Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

ФИНИТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕР РАДОНА

М.Вебер

В [1] введено понятие финитного элемента архимедовой векторной решетки. В настоящей заметке устанавливается, что финитные элементы в K-пространстве мер Радона на локально компактном пространстве суть меры с конечным носителем. Используется терминология из [2-6].

1. Начнем с некоторых вспомогательных утверждений.

Пусть $(V,\|\cdot\|,V_+)$ – нормированная решетка, обозначаемая также через $(V,\|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ – заданная норма, а V_+ – конус положительных элементов в V.

Множество всех регулярных функционалов, т.е. представимых в виде разности положительных линейных функционалов на V, обозначим через $\tilde{V}$. Обозначим топологическое сопряженное пространство к $(V,\|\cdot\|)$, т.е. множество всех непрерывных по норме $\|\cdot\|$ линейных функционалов на V, через $V'_{\|\cdot\|}$. Известно, что если $(V,\|\cdot\|)$ – нормированная решетка, то $V'_{\|\cdot\|}\subset \tilde{V}$, и если $(V,\|\cdot\|)$ – банахова решетка, то $V'_{\|\cdot\|}= \tilde{V}$ [2, § X.3, теорема 1].

Этот результат следует из более общей теоремы, которая формулируется с помощью топологических свойств конуса в рассматриваемом нормированном пространстве (см. [6,7]).

Теорема 1. *Если $(V,\|\cdot\|,V_+)$ – упорядоченное банахово пространство с замкнутым, нормальным, воспроизводящим конусом, то $V'_{\|\cdot\|} = \tilde{V}$.*

Укажем другую ситуацию, в которой для упорядоченного нормированного пространства $(V,\|\cdot\|)$ также выполняется равенство $V'_{\|\cdot\|} = \tilde{V}$. Пусть V – векторная решетка ограниченных элементов относительно сильной единицы v_0. С помощью формулы

$$\|v\|_0 := \inf\{\lambda > 0 : |v| \leqslant \lambda v_0\}$$

введем в V неотрицательный функционал, который ввиду архимедовости оказывается нормой, причем имеет место

$$|v| \leqslant \|v\|_0 v_0 \qquad (v \in V).$$

Построенная по выбранной сильной единице v_0 норма в V называется v_0-нормой. Таким образом, V превращается в нормированную векторную решетку ограниченных элементов

Теорема 2 [3, теорема VIII.6.4, теорема IX.4.6]. *Пусть $(V,\|\cdot\|,V_+)$ – нормированная решетка ограниченных элементов. Тогда*

1) $(V,\|\cdot\|_0)' = \tilde{V}$;

2) $(V,\|\cdot\|_0)'$ есть KB-пространство с аддитивной нормой.

Отметим, что в случае совпадения топологического сопряженного с пространством регулярных функционалов элементы топологического сопряженного пространства описаны чисто порядковым свойством положительности, т.е. без привлечения топологических свойств.

Теорема 3. *Пусть дано упорядоченное векторное пространство (V,V_+), которое удовлетворяет следующим условиям:*

а) в V существует норма $\|\cdot\|$, относительно которой $(V,\|\cdot\|,V_+)$ есть упорядоченное банахово пространство, в котором конус V_+

замкнутый, нормальный и воспроизводящий;

b) (V,V_+) есть векторная решетка ограниченных элементов относительно сильной единицы v_0 с соответствующей v_0-нормой $\|\cdot\|_0$. Тогда

1. $(V,\|\cdot\|_0)' = (V,\|\cdot\|)' = \tilde{V}$.

2. *Нормы* $\|\cdot\|_0$ *и* $\|\cdot\|$ *эквивалентны на* V.

Доказательство. Первое утверждение следует из сопоставления теорем 1 и 2. Прежде чем установить второе утверждение, заметим, что $\langle(V,\|\cdot\|_0,\tilde{V}\rangle$ и $\langle V.\|\cdot\|),\tilde{V}\rangle$ - дуальные пары и что для нормированного пространства топология, порождаемая нормой, есть топология Макки [8, теорема 8.3.5]. Обозначим через $\sigma(V,\tilde{V})$ слабую топологию, а через τ_0 и τ - топологии, порожденные нормами $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|$ соответственно. Так как все три топологии согласуются с данной двойственностью, теорема Макки - Аренса [2, § Ш.3, теорема 8] приводит к двум отношениям:

$$\sigma(V,\tilde{V}) \leqslant \tau \leqslant \tau_0 \quad \text{и} \quad \sigma(V,\tilde{V}) \leqslant \tau_0 \leqslant \tau.$$

Отсюда получаем существование положительных чисел C_0, C таких, что $\|v\| \leqslant C_0\|v\|_0$ и $\|v\|_0 \leqslant C\|v\|$ для $v \in V$. Следовательно, обе нормы эквивалентны на V.

Следствие. *Векторная решетка ограниченных элементов, удовлетворяющая условию а) теоремы 3, с помощью нормировки по сильной единице превращается в банахову решетку ограниченных элементов.*

2. На локально компактном хаусдорфовом пространстве T рассматривается векторная решетка $K(T)$ всех непрерывных финитных функций x, т.е. таких, что носитель

$$\operatorname{supp}(x) := \operatorname{cl}\{t \in T : x(t) \neq 0\}$$

компактен. Мерой Радона на T называется всякий линейный функционал μ на $K(T)$ со значениями в $\mathbb{R}$, который удовлетворяет следующему условию: для любого компактного подмножества $K \subset T$ найдется число $\alpha_k > 0$ такое, что $|\mu(x)| \leqslant \alpha_k \cdot \|x\|$ для каждой функции $x \in K(T)$, для которой $\operatorname{supp}(x) \subset K$. Здесь $\|x\|$ - норма в пространстве $K(T)$, т.е. $\|x\| := \sup_{t\in T}|x(t)|$. Векторное пространство всех мер

(Радона), снабженное естественным порядком (считая $\mu \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(x) \geqslant 0$ для каждого $0 \leqslant x \in K(T)$), превращается в K-пространство [5] и обозначается через $M(T)$.

Пусть μ - положительная мера. Она продолжается единственным образом на более широкую совокупность функций $\mathcal{L}(T,\mu)$, которые называются μ-интегрируемыми функциями. Значение продолжения меры μ на элементе $x \in \mathcal{L}(T,\mu)$ обычно называется интегралом и обозначается той же буквой $\mu(x)$, а также $\int x d\mu$. В множестве $L(T,\mu)$, получающемся из $\mathcal{L}(T,\mu)$ путем факторизации по множеству функций, для которых $\mu(x) = 0$, обычным образом введем, с одной стороны, линейные операции и порядок, а с другой - норму по формуле $\|x\| = \int|x|d\mu$, где x рассматривается как функция, хотя на самом деле x обозначает класс эквивалентных функций. Тогда, в частности, оказывается, что $|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\| \leqslant \|y\| (x,y \in L(T,\mu))$, т.е. норма монотонна, и что $L(T,\mu)$ есть банахово K-пространство.

Функция g, определенная локально μ-почти всюду (лок. μ-п.в.) на T и принимающая значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty,-\infty\}$, называется локально μ-интегрируемой, если функция $g \cdot x$ принадлежит $\mathcal{L}(T,\mu)$ для каждой функции $x \in K(T)$. Совокупность всех локально μ-интегрируемых функций на T обозначается через $\mathcal{L}_{loc}(T,\mu)$. Факторизуя $\mathcal{L}_{loc}(T,\mu)$ по множеству всех функций лок. μ-п.в., обращающихся в нуль на T, получаем пространство $L_{loc}(T,\mu)$, в котором порядок вводится каноническим образом.

Для каждой меры μ определяется носитель S_μ как множество всех точек $t \in T$ таких, что для каждой окрестности U точки t существует функция $x \in K(T)$ такая, что $\operatorname{supp}(x) \subset U$ и $\mu(x) \neq 0$. Носитель меры всегда замкнутое множество.

Теорема 4. *Если мера Радона μ такая, что $L(T,\mu)$ есть K-пространство ограниченных элементов, то носитель меры μ конечен.*

Доказательство. В банаховом K-пространстве $L(T,\mu)$ конус L_+, состоящий из всех функций $x \in L(T,\mu)$, для которых выполняется $x(t) \geqslant 0$ μ-п.в. на T, очевидно воспроизводящий, в силу монотонности интегральной нормы - нормален, а как положительный конус в нормированной решетке - он также замкнут. В силу предположения, $(L(T,\mu),L_+)$ удовлетворяет условию b) теоремы 3. Следовательно, интегральная норма $\|\cdot\|$ и v_0-норма $\|\cdot\|_0$ эквивалентны в $L(T,\mu)$, так что по теореме 2 топологически сопряженное $(L(T,\mu),\|\cdot\|)' = L^{\infty}(T,\mu)$ есть *KB*-пространство с аддитивной нормой. В частности, $L^{\infty}(T,\mu)$ удовлетворяет условию (A). Отсюда следует конечномерность пространства $L^{\infty}(T,\mu)$ или, что эквивалентно этому, конечность носителя [2, §IV.3.3].

3. В архимедовой векторной решетке V вводится понятие финитного элемента [1] следующим образом. Элемент $\varphi \in V$ называется финитным, если существует элемент $z \in V$, обладающий свойством: для каждого $v \in V$ существует число $c_v \geq 0$ такое, что выполняется неравенство

$$|v| \wedge c|\varphi| \leq c_v z$$

при каждом $c \geq 0$. Элемент z называется мажорантой финитного элемента φ.

В [9] было установлено, что в *K*-пространстве $M(T)$ всех мер Радона на локально-компактном пространстве T мера φ является финитным элементом в $M(T)$ тогда и только тогда, когда $L_{loc}(T,\varphi)$ является *K*-пространством ограниченных элементов. При дополнительном предположении о σ-компактности пространства T оказывается, что носитель S_{φ} меры φ, которая в $M(T)$ есть финитный элемент, компактен [10]. А так как в этом случае $L_{loc}(T,\varphi) = L(T,\varphi)$, из теоремы 4 получаем конечность носителя S_{φ}. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Если мера φ есть финитный элемент в K-пространстве $M(T)$, то ее носитель - конечное множество.*

Литература

1. **Weber M., Makarov B.M.** On the represation of linear lattices // Math. Nachr.- 1974.- V.60. - P.281-296.

2. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.

3. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. - М.: Физматгиз, 1961.

4. **Бурбаки Н.** Интегрирование: меры, интегрирование мер. - М.: Наука, 1967.

5. **Бурбаки Н.** Интегрирование: меры на локально компактных пространствах. - М.: Наука, 1977.

6. **Шефер Х.** Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1971.

7. **Вулих Б.З.** Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. - Калинин: изд. Калининск. ун-та, 1977.

8. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. Теория и приложения. - М.: Мир, 1969.

9. **Weber M.** A vector lattice characterization of finite elements in the space of all Radon measures. - Preprint Techn. Univ. Dresden, 1989.

10. **Weber M.** On finite elements in the vector lattice of Radon measures // Africa Mathematica, submitted 1988.

Поступила в ред-изд. отдел
21.05.1990 г.