Denk- und Arbeitsstrategien für das Lernen von Mathematik am Übergang Schule - Hochschule

Hoffkamp, Andrea[1]; Paravicini, Walther[2]; Schnieder, Jörn[3]

[1]Humboldt-Universität zu Berlin; [2]Westfälische Wilhelms-Universität Münster; [3]Universität zu Lübeck

Zusammenfassung Einer der wichtigsten Gründe für das Scheitern vieler Studierender an mathematischen Vorlesungen liegt darin, dass Studierende auch nach dem ersten Studienjahr nicht wissen, wie man Mathematik richtig lernt. Vielen unter ihnen gelingt es nicht, sich typische mathematische Denk- und Arbeitsweisen anzueignen, die sie benötigen, um mathematische Begriffe, Definitionen, Sätze oder Beweise zu erarbeiten und systematisch anzuwenden. In unserem Beitrag stellen wir deswegen Lernszenarien vor, die es ermöglichen ein strukturelles Verständnis von Mathematik explizit vorzubereiten, indem mit Studierenden erörtert wird, wie „Mathematik im Prinzip funktioniert“, um so den Übergang zwischen den „mathematischen Kulturen“ an Schule und Hochschule zu bewältigen.

Einleitung

Die Übergangsproblematik Schule-Hochschule ist in der didaktischen Literatur vielfältig beschrieben worden. Einen Überblick über einige Arbeiten bietet Gueudet (2008). Der Übergang betrifft dabei verschiedene Phänomene: Übergang zu einer anderen/neuen Denkweise, Übergang zu formalem Beweisen, Übergang zu einem neuen didaktischen Vertrag an der Hochschule u.a. Diese Problematik lässt sich aus verschiedenen Perspektiven betrachten. In unserer Arbeit nehmen wir eine epistemologische und didaktische Perspektive ein. Aus diesen Perspektiven lässt sich sagen, dass Studierende das Wissen, wie man Mathematik richtig lernt, nicht gleichsam implizit während des Besuchs der Vorlesungen erwerben. Im Speziellen fehlen ihnen mathematikspezifische Lern- und Arbeitstechniken zur Erarbeitung und souveränen Anwendung mathematischer Begriffe, Definitionen, Sätze und Beweise, sowie mathematischer Theorien insgesamt.

Die aktuelle (Hochschul-)Mathematikdidaktik setzt zwar ein bestimmtes wissenschaftstheoretisches Verständnis von Mathematik (implizit) voraus und bietet eine Vielfalt didaktischer Anregungen und Aufgabenmaterialien zum Lernen und Finden von Begriffen, zum Argumentieren und Beweisen etc. an. Es gibt aber kaum Vorschläge für Unterrichtsszenarien, in denen die (methodologischen) Grundlagen des (mathematischen) Definierens, Argumentierens und Beweisens und der Theoriebildung allgemein aufgedeckt, problematisiert oder gezielt eingeübt werden können.

In unserem Beitrag skizzieren wir daher einen Ansatz, wie mathematikspezifische Denk-, Lern- und Arbeitstechniken gerade am Studienanfang vermittelt werden können.

Hierfür entwickeln wir inhaltsbezogene theoretische Konzepte in Wechselbeziehung zu praktischen Lehrentwürfen. Das theoriebasierte Design von Lernszenarien steht dabei im Mittelpunkt. Unsere Arbeit orientiert sich dementsprechend an Wittmanns Charakterisierung der Mathematikdidaktik als „Design Science“ (Wittmann, 1995).

Der vorliegende Artikel beschreibt exemplarisch zwei Lernszenarien. Eines davon wurde in einem Vorkurs an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg zum WS 2012 eingesetzt und anschließend einem Reflexionsprozess im Forscherteam unterzogen. Dies führte zur Weiterentwicklung unserer theoretischen Annahmen und mündete in dem Entwurf des zweiten hier dargestellten Szenarios.

Allgemeiner Ansatz und theoretischer Hintergrund

Viele Vor- oder Brückenkurse zielen vor allem auf die Vermittlung bzw. Wiederholung mathematischen Grundwissens und mathematischer Grundfertigkeiten. Übergeordnete Konzepte und mathematische Strategien werden zumeist nur durch mehr oder weniger explizite Hinweise miteinbezogen. Im Zentrum unseres Ansatzes steht hingegen die Aufdeckung und die Diskussion der methodologischen Grundlagen mathematischer Tätigkeiten wie Argumentieren und Beweisen, Definieren und das Entwickeln von Theorien.

Hierzu nehmen wir eine argumentationstheoretische Perspektive ein. Das bedeutet, dass wir davon ausgehen, dass mathematische Theorien in besonderer Weise sprachlich verfasst sind: Sie können nämlich als Ergebnis eines nach strengen Regeln verlaufenden (und unter Umständen als bloß gedacht zu unterstellenden) wahrheitsorientierten Dialogs verstanden werden. Formalistische Mathematik erachten wir als Hochstilisierung argumentativer Alltagspraxis. Somit entwickelt sich die Ausgangsbasis für Mathematik aus dem Alltäglichen und dem Konkreten. Das Alltägliche und Konkrete nimmt also für formale Beweise eine Orientierungsfunktion ein.

Entsprechend obiger Überlegungen stellen wir das Leitbild *Mathematik im Dialog* ins Zentrum unseres Ansatzes und gliedern die entsprechenden Übungsszenarien nach vier Kompetenzbereichen: *Begriffe (Definitionen), mathematische Aussagen, Argumentation* und *mathematische Theorien*.

Wir behaupten, dass Studierende durch unseren Zugang in die Lage versetzt werden, einige grundlegende Voraussetzungen und Aspekte der *Mathematik als Wissenschaft* aufzudecken, zu problematisieren und zu diskutieren. Mit anderen Worten: Wir denken, dass die hier vorgestellten Methoden zu einem verstehensorientierten Lehrkonzept führen können, welches die Kernprinzipien der Wissenschaft Mathematik und mathematischen Arbeitens (an der Hochschule) explizit macht und zu einem *Verstehen wie Mathematik im Prinzip funktioniert* (von Hentig 2003) führen können. Dies erachten wir als eine Grundvoraussetzung, wenn man den Wechsel zwischen den „mathematischen Kulturen" Schule und Hochschule, die sich in ihren impliziten (und expliziten) Grundannahmen und Regeln unterscheiden, vollziehen möchte. Verständiges mathematisches Arbeiten und Üben setzt unseres Erachtens ein gewisses wissenschaftstheoretisches Verständnis voraus, welches frühzeitig in expliziter Weise entwickelt werden sollte.

Im weiteren Verlauf stellen wir zwei Szenarien zu den Bereichen *Argumentation* und *Definieren* dar. Ausgehend von der Erläuterung des theoretischen Hintergrundes werden normative Folgerungen für die Ausgestaltung der Lernszenarien getroffen. Lernpsychologische Perspektiven (z.B. Beliefs-Forschung) spielen hierbei zunächst keine Rolle. Unseren Bezugsrahmen bilden vielmehr die allgemeine Wissenschaftstheorie, Argumentationstheorie (Tetens, 2010) und Epistemologie. Anschließend werden die Szenarien einer Analyse hinsichtlich ihres didaktischen Potenzials zur Erreichung der formulierten Lernziele unterzogen.

Zwei Lernszenarien

Zielgruppe und Lehrkontext

Die hier beschriebenen Lernszenarien wurden zunächst für Lehramtsstudierende des ersten Semesters mit Mathematik konzipiert. Sie sind aber durchaus auch für Studierende mit Hauptfach Mathematik im Rahmen eines Bachelorstudiengangs geeignet. In einem ersten Durchlauf wurde ein unserer Konzeption folgender mathematischer Vorkurs an der PH Ludwigsburg vor Beginn des Wintersemesters im Oktober 2012 durchgeführt. Daran nahmen ca. 200 Studierende der Studiengänge Grundschullehramt, Werkrealschullehramt und Sonderschullehramt teil. Dementsprechend war die Zielgruppe bezüglich ihrer Voraussetzungen äußerst heterogen, was ihre mathematischen Kompetenzen, Lernmotivation und ihre akademischen Fähigkeiten anbelangte. Der Vorkurs erstreckte sich über 4 volle Tage mit je zwei (aktivierenden) Vorlesungen (90 Min. + 60 Min.) und je einer Übungsphase am Nachmittag (210 Min.), in der die Studierenden in von Tutorinnen und Tutoren betreuten Kleingruppen arbeiteten. Die Vorlesung wurde parallel von der Autorin des Artikels und einem Dozenten aus Ludwigsburg gehalten, so dass die Studierenden sich zur Vorlesung in zwei Gruppen à ca. 100 Personen aufteilten.

Das im Folgenden beschriebene Szenario I zur *Argumentation* war dabei ein integraler Bestandteil des Vorkurses. Aus der Reflexion und den vorläufigen Rückmeldungen der Studierenden zum Vorkurs wurde unser Ansatz weiterentwickelt;

im Zuge dessen wurde unter anderem ein Szenario zum Bereich *Definieren* erarbeitet, welches wir ebenfalls in diesem Beitrag vorstellen. Die argumentationstheoretische Perspektive spiegelt sich in den Lernszenarien darin wider, dass sie allesamt dialogisch orientiert sind und mathematisches Wissen bzw. Regeln eben nicht nur aus rein symbolischem Operieren heraus entwickelt werden, sondern der Aspekt der Idealisierung und Hochstilisierung in der formalistischen Mathematik ins Zentrum rückt.

Lernszenario I: Argumentation, Beweis und Rechtfertigung

Die folgenden Ausführungen werden relativ knapp gehalten und können in ausführlicher Form in unserem Artikel zur CERME 2013 (Hoffkamp, Schnieder & Paravicini 2013) nachgelesen werden. Sie werden hier allerdings um einige Aspekte ergänzt und im Hinblick auf den Übergang zum zweiten hier dargestellten Lernszenario erweitert.

Theoretischer Rahmen

Mathematische Beweise werden in der Schule zumeist nur exemplarisch gelehrt. Ein streng axiomatisch-deduktives Vorgehen taucht vernünftigerweise in der Schule nicht auf. Dennoch sollten gerade zukünftige Lehrerinnen und Lehrer sich eines solchen Vorgehens bewusst sein und dieses auch eingeübt haben, um später in der Lage zu sein mit den Schülerinnen und Schülern *lokales Ordnen* als „deduktives Vorgehen im Kleinen“ durchzuführen. Das „lokale Ordnen“ beschreibt Freudenthal (1963) folgendermaßen:

„Es blieb eben nichts anderes übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Tätigkeit die des lokalen Ordnens genannt.“

Dadurch, dass der „Horizont der Evidenz“ nicht genau festgelegt bzw. variabel ist, trifft man schon im schulischen Kontext auf das Problem der Legitimation mathematischer Argumentation und häufig auf die Frage, wovon man nun ausgehen darf und wovon nicht.

In der Hochschule spielen mathematische Beweise i.a. eine andere Rolle als in der Schule:

„[..] they are central in the building of the university mathematical culture, because they indicate methods, and also what requires justification or what does not.“ (Gueudet 2008, p. 247)

Normalerweise werden an der Hochschule aber die metatheoretischen Aspekte mathematischer Beweise, welche die verwendeten methodischen Mittel legitimieren, nicht explizit angesprochen oder gar diskutiert. Wir denken, dass dies jedoch ein Schlüsselfaktor im Übergang Schule-Hochschule bzgl. mathematischem Argumentieren und Beweisen ist und dass sich diese Aspekte letztlich auch auf die Tätigkeit des lokalen Ordnens in der Schule übertragen lassen.

Mathematische Argumente oder Beweise dienen dazu, andere bzw. sich Selbst von der Wahrheit mathematischer Aussagen zu überzeugen (Thiel 1973). In diesem Sinne sind mathematische Beweise Werkzeuge oder eine Richtlinie für die Entwicklung mathematischer Argumentationen, welche transsubjektive Verständlichkeit ermöglichen sollen (Lorenzen 1968). Für die Konzeption eines Lernszenarios folgen wir dieser eben skizzierten epistemologischen und normativen Perspektive. Hierbei verfolgen wir das Ziel die *minimalen* Bedingungen und Voraussetzungen effektiver mathematischer Argumentation explizit zu erörtern und zu reflektieren.

Was verstehen wir unter mathematischer Argumentation? Mathematische Argumentationen können als Muster bestehend aus *Voraussetzung – Schlussregel – Schluss* strukturiert werden, welche in linearer Form geschrieben werden können (Tetens 2010). Die Verifizierung des Schlusses wird aus bestimmten Voraussetzungen abgeleitet. Diese Voraussetzungen benötigen keine weitere Rechtfertigung oder wurden schon verifiziert. Insbesondere werden aber die Schlussregeln explizit festgelegt und gerechtfertigt. Mathematische Argumentation, die nach diesem Muster aufgebaut ist, läuft nicht Gefahr in einen Zirkelschluss zu münden, oder in einen infiniten Regress zu laufen bzw. mit Hilfe eines „Dogmas" abgebrochen zu werden. Mit anderen Worten sie läuft nicht auf das berüchtigte „Münchhausen-Trilemma" hinaus (Albert 1991).

Wir betonen in unserem Zugang den dialogischen Charakter der Logik, durch die uns die Mittel an die Hand gegeben werden, neues Wissen aus schon bestehendem Wissen zu erschaffen. Deswegen sollen Studierende das Ideal transsubjektiver Verständlichkeit als minimale Bedingung für wissenschaftliches Arbeiten in der Mathematik kritisch diskutieren. Das Muster *Voraussetzung – Schlussregel – Schluss* soll als Werkzeug zur Erreichung dieses Ideals erkannt werden.

Ziel soll es sein, dass Studierende nicht nur theoretisches Wissen zu mathematischer Argumentation besitzen oder in Beweisführung trainiert werden. Vielmehr sollen sie auch die verwendeten Werkzeuge auf einer normativen Basis bezüglich der Erreichbarkeit der Ziele diskutieren. Wir denken, dass solch eine normative Diskussion zu einer kritischen Auseinandersetzung mit und Reflexion von Mathematik als Wissenschaft und ihrer methodologischen Entscheidungen führen kann.

„Mathematische Argumentation und Rechtfertigung" – Lernziele, Grobverlauf und didaktischer Kommentar

Mit dem Lernszenario werden zwei Lernziele verfolgt: Die Studierenden sollen

- mathematische Beweise anhand des Beispiels des Beweises durch Widerspruch analysieren und deren deduktive Struktur erkennen und beschreiben.
- erkennen, dass Vollständigkeit und deduktive Ableitung notwendige Kriterien für mathematische Beweise sind, und das Ideal des Musters *Voraussetzung – Schlussregel – Schluss* als vernünftiges Mittel für mathematische Argumentation anerkennen und sich bewusst aneignen.

Das Szenario ist in drei Phasen gegliedert, die im Folgenden kurz umrissen werden.

Phase 1 (Informationsphase): In der Vorlesung werden die Grundzüge naiver Logik und die Methode des Beweises durch Widerspruch vorgestellt. Als weiteres Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch wird die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen herangezogen. Hierzu wurde ein Beweis in Zeilen „auseinandergeschnitten" und in eine falsche Reihenfolge gebracht (*Beweispuzzle*). Gemeinsam mit den Hörerinnen und Hörern wird die richtige Anordnung der Deduktionskette hergestellt (Projektion mit Beamer oder Overhead).

Phase 2 (Kognition): Das *Beweispuzzle* wird in der Übung in Kleingruppen wieder aufgegriffen. Den Studierenden werden zwei weitere Beweispuzzles in Form von unsortierten Beweiszeilen, welche auseinandergeschnitten wurden, gegeben.
Dabei handelt es sich nicht etwa um zwei verschiedene Beweise des Satzes zur Unendlichkeit der Menge der Primzahlen, sondern um denselben Beweis (bzw. dieselbe Beweisidee) wie schon in der Informationsphase. Die Beweise unterscheiden sich aber erheblich in der Art, wie sie notiert sind. Ein Beweis ist sehr viel kürzer als der Beweis aus der Vorlesung. Dabei wurden Deduktionsschritte zusammengefasst bzw. ausgelassen, so dass der Leserin bzw. dem Leser mehr an Vorwissen abverlangt wird. Der andere Beweis ist halbformalisiert und dadurch sehr lang und detailreich. Die Studierenden sortieren die Beweisschritte und diskutieren die Beweise. Dadurch entsteht eine Irritation oder Provokation, denn oftmals sind Studierende aus der Schule ein kochrezeptartiges Arbeiten gewohnt, bei dem es genau einen richtigen Weg gibt. Dies führt zu einer Diskussion, in deren Verlauf die Struktur mathematischer Beweise als Deduktionskette aufgedeckt und reflektiert wird. Diese Struktur lässt sich als Gemeinsamkeit aller drei Beweise herausarbeiten. Aber auch der dialogische Charakter wird offenbar: Beweise dienen dazu sich selbst oder andere von der Gültigkeit einer Aussage zu überzeugen (*transsubjektive Verständlichkeit*). Ob dies gelingt, hängt dabei vom mathematischen Vorwissen bzw. Hintergrund ab, aber auch von (persönlichen oder soziokulturellen) normativen Vorstellungen. Letztlich provoziert diese Phase gerade durch die unterschiedlich langen bzw. unterschiedlich detailreichen Beweise aber auch Fragen wie „Was wäre, wenn ein mathematischer Beweis niemals zu Ende formuliert werden könnte?" oder „Was sind die Grundregeln mathematischen Be-

weisens, wenn ein Beweis überzeugen soll?“ Diese Fragen nach Rechtfertigung und Gültigkeit leiten in Phase 3 über.

Phase 3 (Metakognition): Diese Phase beschäftigt sich mit den Fragen „Woher weiß ich, dass eine mathematische Argumentation gültig ist?“ bzw. „Was ist ein perfekter Beweis?“ Um sich diesen Fragen zu widmen, erhalten die Studierenden weiteres Material in Form des Münchhausen-Trilemmas:

„Hans Albert (1991) behauptet, dass jegliche Versuche für eine Letztbegründung scheitern müssen bzw. ins Münchhausen-Trilemma führen. Das Münchhausen-Trilemma bedeutet, dass jeder Versuch des Beweises eines letzten Grundes zu einem von drei möglichen Ergebnissen führt:

zu einem Zirkelschluss, (die Conclusio soll die Prämisse beweisen, benötigt diese aber, um die Conclusio zu formulieren) oder

zu einem Infiniten Regress (es wird immer wieder eine neue Hypothese über die Begründbarkeit eines letzten Grundes formuliert, die sich jedoch wiederum als unzureichend erweist oder wieder in einen Zirkel führt) oder

zum Abbruch des Verfahrens.“[1]

Die Studierenden erhalten eine Textfassung des Münchhausen-Trilemmas und bearbeiten folgende Aufgaben:

Stellen Sie Zusammenhänge zwischen den Beweis-Puzzles und dem Münchhausen-Trilemma her. Nennen Sie Eigenschaften eines „perfekten“ Beweises!

Hierdurch sollen gemeinsam mit den Studierenden sozio-mathematische Normen aufgestellt und diskutiert werden:

„which means in this context, criteria shared by students and teachers to decide whether a proof is valid or not, what is a satisfactory explanation, etc.“ (Gueudet 2008, S. 243)

Die Normen mathematischer Argumentation werden also im Gegensatz zur üblichen Lehrpraxis nicht vorgegeben und an Beispielen vertieft, sondern von Anfang an zur Diskussion gestellt und dadurch explizit gemacht.

Es ist davon auszugehen, dass sich die meisten Studierenden noch keine Gedanken um Rechtfertigungsaspekte mathematischer Beweise gemacht haben. Mit dieser Lernumgebung sollen sie sich solcher Aspekte und Probleme bewusst werden. Deswegen erhalten sie mehrere Beweise desselben Satzes, die in ihrer Länge und Argumentationstiefe weit differieren. Dies ist als Analogon des „infiniten Regresses“ beim Münchhausen-Trilemma zu sehen, denn selbst bei der langen und sehr detailreichen Version des Beweises, könnte man jeden einzelnen Beweisschritt weiter hinterfragen, so dass man letztlich auf die Frage der „letzten Begründungen“ kommt. Die Studierenden werden durch die Lernumgebung angeregt ihre impliziten Überzeugungen zu mathematischen Beweisen zu reflektieren und

---

[1] Formulierung aus http://de.wikipedia.org/wiki/Münchhausen-Trilemma (zuletzt aufgerufen am 25.9.2013)

in Überlegungen zu der Frage „Was ist ein perfekter Beweis?“ münden zu lassen. Die Reflexion der drei Optionen des Trilemmas kann dann zur Überzeugung führen, dass das Muster *Voraussetzung – Schlussregel – Schluss* ein vernünftiges und angemessenes Mittel für mathematische Argumentation ist. Aber es erlaubt auch das Erkennen mathematischer Arbeitsweise: Definierte Eigenschaften dürfen ohne Beweis benutzt werden, wohingegen alle anderen Eigenschaften unter Ausnutzung bestehender Definitionen bewiesen werden müssen.

Der erste Durchlauf dieses Lernszenarios an der PH Ludwigsburg scheint unseren Ansatz zu bestätigen. Die Studierenden diskutierten, dass Beweise einen gewissen Zweck verfolgen, nämlich andere von der Wahrheit einer Aussage zu überzeugen. Hierfür muss ein Beweis an die Adressaten angepasst sein. Auf dieser Basis wurden Normen für gute Beweise erarbeitet und mit den Normen an der Schule verglichen. Aus den Gesprächen und Diskussionen in der Übung entstand aber auch die Frage nach den „Atomen der Argumentation“ („Wann muss man nicht mehr weiterfragen?“) bzw. nach den Grundbegriffen – letztlich also die Frage nach einem axiomatischen Zugang. Insbesondere wurde diese Frage aufgegriffen, als in der Vorlesung die elementare Wahrscheinlichkeitstheorie als ein Beispiel solch eines axiomatischen Zugangs und als Beispiel einer mathematischen Theorie in ihren (elementarsten) Grundzügen behandelt wurde. Dies war aber noch unzureichend, so dass das Forscherteam ein Lernszenario zum Thema „mathematische Definitionen“ entwickelt hat, das im weiteren Verlauf beschrieben wird.

Lernszenario II: Mathematische Definitionen

Theoretischer Rahmen

Im Folgenden skizzieren wir ein weiteres Lernszenario, das die Studierenden auf einen Perspektiv- und einen damit verbundenen Haltungswechsel im Übergang Schule-Hochschule vorbereiten soll. Diese finden im Übergang von einer bloß wissenschaftspropädeutischen hin zu einer wissenschaftlichen, d.h. dem Ideal lückenloser und insbesondere zirkelfreier Begründung verpflichteten, Sichtweise von Mathematik – hier am Beispiel „Mathematisches Definieren“ – statt.

„Begriffe bilden die Grundbausteine der Mathematik“ (Vollrath & Roth 2012). Für eine wissenschaftlich betriebene Mathematik (wie für jede Wissenschaft) ist der systematische und intersubjektiv nachvollziehbare Aufbau ihrer Terminologie von zentraler Bedeutung. In unserem Lernszenario geht es dabei aber nicht nur darum, das Definieren als sinnvolles und notwendiges Verfahren terminologischer Sprachnormierung in der Mathematik kennen zu lernen, sondern – im Sinne eines Orientierungswissens - auch die mathematikübergreifende Bedeutung des Methodeninstruments „Definition“ für eine gelingende Kommunikation in Alltag und

Wissenschaft überhaupt erfahrbar zu machen. Insofern steht auch hier der dialogische Charakter im Vordergrund.

Zu den selbstverständlichen, schon in der Schule empraktisch und implizit vermittelten, Forderungen an gute Definitionen gehört es, „von Definitionsverfahren Eindeutigkeit und Explizitheit zu verlangen“ (Janich 2001, 124). Fehlerhaft sind Definitionen immer dann, wenn sie zirkulär sind und sich – bildlich gesprochen – im Kreis drehen, d.h. wenn im Definiens das Definiendum bereits vorkommt und sie dadurch das, was erst definiert werden soll, bereits als definiert in Anspruch nehmen.

Wird diese Forderung aber ohne weitere Ergänzungen und Einschränkungen unterschiedslos auf alle Begriffe einer Theorie ausgedehnt, so führt sie in tiefe, die Bedingungen der Möglichkeit von Wissenschaft allgemein und Mathematik insbesondere betreffende, Grundlagenprobleme[2]. Wird nämlich an der Forderung festgehalten, dass die erklärenden Begriffe einer Definition selber nicht definitionsbedürftig sein dürfen bzw. dass letztlich alle Begriffe ausschließlich mit Hilfe sprachlicher Mittel einzuführen sind, so wird man in ein Münchhausen-Trilemma für Begriffe, kurz ein Begriffs-Trilemma geführt: Entweder man akzeptiert zirkuläre Begriffsbildungen oder aber einen infiniten Regress beim Definieren oder man nimmt einen bewusst vollzogenen Abbruch und damit einhergehend die Verpflichtung in Kauf, gewisse Begriffe als nicht definitionsbedürftige Grundbegriffe auszuzeichnen.

Letzteres führt zum Konzept der Axiomatik, denn in der Mathematik besteht der wesentliche Ansatz[3] darin, eine Variante der letztgenannten Alternative aufzugreifen: Hierbei werden gewisse Begriffe als Grundbegriffe gleichsam als rationale Basis ausgezeichnet und alle anderen Begriffe als abgeleitet betrachtet. Diesem Verständnis zufolge werden diese Grundbegriffe so betrachtet, dass sie ausschließlich über ihre wechselseitigen Beziehungen zueinander (Kohärenz) definiert sind. Formal ausgedrückt handelt es sich dabei darum, mehrere Begriffe gleichzeitig dadurch definitorisch zu bestimmen, bzw. „implizit“ im Rahmen einer mathematischen Strukturbeschreibung zu definieren, dass man eine Liste von satzartigen Ausdrücken, die so genannten (formalen) Axiome, schlicht hintereinander schreibt und als (fast ausschließlichen) Maßstab für die wissenschaftliche Korrektheit dieses so gesetzten Axiomensystems seine logische Widerspruchsfreiheit (Konsistenz) setzt. Das sich in diesem Ansatz ausdrückende Selbstverständnis der Mathematiker liegt noch diesseits spezifischer Unterschiede in den philosophisch-wissenschafts-theoretischen Deutungen einer mit wissenschaftlichem Anspruch auftretenden Mathematik. Eine besonders pointierte Form (Janich 1992) dieser weit über die Mathematik hinaus verbreiteten arbeitspraktischen Sichtweise zur Methodologie des Definierens bieten David Hilberts (1903) berühmte *Grundlagen*

---

[2] Vgl. dazu und für einen ersten Überblick insgesamt Thiel (1995) insbesondere S. 273 – 302.

[3] Für einen ausführlichen Überblick über die formalistische Sichtweise vgl. Thiel (1995), S. 20 *ff*.

der Geometrie. Selbstverständlich unterstreicht diese Position den hypothetischen Charakter mathematischer Theorien; ihr geht es nicht um inhaltliche Geometrie als Theorie des praxisleitenden Anschauungsraums, ihr geht es um Implikationszusammenhänge zwischen bereits als bewiesen unterstellten oder als Axiom gesetzten Behauptungen; die inhaltliche, empirisch kontrollierbare Richtigkeit ihrer Ausgangssätze, aufgefasst als Interpretation in der Wirklichkeit, bleibt unerheblich.

„Mathematische Definitionen“ – Lernziele, Grobverlauf und didaktischer Kommentar

Mit diesem Lernszenario werden drei Ziele verfolgt: Die Studierenden sollen

- am Beispiel des Begriffs "Quadrat" die Definitions-Zirkularität bzw. den Definitionsabbruch in einem mathematischen Fachlexikon erfahren;
- Definitionszirkel als Problem für eine wissenschaftlichen Ansprüchen genügende Mathematik erkennen;
- wissen, wie der *working mathematician* das Problem der Definitionszirkel umgeht bzw. den Definitionsabbruch methodisch löst.

Phase 1 (Problematisierung): In diesem Lernszenario wird die Lerngruppe zunächst in Kleingruppen eingeteilt. Diese erhalten in einer *ersten Phase* den folgenden Arbeitsauftrag:

Aufgabe 1: Erklären Sie mit möglichst einfachen Worten den Begriff “Quadrat” (stellen Sie sich etwa vor, dass der Adressat Ihrer Erklärung ein geometrisch vollkommen Unwissender ist). Dazu recherchieren Sie in einem Lexikon erste definierende Begriffe sowie die sie erklärenden grundlegenderen/einfacheren Begriffe. Entwickeln Sie dazu ein Pfeildiagramm, das Ihre gefundenen Begriffe hierarchisch ordnet. Stellen Sie das Pfeildiagramm auf einem Plakat dar und bereiten Sie eine Präsentation Ihrer Ergebnisse vor.

Zunächst wird mit Aufgabe 1 auf enaktive Weise und textfrei ein kognitiver Konflikt erzeugt: Im Umgang mit einem anerkannten Fachlexikon erfahren und erkennen die Studierenden, dass schon die Definitionsversuche für besonders einfache und vertraut erscheinende Begriffe wie beispielsweise den des Quadrats zirkulär verlaufen oder in einen unendlichen Regress führen – im Widerspruch zum gängigen Verständnis von Mathematik als einer Wissenschaft, deren Erkenntnisse als unbezweifelbar gewiss und letztlich objektiv nachvollziehbar gelten. Die Studierenden erfahren auf diese Weise, wie sie von Lexikoneintrag zu Lexikoneintrag durchgereicht werden, ohne auf ein absehbares Fundament geometrischer (Grund-)Begriffe zu stoßen. Im Gegenteil: Die Zahl der klärungsbedürftigen geometrischen Fachwörter nimmt rasch zu, obwohl doch die auftauchenden Begriffe geometrisch immer „einfacher“ zu werden scheinen. Schließlich werden die Definitionszirkel immer offensichtlicher, wenn die Erklärung auch der „einfachsten“

Begriffe Punkt, Gerade, Ebene nicht unabhängig voneinander und ohne zusätzliche Relationen angegeben werden kann.

Gerade das "Quadrat" lässt verschiedene Recherchewege offen, die aber alle schnell in die gebetsmühlenartigen Begriffskreisläufe einmünden und so den Studierenden die Unlösbarkeit der gestellten Aufgabe gleichsam einhämmern. Spätestens das Suchprotokoll, das die recherchierten Begriffe in der jeweiligen Suchreihenfolge enthält, wird durch die sich wiederholenden Begriffseinträge zur augenöffnenden Visualisierung eines Begriffszirkels. Dass diese Zirkel in einem Fachbuch für Mathematik enthalten sind, unterstreicht dabei nur die Problematik zirkulärer Definitionen in der Mathematik. Nur die Erklärungen der Grundbegriffe Punkt, Gerade und Ebene sind als axiomatische Bausteine gegeben und etwas schwieriger nachzuvollziehen.

Erwartungsgemäß wird sich ein gewisses Unbehagen bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern einstellen: Ist sich selbst die Geometrie ihrer (Grund-)Begriffe nicht sicher? Dieses Unbehagen mag zunächst konstruiert erscheinen, ist es aber nicht. Denn wissenschaftstheoretisch führte es zur axiomatischen Methode, welche die „Auflösung dieses Unbehagens“ für die Mathematik darstellte. Diese Lösung war aber in der Geschichte der Mathematik keineswegs offensichtlich und sollte deswegen in der Lehrpraxis auch nicht so dargestellt werden.

Deswegen soll im weiteren Verlauf der Lernumgebung explizit werden, über welche Arbeits- und Denkstrategien der *working mathematician* hier verfügt. Dass dies vor allem für Lehramtsstudierende wichtig ist, wird klar, wenn man sich die Tätigkeit des *lokalen Ordnens* als Theoriebildung im Kleinen vorstellt. Hier ist gerade für Schülerinnen und Schüler eine klare Auszeichnung der „Basisbegriffe“ wichtig, um fachlich aufbauend und intellektuell ehrlich vorzugehen.

Die Sichtung der Ergebnisse von Aufgabe 1 im Plenum beginnt deshalb zunächst ggf. mit einer ersten Thematisierung dieser vielleicht von einigen mathematikbegeisterten Studierenden auch als erschreckend und frustrierend erlebten Lexikonarbeit und der dabei möglicherweise auch aufgetretenen Affekte.

Um bei den Studierenden den Eindruck einer im Prinzip vollständigen und repräsentativen Bilanzierung mathematischer Definitionsverfahren zu erzeugen, werden am Ende der Gruppenarbeitsphase nicht weiter lexikalisch zurückverfolgte Begriffe gemeinsam im Plenum analysiert (auch im Sinne einer zusätzlichen Sicherung und Festigung). Eine auch nur ansatzweise gründliche Begriffsrecherche wird auf die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene zurückführen, die als Grundbegriffe der Geometrie allen anderen Figuren und Beziehungsbegriffen zugrunde liegen.

Schließlich werden die entdeckten Begriffszirkel von unterschiedlichen Studierenden auf je verschiedenem Kompetenzniveau benannt. An dieser Stelle ist zu erwarten, dass sich verschiedene oder alle Denkfiguren aus dem Münchhausen-Trilemma in den Diagrammen wiederfinden (z.B. Zirkeldefinitionen). Als möglichen Impuls zur Bündelung und Fokussierung der Ergebnisse bietet sich an:

Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen den präsentierten Ergebnissen und dem Münchhausen-Trilemma her.

Die erste Phase soll mit einem Fazit oder einer Frage von den Studierenden abgeschlossen werden. Erwartbare und in hohem Maße wünschenswerte Formulierungen der Studierenden könnten sein:

- „Mathematik scheint zu funktionieren, obwohl sie zirkuläre oder undefinierte Begriffe enthält."
- „Gibt es in der Mathematik perfekte Definitionen?"
- „Wenn in der Mathematik Begriffszirkel unauflösbar wären, wie könnte sie denn dann überhaupt gelernt werden, einen Anfang nehmen und gelehrt werden?"
- „Würde es denn Mathematik überhaupt geben, wenn Definitionen Zirkel enthielten?"

Phase 2 (Metaperspektive): Die Diskussion wird sich erwartungsgemäß zur Frage nach den methodologischen Grundsätzen eines wissenschaftlich arbeitenden Mathematikers öffnen und damit zur *zweiten Phase* des Lernszenarios überleiten.

Aufgabe 2.1: Diskutieren Sie in der Gruppe, ob zirkuläre Begriffsbildungen in der Mathematik vermeidbar sind. Wenn ja, entwickeln Sie entsprechende Vorschläge und erläutern Sie diese am Beispiel des Quadrats. Wenn nein, formulieren Sie eine Begründung in Form eines Thesenpapiers.

Aufgabe 2.2: Vergleichen Sie Ihren Lösungsvorschlag mit dem für das Selbstverständnis der meisten Mathematiker und Mathematikerinnen auch heute noch symptomatischen Ansatz von David Hilbert[4].

> „Die Geometrie bedarf zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze, genannt Axiome der Geometrie. Diese Sätze werden ohne Beweis und ohne weiteren Erklärungsbedarf als gegeben angenommen, alle anderen Sätze der Geometrie müssen und können aus ihnen durch logisches Schließen und ohne Zuhilfenahme weiterer Annahmen gewonnen werden.
> Wir denken uns dazu drei verschiedene Systeme von Dingen: Die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte, die des zweiten Geraden und die des dritten Ebenen. Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie ‚liegen auf', ‚bestimmen', ‚zwischen' oder ‚parallel'; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch 20 Axiome der Geometrie. Diese lauten beispielsweise ‚Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen stets eine Gerade.' oder ‚Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt gemeinsam.'

[4]Frei nach (Hilbert 1903), Seite 1f, angereichert um die populäre Bierseidel-Anekdote (Blumenthal 1935, S. 409f).

> Man kann dabei statt ‚Punkte, Geraden und Ebenen' jederzeit auch ‚Tische, Stühle und Bierseidel' sagen; es kommt nur darauf an, dass die Axiome erfüllt sind."

Die Studierenden sollen nun in der folgenden Aufgabe herausarbeiten, was die gewonnenen Erkenntnisse für ihre eigene Arbeitspraxis bedeuten können: etwa, besonders darauf zu achten, Voraussetzungen und Behauptungen gedanklich zu trennen, und in der mathematischen Arbeit von einem Begriff nur noch diejenigen Eigenschaften zu nutzen, welche tatsächlich in der Definition angelegt sind.

Aufgabe 2.3: Haben die methodologischen Überlegungen, welche Sie zur Begriffsbildung in der Mathematik angestellt haben, Konsequenzen dafür, wie Sie Mathematik verstehen und lernen wollen?

In der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabe können die Schwierigkeiten in der Überwindung solcher (Definitions-)Probleme offensichtlich werden: Es bedarf nämlich gewisser Normen, auf die man sich einigen muss und die als wissenschaftliche Praxis Akzeptanz finden müssen. Insbesondere schließt sich hier auch der Kreis mit der ersten Lernumgebung: Dadurch, dass gewisse Begriffe als Grundbegriffe ausgezeichnet sind und nur deren erfahrungsunabhängige Relationen zueinander betrachtet werden, löst man sich von der Erfahrungswelt und legt sich auf eine formal-logische Behandlung fest. Nun wird auch die Beweisbedürftigkeit von scheinbar offensichtlichen gleichwohl beweisbedürftigen (z.B. geometrischen) Sätzen einsehbar.

In einer abschließenden Diskussion werden die Ergebnisse schließlich gebündelt. Um die Studierenden nicht in der aufgemachten Aporie stehen zu lassen und den Mathematikunterricht schlimmstenfalls dem Verdacht der Sinnlosigkeit auszusetzen, aber auch um bestimmte Aspekte der erarbeiteten Definitionslehre mit Blick auf die innermathematischen Anwendungen (strenge Unterscheidung zwischen Voraussetzung und Behauptung, Beweisverpflichtung für mathematische Behauptungen) zu betonen, werden die Studierenden mit der modernen Variante eines euklidischen Mathematikverständnisses vertraut gemacht; es handelt sich um die Position des Formalismus, wie sie von David Hilbert paradigmatisch vertreten wurde. Die Kernthesen seiner Position lassen sich so reduzieren, dass sie vor dem neuerworbenen Problemverständnis der Studierenden nachvollziehbar sind und im Sinne einer Faustregel zum guten Umgang mit mathematischen Definitionen am Anfang des Mathematikstudiums vereinfacht werden können.

Fazit und Ausblick

In diesem Artikel wurden Lernszenarien vorgestellt, welche den Übergang Schule – Hochschule erleichtern sollen. Dabei sehen wir den Übergang vor allem in einem „kulturellen" Unterschied – von einer wissenschaftspropädeutischen zu einer wissenschaftlichen Sichtweise. Durch die theoretische Erörterung einiger Grundprinzipien der Wissenschaft Mathematik, wurde auf dieser normativen Basis das Design für die Lernumgebungen begründet. Das Design zeichnet sich vor allem durch seinen dialogischen Charakter aus und ist argumentationstheoretisch verankert.

Wir behaupten, dass die Diskussion und explizite Offenlegung der methodologischen Grundlagen der Mathematik als Wissenschaft eine Grundvoraussetzung ist, um den Übergang zu meistern, denn um mathematisch zu arbeiten, ist das bewusste Assimilieren der Methoden vonnöten. Dabei müssen die Studierenden angeleitet werden, den methodologischen Status ihrer Strategien als Normen bzw. als Ideal anzuerkennen, welche erlauben, Wissen als wissenschaftlich objektiv zu rechtfertigen. Insofern kann solch ein Ansatz auch das Lernen von Mathematik selbst lernbar machen.

Deswegen sollte ein mathematischer Vorkurs stets zwei Ziele verfolgen, nämlich zum einen die (Weiter-)Entwicklung und das Trainieren mathematischer Fertigkeiten und mathematischen Grundwissens und zum anderen ein explizites Training zum Lernen von Mathematik von einem wissenschaftlichen Standpunkt aus.

Unsere ersten Erfahrungen in Ludwigsburg (im Oktober 2012) ermutigen uns, diesen Ansatz weiter zu verfolgen. Die Rückmeldungen der Studierenden geben Hinweise darauf, dass das vorgestellte Konzept die Haltung der Studierenden in Richtung eines wissenschaftlichen Arbeitens beeinflusst:

„Ich habe eine andere Sicht zu Mathe bekommen, in dem Sinn, dass die Sachen nicht einfach so sind, sondern man bei allem fragen kann und darf und die Kinder das ja auch tun werden."

„gut finde ich, dass man motiviert wurde und man einen anderen Blickwinkel auf die Mathematik bekommen hat (Rechenregeln hinterfragen: Warum ist das so?)"

„Die Sichtweise auf Mathematik wurde geändert (vgl. Schule)"

„Perspektivwechsel von Schüler zu Lehrer (inwiefern ich das Angewandte später als Lehrer brauche)"

Diese Kommentare zeigen exemplarisch, wie wichtig unsere Ansätze gerade für Lehramtsstudierende sind. Diese sollten später ihren Schülerinnen und Schülern Lernumgebungen ermöglichen, die die Diskussion von Fragen nach Rechtfertigung und der Adäquatheit der Mittel auf elementarem Niveau zulassen und insofern zu einem mündigen Umgang mit Mathematik und deren Mitteln führen.

Derzeit entwickelt das Forscherteam weitere Lernumgebungen, die in einem nächsten Durchlauf eingesetzt und reflektiert werden sollen. Unsere Arbeit wird dabei von folgenden Forschungsfragen geleitet: Führen die metakognitiven Betrachtungen tatsächlich zu einem verständigeren Umgang mit mathematischen Methoden und Strategien? Werden die Studierenden durch solch einen Zugang in die Lage versetzt, das Beweisen oder Definieren nicht nur auf normativer Basis zu verstehen und zu assimilieren, sondern selbst zu beweisen bzw. zu definieren (Produkt versus Prozess)? Wie lässt sich die Haltungsänderung im Übergang der „Kulturen" in der Lehrpraxis charakterisieren?

Literaturverzeichnis

Albert, H. (1991). Traktat über kritische Vernunft. Tübingen: J.C.B. Mohr.

Blumenthal, O. (1935). Lebensgeschichte. In: Hilbert, D. (1935), Gesammelte Abhandlungen, dritter Band (388-429). Berlin: Springer.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? Der Mathematikunterricht, 9(4), 5-29.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. Educational Studies in Mathematics, 67, 237-254.

Hentig, H. v. (2003). Wissenschaft. Eine Kritik. Beltz.

Hilbert, D. (1903). Grundlagen der Geometrie. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Leipzig: Teubner

Hoffkamp, A., Schnieder, J., Paravicini, W. (2013). Mathematical enculturation – Argumentation and proof at the transition from school to university. In: Proceedings oft he 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Antalya, Turkey.

Janich, P. (1992). Grenzen der Naturwissenschaft. Erkennen als Handeln. München: Beck.

Janich, P. (2001). Logisch-pragmatische Propädeutik. Ein Grundkurs im philosophischen Reflektieren. Weilerswist: Velbrück Wissenschaft.

Lorenzen, P. (1968). Normative Logic and Ethics. Mannheim/Zürich: Bibliographisches Institut.

Mainzer, K. (2004). Geometrie. In: J. Mittelstraß (Ed.), Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie 1 (738 – 739). Stuttgart, Weimar: Metzler.

Tetens, H. (2010). Argumentieren lehren. Eine kleine Fallstudie. In: Meyer, K. (Ed.), Texte zur Didaktik der Philosophie (198-214). Stuttgart: Reclam.

Thiel, Ch. (1973). Das Begründungsproblem der Mathematik und die Philosophie. In: F. Kambartel & J. Mittelstraß (Ed.), Zum normativen Fundament der Wissenschaft (90-114). Frankfurt a. M.: Athenäum.

Thiel, Ch. (1995). Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Vollrath, H.-J., Roth, J. (2012). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a ‘design science’. Educational Studies in Mathematics, 29(4), 355-374.