann den pull-back integriert. Daher erscheint es logisch, zuerst die Integration von k -Formen im \mathbb{R}^k zu erklären.

Definition 12.16 Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ eine k -Form in U . Dann heißt ω über $A \subset U$ integrierbar, wenn $f|_A (= f \circ \chi_A)$ integrierbar ist. In diesem Fall setzt man:

$$\int_A \omega := \int_A f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \equiv \int_A f(x) dx \quad (13)$$

Bei der Integration von Differentialformen spielt die Orientierung eine Rolle. Dazu zunächst:

Lemma 12.17 Seien $U, V \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus, ω eine stetige k -Form auf V und $A \subset U$ kompakt. Dann gilt:

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega \quad \text{falls } \varphi \text{ orientierungserhaltend, d.h. } \det \varphi' > 0 \text{ in } U$$

$$\int_{\varphi(A)} \omega = - \int_A \varphi^* \omega \quad \text{falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend, d.h. } \det \varphi' < 0 \text{ in } U$$

Beweis: Wenn $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$, dann ist (vgl. auch ÜA):

$$\varphi^* \omega = (f \circ \varphi) d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^k = (f \circ \varphi) \cdot \det \varphi' \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k.$$

Also ergibt sich unter Berücksichtigung der Transformationsformel für Mehrfachintegrale:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(A)} \omega &= \int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx \\ &= \int_A \varphi^* \omega \text{ falls } \det \varphi' > 0 \\ &= - \int_A \varphi^* \omega \text{ falls } \det \varphi' < 0 \end{aligned}$$

■

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale UM. Eine r -Form auf M ist eine Abbildung $\omega : x \in M \mapsto \omega(x) \in \bigwedge^r T_x^* M$.

Der einfachste Standpunkt ist vielleicht der folgende:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ und ω eine r -Form in U . Dann wird ω auf M eingeschränkt. Das bedeutet folgendes:

wenn $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} f_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, ($1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$) gegeben, f in U definiert, dann wird nur $f(p), p \in M$ betrachtet. Ferner ist $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ zwar für alle r -Tupel von Vektoren aus dem \mathbb{R}^n erklärt, wir betrachten aber nur r -Tupel von Vektoren aus $T_p M (\cong \mathbb{R}^k) \subset T_p U (\cong \mathbb{R}^n)$

Damit ist klar, dass es auf einer k -dimensionalen UM höchstens Formen bis zum Grade k gibt (die von höherem Grade sind dann alle Null). Bezeichnung für die Differentialformen auf M vom Grad r : $\Omega^r(M)$.

Als nächstes wollen wir definieren: $\int_A \omega$, wobei $\omega \in \Omega^k(M)$, M eine orientierte k -dimensionale UM des \mathbb{R}^n , $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge. Die Definition geschieht (in Analogie zu Abschnitt 11.3, 11.4) in zwei Schritten.

1. Schritt:

Angenommen, es existiert eine positiv orientierte lokale Parameterdarstellung:

$$\Phi : T \rightarrow \Phi(T) \subset M \text{ mit } A \subset \Phi(T)$$

(kurz: A liegt in einem Kartengebiet). Dann setzt man:

$$\int_A \omega := \int_{\Phi^{-1}(A)} \Phi^* \omega. \quad (14)$$

Diese Definition ist wieder von der Parameterdarstellung unabhängig, d.h.

wenn $\Phi_1 : T_1 \rightarrow \Phi_1(T_1) \subset M, A \subset \Phi_1(T_1)$ eine weitere positiv orientierte Parameterdarstellung, dann gilt:

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} \Phi^* \omega = \int_{\Phi_1^{-1}(A)} \Phi_1^* \omega.$$

Das zeigt man unter Benutzung des Kartenwechsels genau wie Satz 11.16. unter Berücksichtigung der Eigenschaften des pull-back.

2.Schritt

Wenn A nicht in einem Kartengebiet enthalten ist, dann benutzt man wieder Zerlegung der Eins.

12.5 Der allgemeine Stokes'sche Integralsatz

Um den allgemeinen Stokes'schen Integralsatz formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der *Mannigfaltigkeit mit Rand* (oder: *berandete Mannigfaltigkeit*). Hierbei ist es wichtig den Begriff des topologischen Randes einer Menge vom Rand einer Mannigfaltigkeit zu unterscheiden. Ein paar Beispiele mögen das verdeutlichen, bevor wir die genaue Definition geben.

1. Eine abgeschlossene Kreisscheibe K in der Ebene ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei der Rand die Kreislinie ist. Dieser Rand ist sowohl der Rand im topologischen wie im Mannigfaltigkeitssinn!
2. Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit *ohne Rand*. Im topologischen Sinne hat U natürlich einen Rand!
3. Betrachte einen Zylinder Z ohne oberen und unteren Deckel (also: eine Konservendose, wo der ober und untere Deckel abgeschnitten ist). Als Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 sind die obere und untere Deckelkreislinie der Rand der Mannigfaltigkeit. Der topologische Rand fällt aber (natürlich!) mit Z zusammen!

Um Mannigfaltigkeiten mit Rand zu definieren und die Randpunkte zu charakterisieren, verwendet man 2 Typen von Karten/ Parameterdarstellungen. Dazu benötigen wir ein paar Bezeichnungen und Begriffe. Sei

$$\mathbb{R}_-^k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$$

$$\partial\mathbb{R}_-^k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_-^k : x_1 = 0\}$$

(Im Falle $k = 2$ ist also \mathbb{R}_-^2 die linke Halbebene und $\partial\mathbb{R}_-^2$ die y -Achse.) Jetzt definieren wir die in \mathbb{R}_-^k offenen Teilmengen als die relativ offenen Mengen, wenn man \mathbb{R}_-^k als Teilmenge von \mathbb{R}^k betrachtet. Das bedeutet Folgendes.

Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}_-^k$ heißt *offen bezüglich \mathbb{R}_-^k* , wenn es ein in \mathbb{R}^k offenes T' gibt mit: $T = T' \cap \mathbb{R}_-^k$.

Mithin existieren in \mathbb{R}_-^k zwei Typen von offenen Mengen: solche, deren Durchschnitt mit $\partial\mathbb{R}_-^k$ leer ist (das sind die üblichen offenen Mengen) und solche, die mit $\partial\mathbb{R}_-^k$ einen nichtleeren Durchschnitt haben.

Definition 12.18 $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ eine lokale Parameterdarstellung (bzw. Karte):

$$\Phi : T \rightarrow W = \Phi(T) \subset M, p \in \Phi(T), \quad T \text{ offen in } \mathbb{R}_-^k$$

gibt. Der Punkt p heißt Randpunkt der Mannigfaltigkeit, wenn $p = \Phi(t), t \in T \cap \partial\mathbb{R}_-^k$, d.h. $t = (0, t^2, \dots, t^k)$. Die Menge aller Randpunkte wird mit ∂M bezeichnet (in der Hoffnung, dass es keine Verwechslung mit dem topologischen Rand gibt). Parameterdarstellungen mit $T \cap \partial\mathbb{R}_-^k \neq \emptyset$ (bzw. die dazugehörigen Karten (W, Φ^{-1})) werden auch *randadaptiert* genannt.

Bemerkungen:

- i) Da wir immer hinreichende Differenzierbarkeit der Φ voraussetzen, muss noch gesagt werden, was das im Falle der randadaptierten Parameterdarstellungen bedeuten soll. Dann sei Φ einfach in T' hinreichend oft diffbar.
- ii) Manchmal wird auch eine Mannigfaltigkeit gleich im Sinne der Definition 12.17 definiert. Dann kann es also passieren, dass der Rand leer ist.
- iii) Im Falle der Kompakta mit glattem Rand (vgl. Satz von Gauß) fällt der topologische mit dem Mannigfaltigkeitsrand zusammen!

Den nächsten Satz geben wir ohne detaillierten Beweis an.

Satz 12.19 Sei M eine berandete Mannigfaltigkeit der Dimension k . Dann gilt:
i) ∂M ist eine $(k - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.
ii) Wenn M orientierbar, dann auch ∂M .

Wir kommentieren den Satz und die Beweisidee etwas.

Wenn $p \in \partial M$ und (Φ, T) eine lokale Parameterdarstellung um p , dann sei $\hat{T} := \{u \in \mathbb{R}^{k-1} : (0, u) \in T\}$ und $\hat{\Phi}(u) := \Phi(0, u)$. Dann ist \hat{T} eine offene Teilmenge in \mathbb{R}^{k-1} , und man überzeugt sich leicht, dass $(\hat{\Phi}, \hat{T})$ eine lokale Parameterdarstellung um $p \in \partial M$. (randadaptierte Parameterdarstellungen für $p \in \partial M$ als $(k - 1)$ -dimensionale UM gibt es dann also nicht!).

Was die Orientierbarkeit von ∂M betrifft, so gibt es verschiedene Zugänge (ein direkter Beweis unter Benutzung der $(\hat{\Phi}, \hat{T})$ ist im Buch von Browder enthalten; man beachte, dass dort andere Bezeichnungen benutzt werden). Unsere Bezeichnungen sind mehr dem Buch von Forster (Analysis 3) angelehnt. Man vergleiche den dortigen Beweis etwa S. 267 ff.)

Argumentiert man mehr anschaulich, dann erfolgt die Orientierung des Randes (als sog. *induzierte Orientierung von M*) wie folgt. Sei $p \in \partial M$, (Φ, T) eine randadaptierte Parameterdarstellung. Den Vektor $v := \Phi'(p)(e_1) \in T_p M$ nennen wir *nach außen zeigend*. Dann sei eine Basis (w_1, \dots, w_{k-1}) von $T_p(\partial M)$ genau dann positiv orientiert, wenn (v, w_1, \dots, w_{k-1}) in $T_p M$ positiv orientiert ist.

Betrachtet man etwa wieder eine abgeschlossene Kreisscheibe $K \subset \mathbb{R}^2$ und orientiert den Rand im mathematisch positiven Sinne, dann ist das gerade die induzierte (positive) Orientierung aus dem \mathbb{R}^2 . Betrachtet man nämlich den nach außen zeigenden Normalenvektor n an den Rand (das entspricht dem v), dann erhält man die positive Orientierung in $T_p(\partial K)$ durch den Tangentialvektor t und das Paar (n, t) liefert in der Tat die positive Orientierung des \mathbb{R}^2 .

Wir behandeln gleich den Spezialfall $M = \mathbb{R}_-^k, \partial M = \partial \mathbb{R}_-^k$. Der Rand $\partial \mathbb{R}_-^k$ ist die durch $\{x : x^1 = 0\}$ beschriebene $(k - 1)$ -dimensionale Hyperebene. Das äußere Einheitsnormalenfeld ist gegeben durch $n(x) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Der Rand $\partial \mathbb{R}_-^k$ kann durch eine einzige Parametrisierung beschrieben werden:

$$\Phi : \quad \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial \mathbb{R}_-^{k-1}; \quad t = (t^1, \dots, t^{k-1}) \mapsto (0, t^1, \dots, t^{k-1}).$$

Wenn $\partial \mathbb{R}_-^{k-1}$ mit dieser Karte /Parametrisierung orientiert wird, dann entspricht $n = e_1$ der positiven Orientierung.

Wir benötigen noch den Begriff des Trägers einer Differentialform. Dieser Begriff ist analog zu Funktionen erklärt:

$$\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}.$$

Man beachte, dass die Null in der Klammer für die Nullform vom Grade k steht! Wir zeigen jetzt das Theorem von Stokes für den Halbraum und werden den allgemeinen Fall dann darauf zurückführen.

Satz 12.20 Sei $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^k)$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}_-^k} d\omega = \int_{\partial \mathbb{R}_-^k} \omega \tag{15}$$

Beweis: Sei ω gegeben in der Standarddarstellung

$$\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

(wobei $\widehat{dx^j}$ den fehlenden Term bezeichnet.). Kompaktheit des Trägers bedeutet, dass alle f_j kompakten Träger haben (mehr noch: alle f_j verschwinden außerhalb einer gemeinsamen kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^k$). Dann erhält man (vgl. ÜA)

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k.$$

Mit obiger Parameterdarstellung $\Phi : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial\mathbb{R}_-^k$ folgt:

$$\Phi^*\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (f_j \circ \Phi) d\Phi^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\Phi^j} \wedge \cdots \wedge d\Phi^k \quad (16)$$

Nun ist aber:

$\Phi^1(t) = 0$, $\Phi^j(t) = t^{j-1}$, also $d\Phi^1 = 0$, $d\Phi^j = dt^{j-1}$ jeweils für $j = 2, \dots, k$.

Damit bleibt aber in (16) nur ein Summand übrig, nämlich der erste:

$$\Phi^*\omega(t) = f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^{k-1}.$$

Damit erhält man unter Berücksichtigung von (14):

$$\int_{\partial\mathbb{R}_-^k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots, dt^{k-1}. \quad (17)$$

Nun zur Berechnung des anderen Integrals in (15).

Unter Beachtung von $\mathbb{R}_-^k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$ erhält man

$$\int_{\mathbb{R}_-^k} d\omega = \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x^j} \right) dx^1 \dots dx^k.$$

Berücksichtigt man nun, dass alle f_j kompakten Träger haben, dann erhält man: für die erste Variable x^1 :

$$\int_{\mathbb{R}_-} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^k) dx^1 = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^k) dx^1 = f_1(0, x^2, \dots, x^k),$$

und für die anderen Variablen:

$$\int_{\mathbb{R}_-^k} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^1 \dots dx^k = \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \dots \widehat{dx^j} \dots dx^k.$$

Klar, das innere Integral ist gerade das Integral über \mathbb{R} , eben nur mit Grenzen geschrieben. Weil die f_j aber kompakten Träger haben, verschwindet genau dieses Integral. Damit erhält man also nur den Anteil von f_1 , also insgesamt:

$$\int_{\mathbb{R}_-^k} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x^2, \dots, x^k) dx^2 \dots dx^k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t^1, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots dt^{k-1}.$$

Und das ist aber gerade (17). Damit ist die Gleichung (15) gezeigt. ■

Jetzt formulieren wir das allgemeine Theorem von Stokes.

Theorem 12.21 (Theorem von Stokes) *Sei M eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n mit Rand ∂M , der die induzierte Orientierung trägt. Ferner sei ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$ -Form auf M mit kompaktem Träger. Dann gilt:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{18}$$

Beweis: Wir skizzieren nur die *Beweisidee*.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit möge eine solche Parametrisierung $\Phi : T \rightarrow M$ mit $\text{supp } \omega \subset \Phi(T)$ existieren (sonst wieder mit Zerlegung der Eins). Dann setzen wir den Rücktransport $\Phi^*\omega$ (mit $\text{supp } \Phi^*\omega \subset T$) auf ganz \mathbb{R}_-^k mit Null fort zu einer stetig differenzierbaren Differentialform (wir benutzen für die fortgesetzte Form die gleiche Bezeichnung). Da M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, gibt es für T zwei Möglichkeiten:

1. T ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k . Dann ist $\text{supp } \omega \cap \partial M = \emptyset$. Damit verschwindet aber das rechte Integral in (18). Nach unseren Betrachtungen im Beweis von Satz 12.20 ist aber auch das linke Integral Null.
2. T ist offen in \mathbb{R}_-^k und hat mit dem Rand von \mathbb{R}_-^k einen nichtleeren Durchschnitt. Da wir $\Phi^*\omega$ auf ganz \mathbb{R}_-^k fortgesetzt haben, gilt:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\Phi(T)} d\omega = \int_T \Phi^*(d\omega) = (\text{weil } d \text{ und } \Phi^* \text{ vertauschen}) \\ &= \int_T d(\Phi^*\omega) = \int_{\mathbb{R}_-^k} d(\Phi^*\omega) = (\text{nach Satz 12.19}) = \int_{\partial \mathbb{R}_-^k} \Phi^*\omega \\ &= \int_{\partial T} \Phi^*\omega = \text{durch Einschränkung von } \Phi \text{ auf } \partial T = \int_{\Phi(\partial T)} \omega \\ &= \int_{\partial M} \omega \end{aligned}$$

Bemerkung:

Berücksichtigt man die Standardbeispiele 12.11, dann erhält man als Spezialfälle des allgemeinen Satzes von Stokes die klassischen Integralsätze !