André HENNING, Andrea HOFFKAMP, Berlin

Aufbau von Vorstellungen zum Grenzwert im Analysisunterricht

Derzeit gibt es in der fachdidaktischen Landschaft viele Bestrebungen dem Analysisunterricht einerseits durch qualitativ-inhaltliche Zugänge (z.B. Hoffkamp 2011) und andererseits durch erhöhten Anwendungs- bzw. Realitätsbezug (z.B. Weitendorf 2007) mehr Sinngehalt zu geben. Letztlich sind aber die sehr abstrakten Begriffe wie Grenzwert und Konvergenz die zentralen Ideen der Analysis. Diese bleiben den Schülerinnen und Schülern doch fast immer ein Mysterium. Freudenthal (1973, S. 470) fordert in diesem Zusammenhang, Begriffe wie „offene Menge, ein Limes, ein Differentialquotient und ein Integral“ geometrisch und numerisch erlebbar zu machen, ohne sie „in eine über jeden Einwand erhabene Definition“ zu fassen. In der fachdidaktischen Literatur gibt es mannigfache Vorschläge für Lernumgebungen, die Erfahrungen im Sinne Freudenthals ermöglichen (z.B. Tall 1996, Beutelspacher & Weigand 2002). In diesem Artikel werden jedoch erste Indizien für ein praxisrelevantes Gesamtkonzept erörtert und reflektiert.

1. Der Grenzwertbegriff und *cognitive roots*

Im Berlin-Brandenburgischen Rahmenlehrplan (2006) wird einerseits die Behandlung eines inhaltlich-anschaulichen Grenzwertbegriffs gefordert und andererseits soll die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten eingeführt werden, wobei der Grenzwertbegriff „propädeutisch“ zu verwenden sei.

Studien zu Schülervorstellungen zum Grenzwert zeigen, dass es bei diesem Begriff eine Reihe an Fehlkonzepten gibt (einen Überblick bietet Marx 2013). Diese resultieren daraus, dass eine intuitive Annäherung an den abstrakten Begriff oft irreführend ist (man denke an die alltagssprachlichen Konnotationen der Begriffe „Grenzwert“ oder „streben nach“) und dass die Erfahrungen mit unendlichen Prozessen in der Schule nicht vielfältig genug sind, um ein reichhaltiges Bild des Begriffes auszubilden.

Aus didaktischer Perspektive sollten Zugänge mit einer dualen Natur ermöglicht werden, mit denen einerseits auf vertraute Konzepte aufgebaut und andererseits eine Grundlage zu höherem mathematischen Denken geschaffen wird. Konzepte, die solche Zugänge erlauben, nennt Tall (1992) *cognitive roots*. Sie sind nicht als mathematische Grundlegung zur logisch deduktiven Weiterentwicklung, sondern im Sinne einer Lehrgangsentwicklung zu verstehen. Zur Beschreibung von *cognitive roots* sind neben stoffdidaktischen Analysen auch empirische Einsichten nötig.

2. Der analytische Schritt – Grenzwerte und Realität

Der analytische Schritt ist die theoretische und kognitive Hürde in Klasse 11. Während Schülerinnen und Schüler relativ leicht durchschnittliche Änderungsraten sowohl berechnen, als auch geometrisch als Sekantensteigungen und inhaltlich als Durchschnittsgeschwindigkeiten interpretieren können, sind sie oft schwer von der Existenz einer momentanen Änderungsrate bzw. einer Momentangeschwindigkeit zu überzeugen („Die kann es nicht geben, das muss immer ungenau sein“). Trotz vieler Erfahrungen beim Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten, tauchte im Grundkurs der Autorin das analoge Problem wieder bei der analytischen Definition des Integrals auf. Die Benutzung eines Geogebra-Applets[1], bei dem man für eine quadratische Funktion im Intervall [0,10] die Anzahl der Rechtecke zur Errechnung der Ober- und Untersummen, sowie den Wert dieser Summen und deren Differenz verändern konnte, führte geradezu zur Festigung der Überzeugung, dass man auf diese Art den Flächeninhalt niemals genau errechnen könne: „Man kann im Applet nicht bis unendlich, das Applet kann das nicht.“ „Im Unendlichen ist da doch immer nur ein Punkt.“ (Anm.: Deswegen die Folgerung die Rechtecke hätten „keine“ Breite und somit „keinen“ Flächeninhalt.) Die Probleme der Lernenden spiegeln sich in der Geschichte in einem Ringen um die Rolle der „Unendlichkeit“ in der Mathematik wider und sind durchaus erwartungsgemäß. So schreibt Hilbert (1926, S. 190):

„[..] das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig [..] [Wir gelangen zu der Überzeugung], daß als Vorbedingung für die Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis gewisse anschauliche Vorstellungen und Einsichten unentbehrlich sind [..] Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist vielmehr lediglich die einer Idee – einer Idee überdies, der wir unbedenklich vertrauen dürfen in dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat.“

3. Zwei Lernumgebungen

Wir plädieren dafür, dass schon in der Schule Grundideen der Mathematik explizit gemacht werden. So können der Hilbert-Text bzw. Originaltexte von Leibniz oder Newton in Lernumgebungen genutzt werden, um sich der Geschichtlichkeit mathematischer Theorien bewusst zu werden. Aufgaben-

[1] http://www.geogebratube.org/material/show/id/10948

stellungen, die dies ermöglichen, fragen nach Zusammenhängen zwischen den Texten und beispielsweise dem Verfahren zur Berechnung von Flächeninhalten mittels Ober- und Untersummen und - darüber hinaus - nach der Bewertung der Idee dieses Verfahrens auf Brauchbarkeit zur Erreichung der Ziele. Dadurch gibt man den Weg frei zur Diskussion der mathematischen Mittel und zur Erkenntnis, dass das Bilden des Grenzwerts ein *Gedankenexperiment* ist, bei dem man überprüfen muss, ob die Ergebnisse sinnvoll sind. Erst dadurch werden formale Zugänge motiviert, denn Begriffe wie Grenzwert und Konvergenz sind nur „formal erlebbar". Mit anderen Worten: Anstatt die mathematischen Mittel und Methoden nur „nachzulernen", werden sie selbst zur Diskussion gestellt, und dadurch das „Mysterium Grenzwert" auf dem Weg zu reflektiertem und aufgeklärtem Mathematiklernen explizit thematisiert.

Eine weitere Lernumgebung greift die Möglichkeiten der Nutzung DGS-basierter Applets nochmals auf. Eine von den Autoren entwickelte und in einer ersten interpretativen Videostudie überprüfte Lernumgebung im Zusammenhang mit dem Übergang zur Ableitungsfunktion als Objekt soll zwei Dinge ermöglichen: 1. die Hervorhebung der Errungenschaft des analytischen Schritts, durch den erst Rückschlüsse auf Eigenschaften der Funktion gezogen werden können. 2. die Erfahrung vielfältigerer Grenzprozesse durch zusätzliche Betrachtung des symmetrischen Differenzenquotienten (ausführlich in Hoffkamp & Henning 2013, Lernumgebung inkl. Unterrichtsmaterialien online[2]). Bei der Arbeit mit der Lernumgebung ergaben sich zahlreiche Lerngelegenheiten. Z.B. antworteten die meisten Lernenden auf die Frage, was ein positiver/negativer Differenzenquotient für die Funktion bedeuten, etwa: „Positiv, wenn der Graph von f ansteigt." Letztlich zeigte sich auch hier, dass der analytische Schritt eine Denkhürde markiert, denn die Steigung der Sekante kann nicht das Verhalten der Funktion erklären. Diese Situation wurde im Unterricht zu einer informellen Formulierung des Mittelwertsatzes genutzt. Die zusätzliche Betrachtung des symmetrischen Differenzenquotienten zeigte, dass es verschiedene Grenzprozesse mit demselben Grenzwert geben kann. Fragen der Konvergenzgeschwindigkeit, Brauchbarkeit und geometrischer bzw. rechnerischer Nachvollziehbarkeit können informell und formal aufgegriffen werden und öffnen so im Sinne einer *cognitive root* weitere Begriffsentwicklungen.

4. Fazit und Ausblick

Trotz einiger Nachteile (Tall 1992, Marx 2013) scheint uns die „historische" *cognitive root* eines intuitiven Grenzwertbegriffs, der wie Cauchy die

[2] http://www2.math.hu-berlin.de/~hoffkamp/Material/ableitungsfunktion.html

Idee der sukzessiven Änderung betont, geeignet (Weigand 1993). Dieser sollte aber mit reichhaltigen und sorgfältig ausgewählten Erfahrungen, der expliziten Thematisierung und Reflexion der Rolle der Unendlichkeit und dem Herausstellen der Errungenschaft des analytischen Schritts gepaart sein. Zur Beschreibung weiterer *cognitive roots* (bzgl. Konvergenz, reeller Zahlen oder naiver Logik und Quantifizierungen u.a.) sollten stoffdidaktische Analysen wie die von Blum & Kirsch (1979) wieder herangezogen und in heutiger Zeit und unter Berücksichtigung neuer technologischer Möglichkeiten ergänzt und adaptiert werden. Dabei sollten vielfältige Aspekte wie historisch-kulturelle, philosophische, technologische, anwendungsbezogene, gesellschaftliche u.a. berücksichtigt werden, um weitere Lernumgebungen zu entwerfen und zu überprüfen. Angesichts schon existierender mannigfacher Lernumgebungen ist es darüber hinaus vonnöten, diese nach Kriterien wie Abstraktionsgrad, Kompetenzstufen bzw. Theoriebildung versus Anwendungsbezogenheit zu sortieren. Letztlich wäre es das Ziel, einen Gesamtlehrgang der Analysis zu entwickeln, der in seinem stufigen Aufbau sinnstiftend ist und die genannten Aspekte zu einem kohärenten Ganzen vereint.

Literatur

Beutelspacher, A., Weigand, H.G. (Hrsg.) (2002): Unendlich, mathematik lehren, 112.

Blum, W., Kirsch, A. (1979): Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis IV. Der Mathematikunterricht, 25(3).

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe 2. Stuttgart: Klett.

Henning, A., Hoffkamp, A. (2013): Developing an intuitive concept of limit when approaching the derivative function. Angenommen bei CERME 8, Antalya.

Hilbert, D. (1926): Über das Unendliche. Mathematische Annalen, 95, 161-190.

Hoffkamp, A. (2011): Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse. Dissertation, Technische Universität Berlin.

Jugend und Sport Berlin Senatsverwaltung für Bildung (Ed.) (2006). Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik. Oktoberdruck AG, Berlin.

Marx, A. (2013): Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen – Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. JMD, 34, 73-97.

Tall, D. (1992): The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D.A. Grows (Hrsg.): Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 495-511.

Tall, D. (1996): Functions and calculus. In A. Bishop et al. (Hrsg.): International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 289-325.

Weigand, H.G. (1993): Zur Didaktik des Folgenbegriffs. BI Wissenschaftsverlag.

Weitendorf, J. (2007): Realitätsbezüge im Analysisunterricht. Hildesheim: Franzbecker.