Entwicklung qualitativ–inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen

Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse

vorgelegt von
Andrea Hoffkamp
aus Berlin

Von der Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktorin der Naturwissenschaften
– Dr. rer. nat. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. Stefan Felsner
Berichter: Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp
Prof. Dr. Andreas Filler

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 4. November 2011

Berlin 2011

D 83

DANKE!

Zuallererst gilt mein Dank Ulrich Kortenkamp für die Betreuung der Arbeit und die vertrauensvolle und freundschaftliche Zusammenarbeit. Er ließ mir alle Freiheiten meinen Weg zu finden und wusste gleichzeitig, wann es nötig war mir einen Anstoß oder mehr Zeit und Raum zu geben. Danke Ulli für alles!

Andreas Filler danke ich für seine Bereitschaft als Gutachter für diese Arbeit zur Verfügung zu stehen, aber noch mehr für sein Interesse und seine wertvollen und ermunternden Anregungen und Gespräche diese Arbeit betreffend.

Für Anregungen bin ich auch Susanne Prediger und Klaus-Peter Eichler dankbar. Susanne verdanke ich wertvolle inhaltliche Hinweise und Klaus-Peter mannigfache Ratschläge bezüglich des empirischen Teiles der Arbeit.

Besonderen Dank schulde ich meinen Mitstreiterinnen und Mitstreitern Silke Ladel, Axel Blessing, Chris Dohrmann, Swetlana Nordheimer und Katharina Klembalski. Sie standen mir immer zur Seite, wenn ich einen Rat brauchte, wenn es etwas zu lesen gab oder man einfach ein paar aufmunternde Worte nötig hatte.

Andreas Fest kann ich nicht genug für eine unglaublich fruchtbare und kreative Zusammenarbeit danken. Ohne seine Programmierfähigkeiten gäbe es die Applikationen der entstandenen Lernumgebungen in dieser Form nicht.

Zu großem Dank bin ich auch Stefan Felsner verpflichtet. Er hat mich als fachfremdes Mitglied in seine Arbeitsgruppe aufgenommen. Seine Tür stand immer offen, und die Gespräche und Diskussionen mit ihm haben meine Arbeit um viele Aspekte ergänzt. Vielen Dank für Dein Interesse und für Deine Unterstützung!

Gleichzeitig danke ich den Menschen, denen ich in der Arbeitsgruppe tagtäglich begegnet bin, und durch die die Arbeit so angenehm als möglich war: Kolja für Gespräche am Fenster, Torsten für den gemeinsamen Endspurt, Daniel für seine Aufforderung einfach mal klettern zu gehen, Thomas für das Korrekturlesen englischsprachiger Artikel, Veit für das Lesen in letzter Minute, Marie für ablenkende Gespräche und Irina für leckere Muffins.

Mein Dank gilt auch allen Schülerinnen, Schülern und Lehrkräften der Schulen, die mir die Vorstudien und Studien ermöglicht haben: die Luise-Henriette-Schule in Berlin-Tempelhof, die Robert-Jungk-Oberschule in Berlin-Wilmersdorf, das Arndt Gymnasium in Berlin-Dahlem, das Eckener Gymnasium in Berlin-Tempelhof und das Archenhold Gymnasium in Berlin-Treptow. Vielen Dank für die Teilnahme an den Studien und das über das übliche Maß hinausgehende Engagement und Interesse aller Beteiligten!

Andrea Hoffkamp
Berlin, August 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Anfänge

Als ich meine Arbeit bei Ulrich Kortenkamp begann, veröffentlichte er gerade mit Jürgen Richter-Gebert die Dynamische Geometrie Software (DGS) *Cinderella* in der Version *.2*. Eine Neuerung dieser Version bestand in der Einbindung einer Programmierschnittstelle. Durch Nutzung der eingebauten funktionalen Scriptsprache *CindyScript* ergaben sich ganz neue Möglichkeiten über rein geometrische Themen hinaus [FK09, Fes10, RGK10]. Insbesondere eröffneten sich neue Chancen der interaktiven Arbeit mit *Funktionen*. Hieraus entwickelten sich zunächst einige sehr grobe Grundfragen, die den Ausgangspunkt bildeten:

- *Welche Möglichkeiten des DGS-Einsatzes im Bereich „Funktionen" bzw. „Funktionales Denken" sind gegeben und was zeichnet diese besonders aus?*
- *Wie kann man diese Möglichkeiten gewinnbringend nutzen?*

Beispielsweise konnte man mannigfache funktionale Zusammenhänge auf verschiedenste Art und Weise in Applikationen visualisieren. Das führte zu Fragen wie:

- *Wie müssen solche Applikationen und applikationsbasierte Lernumgebungen gestaltet sein, um Lernen zu ermöglichen? Was ist hier sinnvoll und was nicht?*
- *Was **sehen** Nutzer der Applikationen, wenn sie Objekte bewegen?*

Inhaltliche Fokussierung

Die inhaltliche Fokussierung erfolgte im weiteren Verlauf der Arbeit fast automatisch in eine bestimmte Richtung. Eine Stärke von DGS-basierten Applikationen liegt in der Dynamisierung, die von Simultanität in verschiedenen Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten geprägt ist.

Basierend auf der Lektüre diverser Arbeiten zu Schwierigkeiten mit dem Funktionsbegriff und mit funktionalem Denken stellte ich einige Testaufgaben zusammen, die Mathematikstudierenden des ersten Semesters an der TU Berlin, sowie Schülerinnen und Schülern eines Berliner Gymnasiums am Ende der 10. Klasse gestellt wurden. Die Lösungen der Testaufgaben bestätigten die Ergebnisse diverser anderer Autoren. Es zeigt sich, dass viele Lernende funktionale Abhängigkeiten als rein „statische" Phänomene wahrnehmen, also deren *Zuordnungsaspekt* sehen, während eine „dynamische Sicht" (*Änderungsaspekt*) und eine Sicht auf „Funktion als Objekt" (*Objektaspekt*) oft Schwierigkeiten bereitet. Die Nutzung von DGS ermöglicht aber die Hervorhebung der beiden letztgenannten Aspekte.

Eine typische Verwendung von Funktionen liegt gerade in der Beschreibung von Änderungsverhalten, welches seinerseits natürlicherweise zu Konzepten der Analysis führt. Durch spezielle Gestaltung der interaktiven Visualisierungen kann man den *Änderungsaspekt* und den *Objektaspekt* funktionaler Abhängigkeiten „erlebbar" machen und dadurch einen intuitiven Zugang zu Konzepten der Analysis schaffen. Dies ist insofern von Bedeutung, als dass dem Analysisunterricht häufig dessen Kalkülorientierung vorgeworfen wird.

Somit hat sich für die Arbeit folgender inhaltlicher Fokus ergeben: Die Entwicklung und Umsetzung interaktiver Lernumgebungen, die – basierend auf der Idee des dynamischen Darstellungstransfers bei Funktionen – einen inhaltlich-qualitativen Zugang zu Konzepten der Differential- und Integralrechnung in einem propädeutischen Analysisunterricht ermöglichen sollen und vor der Behandlung des Kalküls eingesetzt werden können.

Der Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit weist zwei große Teile auf: Der erste Teil dient der Entwicklung und Darstellung der begrifflichen und (lern-)theoretischen Grundlagen. Dabei wird der begriffliche Rahmen abgesteckt und begründet. Darauf basierend werden die Designprinzipien der interaktiven Lernumgebungen vorgestellt und analysiert. Diese werden schließlich lerntheoretisch verortet, um dann im zweiten Teil der Arbeit einer empirischen Studie unterzogen zu werden.

Kapitel 1: Funktionales Denken und Analysis

In Kapitel 1 arbeite ich die zugrunde liegenden Begrifflichkeiten heraus, woraus schließlich die Problemlage und die Grobziele der Arbeit entwickelt werden. Der Begriff des *funktionalen Denkens* und sein Bezug zur Analysis ist dabei von zentraler Bedeutung. Es wird begründet, inwiefern der Begriff *funktionales Denken*, so wie er in der Meraner Reform (1905) formuliert wurde, als Grundlage für diese Arbeit dient und warum dies insbesondere zu Konzepten der Analysis führt.

Weiterhin werden besondere Schwierigkeiten von Lernenden mit dem Funktionsbegriff und funktionalem Denken beschrieben. Diese Schwierigkeiten führen schließlich zur Formulierung der Problemlage und der Grobziele der Arbeit, welche als Beitrag zu einem qualitativ-inhaltlichen Zugang zur Differential- und Integralrechnung zu verstehen ist. Die Lernumgebungen sollen es ermöglichen Konzepte der Analysis in einem propädeutischen Analysisunterricht zu erfahren und zu entwickeln, bevor das Kalkül behandelt wird.

Kapitel 2: Grundideen und Gestaltungsprinzipien der interaktiven Visualisierungen

In Kapitel 2 beschreibe und erörtere ich die Grundideen und Gestaltungsprinzipien der interaktiven Lernumgebungen anhand der Lernumgebung *Dreiecksfläche*.

Die interaktiven Visualisierungen akzentuieren die dynamische Komponente des funktionalen Denkens durch *dynamischen Repräsentationstransfer zwischen Situation und Graph*. Durch eine *zweistufige dynamische Visualisierung* wird dabei sowohl der *Änderungsaspekt* als auch der *Objektaspekt* funktionaler Abhängigkeiten hervorgehoben und erlebbar gemacht. Dabei stehen qualitative Betrachtungen funktionaler Abhängigkeiten und deren Beschreibung im Vordergrund. Es zeigt sich, dass die Lernumgebung *Dreiecksfläche* zu einer qualitativen Entdeckung von Funktionseigenschaften wie „Monotonie“ oder „Existenz einer Wendestelle“ und derer qualitativen Beschreibung führen kann. Darüber hinaus zeigt die Lernumgebung über einen propädeutischen Zugriff auf die Analysis auch ihre Qualitäten hinsichtlich des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Auf die Darstellung der Gestaltungsprinzipien folgt eine Erörterung der Rolle von Visualisierungen in Mathematik und Mathematikunterricht allgemeinerer Natur, durch die weitere Aspekte ergänzt werden. Abschließend wird die Herangehensweise im Vergleich zu anderen Ansätzen mit Technologieeinsatz beim Thema Funktionen und Analysis abgegrenzt und eingeordnet.

Kapitel 3: Die Lernumgebungen und deren mathematikdidaktischer Hintergrund

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden in Kapitel 3 zwei weitere Lernumgebungen vorgestellt, die nach den in Kapitel 2 dargestellten Grundprinzipien gestaltet worden sind. Die drei Lernumgebungen *Dreiecksfläche*, *Die Reise* und *Einbeschriebene Rechtecke* werden auf ihr mathematisches und mathematikdidaktisches Potential im Hinblick auf die Entwicklung von Vorstellungen bezüglich Konzepten der Differential- und Integralrechnung hin analysiert. Dabei wird erläutert, welche lokalen und globalen Funktionseigenschaften sich in der Dynamik entdecken lassen und inwieweit dies zu Konzepten der Analysis hinführt.

Kapitel 4: Qualitative Studie – Lerntheoretischer Rahmen und Studiendesign

Kapitel 4 beginnt mit der Darstellung des lerntheoretischen Rahmens, der den Kontext für die genauen Forschungsfragen und die empirische Studie bildet. Dabei lege ich den sogenannten *Conceptual-Change-Ansatz* zugrunde und begründe, warum dieser einen adäquaten theoretischen Rahmen liefert. Vor diesem lerntheoretischen Hintergrund werden drei Forschungsfragen formuliert und begründet. Diese zielen auf die Beantwortung der Grundfrage, ob und wie die Lernumgebungen einen Beitrag zu Konzeptualisierungsprozessen im Bereich der Analysis leisten können. Zusätzlich wird die Frage nach möglichen *epistemologischen Hürden*, die bei der Arbeit mit den Lernumgebungen sichtbar werden, gestellt, und deren produktiver Wert für die unterrichtliche Entwicklung von Vorstellungen und Konzepten erläutert.

Anschließend folgt die Darstellung des Studiendesigns und der Rahmenbedingungen. Die Lernumgebungen wurden in zwei Versuchsklassen am Ende der 10. Klasse, also vor der Einführung des Kurvendiskussionskalküls, eingesetzt. Dabei habe ich verschiedenes Auswertungsmaterial (Videoaufnahmen, Arbeitsbögen, Fragebögen) gesammelt. Das Hauptauswertungsmaterial bildeten Videos diverser Schülerpaare am Computer, die nach den Grundprinzipien der *interpretativen Unterrichtsforschung* analysiert wurden. Die Analysen wurden durch Antworten der Schülerinnen und Schüler auf den Arbeits- und Fragebögen ergänzt. Kapitel 4 beschreibt die methodischen Aspekte der Studie und das zugrunde liegende Auswertungsverfahren.

Kapitel 5: Qualitative Studie – Analysen und Ergebnisse

Kapitel 5 dient der Darstellung der Analysen und Ergebnisse der qualitativen Studie. Anhand der Forschungsfragen werden vielfältige Phänomene dargestellt, die zeigen, wie die Schülerinnen und Schüler unter Nutzung der Lernumgebungen Vorstellungen zu propädeutischen Analysis-Konzepten entwickelt und formuliert haben. Einerseits liegt der Fokus dabei auf den Vorstellungen, die in der Interaktion der Schülerinnen und Schüler untereinander und mit dem Computer formuliert und entwickelt worden sind. Andererseits steht die Rolle der Lernumgebungen mit der zweistufigen Variationsmöglichkeit im Zentrum der Analyse. Es werden einige interessante *epistemologische Hürden* identifiziert, die Hinweise auf eine didaktische Weiterführung im Sinne einer produktiven Nutzung dieser Hürden im Unterrichtsverlauf geben.

Auch ungünstige Effekte der Lernumgebungen werden deutlich. Sie verweisen auf die Stellen, die eine erhöhte Aufmerksamkeit erfordern. Gleichzeitig wird aufgezeigt, welche Impulse diesen Effekten entgegengestellt wurden bzw. werden können.

Die Ergebnisse sind so zu lesen, dass sie die didaktische Wahrnehmung und gleichzeitig die Sensibilisierung für Unterrichtssituationen schärfen können. Darüber hinaus geben die Ergebnisse Hinweise auf mögliche Weiterführungen im Unterricht.

Das Kapitel wird abgeschlossen durch eine Zusammenfassung der Ergebnisse und Analysen. Dabei wird ein Ausblick auf weitere Forschungsfragen und eine mögliche Weiterführung der Arbeit gegeben.

Kapitel 6: Fortsetzungsideen und Weiterführung

Zum Abschluss der Arbeit werden in Kapitel 6 einige Fortsetzungsideen für den Unterricht entwickelt, die sich aus der Studie und dem theoretischen Rahmen der Arbeit ergaben. Die Ideen verfolgen den qualitativ-inhaltlichen Zugang zur Analysis weiter. Manche der Ideen wurden schon im Unterricht – zumindest ansatzweise – umgesetzt, so dass von einigen Erfahrungen berichtet werden kann.

Kapitel 1

Funktionales Denken und Analysis

Der Begriff *funktionales Denken* und seine Stellung in Mathematik und Mathematikdidaktik ist zentral für diese Arbeit. Insbesondere interessiert die Beziehung zwischen *funktionalem Denken* und *Analysis*. In Kapitel 1 wird der Begriff und seine Stellung in Bezug zur Analysis beleuchtet (Abschnitt 1.1). Ziel des Kapitels ist keinesfalls eine lückenlose Darstellung und Abdeckung aller Arbeiten und Facetten zum funktionalen Denken, sondern die Darstellung derjenigen Aspekte und Facetten, die für diese Arbeit relevant sind und als theoretische Basis dienen.

Anhand ausgewählter Probleme und Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern (Abschnitt 1.2) werden im Anschluss die Problemlage und die Grobziele der Arbeit herausgearbeitet (Abschnitt 1.3).

1.1 Funktionales Denken – Zum Begriff

1.1.1 Funktionales Denken und Meraner Reform

Der Begriff *funktionales Denken* wird das erste Mal in der Meraner Reform von 1905 genannt [Krü00a], [Krü00b]. Es handelte sich hierbei um eine Reform des gesamten Komplexes mathematisch–naturwissenschaftlichen Unterrichts unter der Initiation von Felix Klein. Sie ist im Zusammenhang mit der Zeit der Hochindustrialisierung während des Kaiserreiches (1871-1918) zu sehen, und des damit einhergehenden Bedarfes an Techniker- und Ingenieursnachwuches:

> „Das neue Jahrhundert wird beherrscht durch die Wissenschaft, inbegriffen die Technik, und nicht wie das vorige durch die Philosophie. Dem müssen wir entsprechen.“
> (Wilhelm II., Görlitz 29.11.1902, zitiert nach [Ull99], S. 348)

In der Meraner Reform wurde die *Erziehung zum funktionalen Denken* als Sonderaufgabe gefordert. Gemeint war eine gebietsübergreifende Denkgewohnheit im Sinne einer fundamentalen Idee, die über das Thema Funktionen im Algebraunterricht hinaus den gesamten Mathematikunterricht prägen sollte. Mathematische Teilgebiete sollten durch einen übergeordneten Begriff fusioniert werden. Es ging um ein Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten immer mit Blick auf Bewegung und Veränderlichkeit. Krüger spricht deswegen auch von *kinematisch*-funktionalem Denken [Krü00b]. Der „Blick auf Bewegung und Veränderlichkeit“ war dabei sehr umfassend gemeint und bezog sich auf alle mathematischen Gebiete. So sollten Beziehungen zwischen geometrischen Objekten durch fortwährende Betrachtung von Änderungen (Lage- und Größenänderungen) untersucht und eingeordnet werden. Bezogen auf das Thema Funktionen im Algebraunterricht wurde der Nutzen von Funktionen zur Beschreibung von Änderungen hervorgehoben. Beispielsweise die Frage, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer anderen Größe auswirkt (im Sinne von Kovariation von Werten) bis hin zur Untersuchung von Funktionen als Ganzes im Zusammenhang und der Untersuchung des Änderungsverhaltens mit Mitteln der Analysis.

> „Zusammenhängende Betrachtung der bisher aufgetretenen Funktionen in ihrem Gesamtverlauf nach Steigen und Fallen (unter eventueller Heranziehung der Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals), mit Benutzung zahlreicher Beispiele aus Geometrie und Physik, insbesondere der Mechanik.“
> (Meraner Lehrplan 1905 [Gut08], S. 111)

Die Differential- und Integralrechnung, die im Zuge der Meraner Reform in die Lehrpläne der *höheren Lehranstalten* aufgenommen wurde, sollte Höhepunkt in einem organisch aufgebauten Mathematikunterricht sein, und die Erziehung zum funktionalen Denken eine geistige Vorbereitung im Sinne einer Propädeutik zur Infinitesimalrechnung:

> „Mit der didaktischen Konzentration um den Funktionsbegriff herum ist keine moderne Abbildungsgeometrie gemeint, sondern das Betrachten von Veränderungen an Figuren unter Berücksichtigung der natürlichen Wahrnehmung und ihrer Entwicklungsstufen. Die Konkretisierung der Meraner Vorschläge führt somit letztlich zu einer psychologisch–methodischen Milderung von Strenge und zu einer höheren Anerkennung der Anschauung, vor allem in den unteren Klassen der Schulen.
> (...) Eigentlich geht es im Hintergrund bei der ganzen Angelegenheit um die Einführung des Analysis–Unterrichts in den oberen Klassen der höheren Schulen (Schubring 1987) und damit um eine Verankerung funktionalen Denkens.“
> [And88], S. 67

Die Sichtweise auf funktionales Denken als geistige Vorbereitung der Analysis, bzw. auf Analysis als Höhepunkt mathematischer Bildung in der Schule ist nicht auf den deutschsprachigen Raum beschränkt. So schreibt beispielsweise David Tall [Tal96], S. 289:

> „One purpose of the function is to represent *how things change*. With this meaning it is natural to move on to consider the calculus concepts of the *rate of change* (differentiation) and *cumulative growth* (integration) together with the remarkable fundamental theorem of calculus that tells us that differentiation and integration are essentially inverse processes."

Tall [Tal96] ordnet der Analysis zwei Funktionen zu: Zum einen ist Analysis Höhepunkt mathematischer Bildung und zum anderen ist sie Portal zu theoretischer Weiterentwicklung. Sie nimmt somit eine Stellung zwischen elementarer und höherer Mathematik ein.

1.1.2 Funktionales Denken bei Vollrath

Die fundamentale Idee des funktionalen Denkens im Sinne der Meraner Reform kam in den 60er und 70er Jahren im Zuge der „New Math"–Bewegung aus der Mode. Diese Bewegung war von einer rein axiomatisch–systematischen Herangehensweise geprägt und unterlag dem Irrglauben, dass im Mathematikunterricht die Begriffe und deren Definitionen an den Anfang gestellt werden müssen, damit man ein klare Basis habe. Als Folge davon wurden Funktionen mengentheoretisch als Relationen eingeführt, so dass der kinematische Aspekt und die heuristisch–genetische Herangehensweise der Meraner Reform vollkommen in den Hintergrund traten [Krü00b], [Vol89].

Erst in den 80ern gewann der Begriff *funktionales Denken* in Deutschland wieder an Bedeutung. Ein Zeichen dieser Bedeutungsrückkehr ist der Artikel von Vollrath [Vol89]. Vollrath beschreibt funktionales Denken als einen offenen didaktischen Begriff, dessen Weiterentwicklung zu einer permanenten Aufgabe der Didaktik gehört. Er definiert:

> „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist."

Durch diese Definition bindet er das funktionale Denken eng an den Begriff Funktion, und man kann an dieser Stelle mit der Selbstreferentialität dieser Definition durchaus hadern. Vollraths Definition ist weit weniger umfassend als das, was in der Meraner Reform gemeint war. Diese Einschränkung nimmt er bewusst vor, weil er glaubt, dass die umfassende Sicht der Meraner Reform die didaktische Forschung bremsen würde. Vollrath bezieht sich mit seiner Definition auf Oehl [Oeh65]:

> „Wird diese durch eine Funktion bestimmte und darstellbare Abhängigkeit (funktionale Abhängigkeit) bewusst erfasst und bei der Lösung nutzbar gemacht, so spricht man von funktionalem Denken."

Krüger [Krü00b] kritisiert, dass dabei nicht die Frage gestellt wird, wie der Umgang mit den Funktionen an sich auf das funktionale Denken zurückwirkt. Tatsächlich ist es schwierig zu entscheiden, ob jemand gelernt hat *funktional zu denken*. Dennoch spielt die Fähigkeit funktionalen Denkens eine große Rolle in der Mathematik. Deswegen sollte man überlegen, ob eine breitere Fassung des Begriffs wie in der Meraner Reform nicht auch sinnvoll ist, da dadurch vielseitigere Möglichkeiten einer Annäherung an „diese Art des Denkens" möglich werden.

1.1.3 Aspekte funktionalen Denkens

Vollrath [Vol89] und Malle [Mal93], [Mal00] beschreiben verschiedene Aspekte von Funktionen bzw. funktionalen Denkens, die sich in der didaktischen Forschung bewährt und etabliert haben und in ähnlicher Form auch international beschrieben werden (vgl. die unten angegebenen internationalen Quellen).

- **Zuordnungaspekt** meint einen horizontalen Zusammenhang, nämlich Funktion als (eindeutige) punktweise Zuordnung (statischer Aspekt).
- **Änderungsaspekt** meint einen vertikalen Zusammenhang und beinhaltet die Idee der Kovariation und die Idee der systematischen Änderung. Also zum einen die Frage, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer anderen Größe auswirkt zusammen mit der Unterscheidung zwischen unabhängigen und abhängigen Größen. Zum anderen aber auch eine breitere *dynamische Sicht* auf Funktionen, wenn es um die Beschreibung von Änderungsverhalten mit Methoden der Analysis geht.
- **Objektaspekt** bezeichnet die Sicht auf Funktion als Ganzes, wenn es zum einen um globale Objekteigenschaften wie zum Beispiel Monotonie oder Symmetrie geht, und zum anderen um Funktionen als algebraische Objekte, auf denen Operationen wie „Hintereinanderausführung" ausgeführt werden können, oder die eine algebraische Ringstruktur oder Vektorraumstruktur haben.

Änderungsaspekt und Objektaspekt kommen dem Begriff von funktionalem Denken aus der Meraner Reform am nächsten und sind für das Konzept von Funktion in der Analysis von zentraler Bedeutung. Die Auftrennung in drei Aspekte ist meines Erachtens allerdings nur theoretischer Natur und hilfreich, um über Begrifflichkeiten in der didaktischen Forschung zu verfügen. Tatsächlich hängen die Aspekte eng zusammen. Will man beispielsweise Objekteigenschaften wie Monotonie oder Symmetrie beschreiben, so geschieht dies dynamisch, indem man formuliert: „Für alle $x \geq y$ ist $f(x) \geq f(y)$" oder „$f(-x) = f(x)$ für alle x". Bei funktionalen

Zusammenhängen treten alle Aspekte immer gemeinsam auf, lediglich die Schwerpunkte einzelner Aspekte können verschieden sein.

In ähnlicher Weise beschreiben auch Dubinsky & Harel [DH92b], dass man Funktionen als *actions*, *processes* und *objects* betrachten kann. *Action* meint, dass Funktionen als Aneinanderreihung von Rechenregeln gesehen werden mit einem In- und einem Output, also mehr im Sinne eines „Maschinenmodells“. Dies entspricht in gewisser Weise dem Zuordnungsaspekt. Beim *process*-Konzept werden Funktionen als vollständiger Prozess erfasst. Operationen müssen nicht mehr konkret ausgeführt werden. Dies beinhaltet sicherlich auch eine dynamische Komponente, führt aber insbesondere auf den Objektaspekt. Funktionen als *objects* entspricht ziemlich genau dem oben beschriebenen Objektaspekt.

Sfard [Sfa91] weist darauf hin, dass der Übergang zu einer Objektsicht schwierig ist und spezieller Aufmerksamkeit bedarf. Sie spricht im Zusammenhang mit Funktionen von einem *operationalen* und einem *strukturellen* Aspekt. Ersteres meint den Umgang mit Funktionen im Sinne von Anwendung und Ausführung von Regeln. Letzteres kommt dem Objektaspekt am nächsten bzw. beinhaltet diesen. Sfard sieht es als problematisch an, dass in der Schule viele Begriffe strukturell eingeführt werden, obwohl im Lernprozess der operationale Aspekt zuerst ausgebildet wird.

1.1.4 Darstellungsformen und deren Bedeutung

Funktionen und funktionale Abhängigkeiten besitzen mannigfache Darstellungsformen: sprachliche Beschreibung, Tabelle, Funktionsgraph, Leiterdiagramm, Term, Pfeildiagramm usw. Komplexe Aufgabenstellungen verlangen das Denken *in* und das Interpretieren *von* verschiedenen Darstellungsformen und damit auch die Übersetzung zwischen Darstellungen. Jede Darstellungsform zielt auf gewisse Aspekte bzw. betont gewisse Aspekte und Eigenschaften. Gleichzeitig verengt jede Darstellungsform die Sichtweise auf den Begriff.

Die „New Math“– Bewegung, bei der die mengentheoretische Funktionsdefinition (Funktion als Teilmenge eines kartesischen Produkts) an den Anfang gestellt wurde, führte beispielsweise zu Darstellungsformen wie Pfeildiagrammen oder Paarmengen. Dabei wird der Begriff aber insofern verengt, dass der dynamische Aspekt in den Hintergrund tritt [Wei88].

Didaktiker und Lehrpersonen sollten sich fragen, welche Darstellungsformen sich in welchem Zusammenhang eignen. zum Beispiel eignet sich beim Begriff der „Stetigkeit“ eher ein Funktionsgraph als eine Wertetabelle[1].

---

[1]Natürlich hat auch der Funktionsgraph in Zusammenhang mit Stetigkeit seine Tücken, da er ein intuitives Verständnis von Stetigkeit vermittelt wie „man kann den Graphen durchzeichnen ohne den Stift abzusetzen“. Dies kann problematisch sein, wenn man beispielsweise an Funktionen denkt, die wohl stetig, aber nirgends differenzierbar sind, oder an Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$, deren Bild das Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ ist (Peano-Kurve). Inwieweit dies in der Schule problematisch ist, kann sicherlich diskutiert werden.

Darstellungsformen spielen außerdem eine große Rolle bei der Begriffsbildung. So liest man zum Beispiel bei [Vog06]:

> „Die unterrichtliche Arbeit mit verschiedenen Repräsentationen beugt zum einen der Gefahr vor, dass die Schülerinnen und Schüler ein zu enges Begriffsverständnis von Funktionseigenschaften ausbilden. Zum anderen sollen sie durch die Arbeit mit unterschiedlichen Funktionsrepräsentationen ein breiteres Spektrum an heuristischen Strategien beim Begriffsbildungsprozess an die Hand bekommen."

1.1.5 Begriffliche Verortung der Arbeit

Der dieser Arbeit zugrunde gelegte Begriff von *funktionalem Denken* ist angelehnt an den Begriff aus der Meraner Reform.

Funktionales Denken mit der Betonung des kinematischen Aspektes wird als geistige Vorbereitung, als Propädeutik zur Differential- und Integralrechnung gesehen. Von den in 1.1.3 beschriebenen Aspekten konzentrieren wir uns in dieser Arbeit auf dem Änderungsaspekt und dem Objektaspekt, da diese für Konzepte der Analysis eine zentrale Rolle spielen.

Dabei geht es nicht darum, diesen Begriff in seiner ganzen Tragweite für die Mathematik und den Mathematikunterricht abzudecken. Es geht vielmehr um eine Sicht auf das funktionale Denken, die den dynamischen Aspekt hervorhebt und so in natürlicher Weise zu Konzepten der Analysis führt, indem man versucht zu beschreiben, wie sich Dinge *ändern*. Insbesondere ist von Interesse, wie der Umgang mit den Funktionen als Gegenständen auf das funktionale Denken zurück wirkt.

Dadurch, dass der Begriff hier weiter gefasst wird als beispielsweise bei Vollrath (Abschnitt 1.1.2), eröffnen sich mehr Spielräume und Freiheiten mit funktionalen Abhängigkeiten umzugehen. Didaktische Forschung kann sich meiner Ansicht nach durch eine Erweiterung des Begriffes mehr Freiräume schaffen, in denen man kreativ tätig werden kann.

1.2 Schwierigkeiten und Unterrichtsrealität

In 1.2.1 und 1.2.2.1 werden einige Schwierigkeiten von Lernenden mit dem Funktionsbegriff bzw. im Bereich funktionales Denken als Motivation für diese Arbeit mit Hilfe von Beispielen aus Tests und Briefen von Lernenden zum Funktionsbegriff illustriert und umrissen. Ziel dieses Abschnittes ist es anhand von auftretenden Phänomenen einige Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern exemplarisch aufzuzeigen. Dies ist nicht im Sinne einer Studie zur Diagnose von Fehlvorstellungen zu sehen, sondern dient der Illustration und Sensibilisierung. Insbesondere wird im späteren Verlauf der Arbeit auf die hier dargestellten Beispiele Bezug genommen, da sie in gewissem Sinne richtungsgebend für die vorliegende Arbeit waren.

Ausgehend von den exemplarisch dargestellten Schwierigkeiten wird die Diskussion durch Ergebnisse nationaler und internationaler Studien und Arbeiten ergänzt und vertieft (Abschnitt 1.2.2). Dabei wird auch auf Überblicksliteratur verwiesen. Die folgende Darstellung dient dem Aufbau der Problemlage und ist daraufhin ausgerichtet.

1.2.1 Zwei Testaufgaben

Im Wintersemester 2006/07 wurde ein Test zum Thema Funktionen/funktionales Denken für Mathematikanfängerstudentinnen und -studenten (Bachelorstudiengang) an der TU Berlin konzipiert und zu Beginn der Vorlesung Analysis I mit mehr als 100 Studierenden durchgeführt. Ein darauf basierender abgeänderter Test wurde Schülerinnen und Schülern einer 10. Klasse eines Berliner Gymnasiums im Sommer 2007 gestellt. Dass der Test im Vorfeld mit Studierenden durchgeführt wurde, lag zunächst daran, dass ich als Assistentin für den Übungsbetrieb dieser Veranstaltung eingeteilt war und die Gelegenheit ergriff mit einem Test den „Stand“ von Schulabgängern verschiedener (Bundes-)Länder zu erfassen und mir ein Bild davon zu machen. Es wird darauf verzichtet die gesamten Tests vorzustellen. Vielmehr werden zwei Aufgaben mit häufig auftretenden fehlerhaften Lösungen dargestellt. Sie sollen ein Gespür für vorhandene Probleme vermitteln und sind nicht im Sinne einer empirischen Studie zu lesen, sondern dienen der Illustration.

1.2.1.1 Aufgabe: Dreiecksfläche

Abbildung 1.1 gibt die Aufgabenstellung zur Aufgabe „Dreiecksfläche“ wieder.

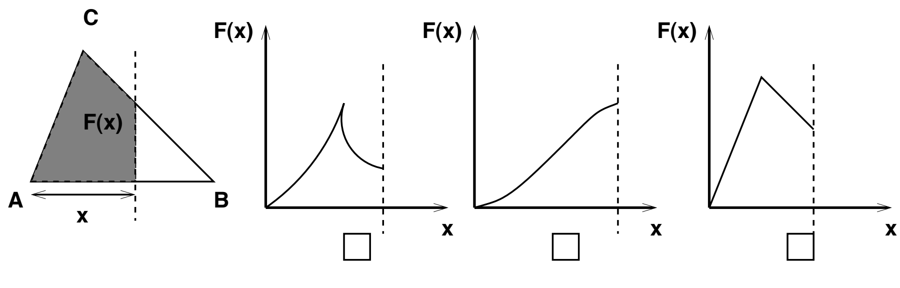


Abbildung 1.1: Die gestrichelte Linie wird vom Punkte A um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Wert $F(x)$ gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an. Welcher Graph passt? Begründen Sie Ihre Wahl! (nach [Sch00])

Von ca. 100 korrigierten Lösungen der Erstsemesterstudentinnen und -studenten des Mathematikstudienganges, haben nur 66 das Kreuz an der richtigen Stelle gemacht und nur 57 gaben eine korrekte Begründung an. Abbildung 1.2 zeigt den häufigsten Fehler, der dabei auftrat.

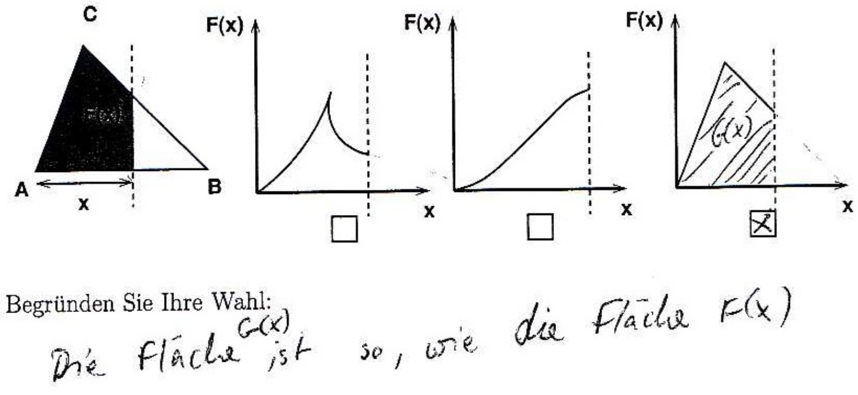


Abbildung 1.2: Graph-als-Bild Fehler

Hierbei handelt es sich um einen so genannten *Graph-als-Bild Fehler* (s. auch [Vog06], der in seiner Arbeit eine Klassifikation auftretender Graph-als-Bild Fehler vornimmt). Der Funktionsgraph wird als photographisches Abbild der Realsituation gesehen. Die bildhafte Darstellung *Graph* wird *ikonisch* (direkt-abbildend) anstatt *symbolisch* (durch Konvention zustande gekommen) interpretiert. Man könnte einwenden, dass die studentische Lösung als Antwort auf die Frage „Welcher Graph passt?"durchaus ihre Berechtigung hat, denn im ikonischen Sinne passt der Graph ganz rechts tatsächlich.

Interessant ist aber, dass die Darstellungsform „Graph" keine symbolische Interpretation hervorrief, und das, obwohl die Erstsemesterstudierenden in ihrer Schulzeit sehr oft mit Funktionsgraphen konfrontiert waren und man davon ausgehen kann, dass mannigfache Erfahrungen mit Graphen vorhanden sein müssten. Anders formuliert wurde hier keine dynamische Sicht auf den funktionalen Zusammenhangs aktiviert, denn sonst würde wenigstens erkannt werden, dass mit wachsendem x auch der Flächeninhalt $F(x)$ wächst – der Graph also monoton wachsend sein muss. [2]

Abbildung 1.3 zeigt, inwiefern dieses Beispiel mit Analysis zu tun hat.

Die Studentin hat zunächst den Graphen rechts angekreuzt (Graph-als-Bild Fehler) und sich dann für den Graphen ganz links entschieden. In ihrer Begründung verwendet sie Konzepte der Analysis (Integration). Die Dreiecksseiten AC und CB werden als stückweise lineare Funktion interpretiert, so dass der Flächeninhaltsgraph, den man durch Integration erhält, quadratisch sein muss. Dennoch wird dies mit einem Graph-als-Bild Fehler kombiniert, denn die Mono-

[2] Man beachte, dass der mittlere Graph nur *qualitativ* richtig ist, indem er monoton wachsend ist und eine Wendestelle besitzt. Mathematisch korrekt müsste er stückweise quadratisch sein (was er nicht ist). Das schien allerdings keine Hürde für die Studentinnen und Studenten bei der Bearbeitung der Aufgabe zu sein. Allerdings würde dies von der Autorin in dieser ungenauen Form nicht noch einmal gestellt werden.

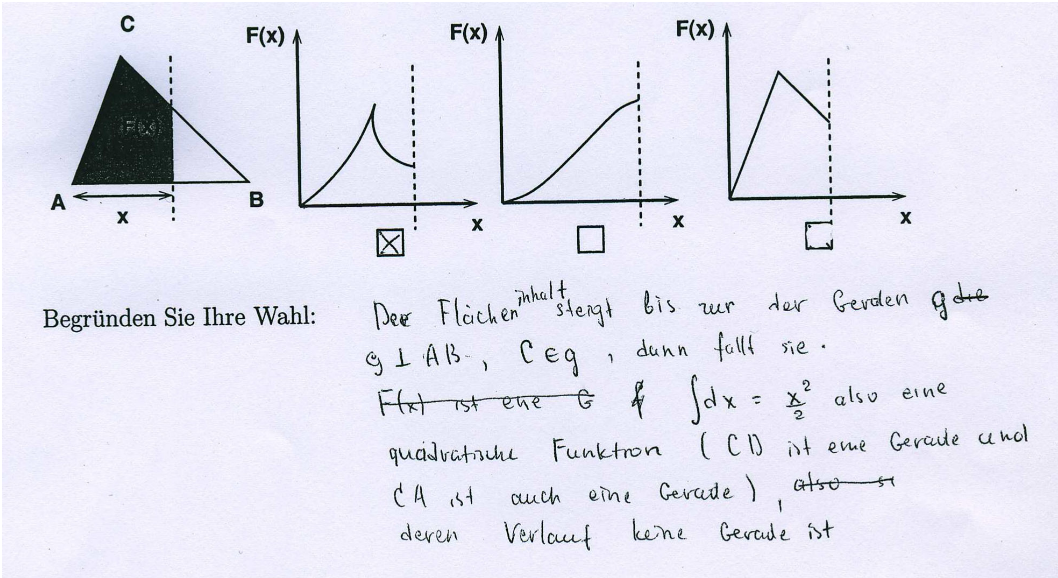


Abbildung 1.3: Ein interessanter Fehler.

tonie wird nicht erkannt. Das Konzept *Integration* wird also verwendet ohne eine dynamische Sicht auf die Situation zu haben.

Mathematisch tiefer gehend liegt hier der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* zugrunde. Die Dreiecksseiten AC und BC – als stückweise lineare Funktion interpretiert – geben gerade die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion wieder. Wird der Punkt C überschritten, so ändert sich die Qualität des Wachstums – es liegt eine Wendestelle vor. In diesem Sinne ist also das Zitat von Tall [Tal96] aus Abschnitt 1.1.1 zu verstehen, wenn er sagt, dass eine dynamische Sicht auf Funktionen in natürlicher Weise zu Konzepten der Analysis und letztendlich zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung führt.

1.2.1.2 Aufgabe: Die Reise

Die Aufgabe „Die Reise“ wurde zunächst den Studierenden an der TU Berlin gestellt und anschließend in abgeänderter Form auch 24 Schülerinnen und Schülern einer 10. Klasse am Ende des Schuljahres an einem Berliner Gymnasium. Abbildung 1.4 zeigt die Ausgangssituation der Aufgabe.

Die Fragen „Wie lange dauert die Fahrt?“ und „Wie weit ist es von Nottingham bis Crawley“ beantworteten die Schülerinnen und Schüler problemlos. Einzelne Punkte im Graphen konnten einfach abgelesen werden.

In Abbildung 1.5 sieht man typische Fehler bei der Beantwortung der Frage „Was passiert zwischen D und E?“. Zwischen D und E führt die Fahrt durch London. Deswegen schwankt

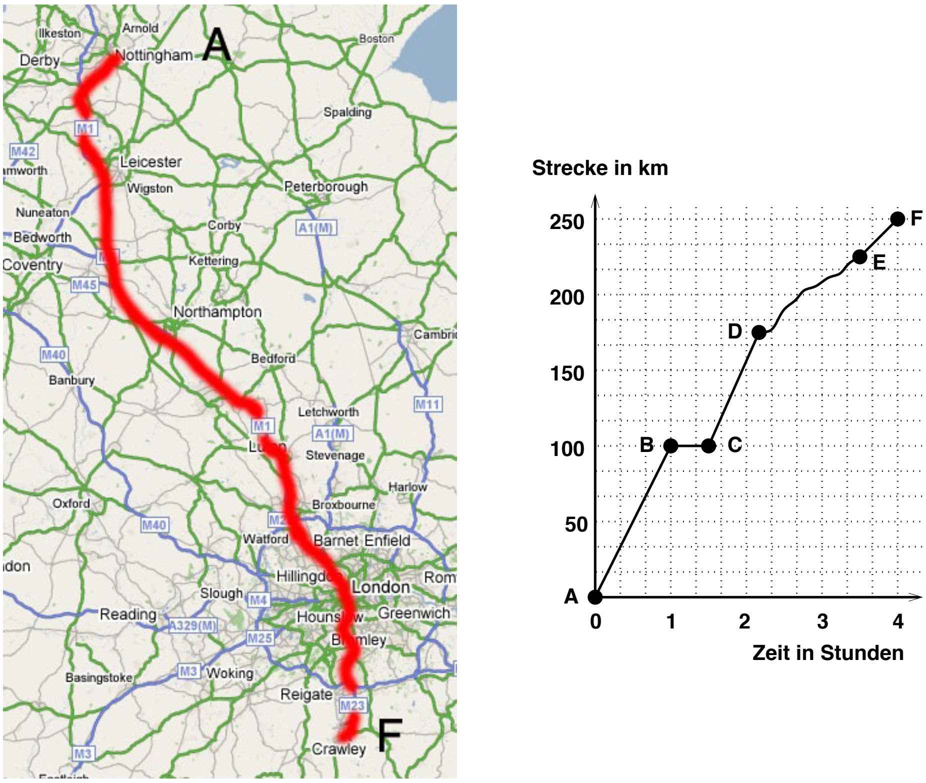


Abbildung 1.4: Die Landkarte und der abgebildete Graph beschreiben eine Autofahrt von Nottingham (A) nach Crawley (F) auf den Straßen $M1$ und $M23$. (nach [S+85])

die Geschwindigkeit häufiger und die Fahrt verläuft im Durchschnitt langsamer. Die Antwort „Hügel oder Kurven“ ist als typischer Graph-als-Bild Fehler zu werten. Der Weg-Zeit-Graph wird als Bewegung in der Ebene interpretiert, so als würde man darauf entlanglaufen. Ähnliche Probleme mit der Interpretation von Weg-Zeit-Graphen wurden schon in vielen anderen Arbeiten beschrieben, zum Beispiel [Vog06], [S$^+$85], [Ker81].

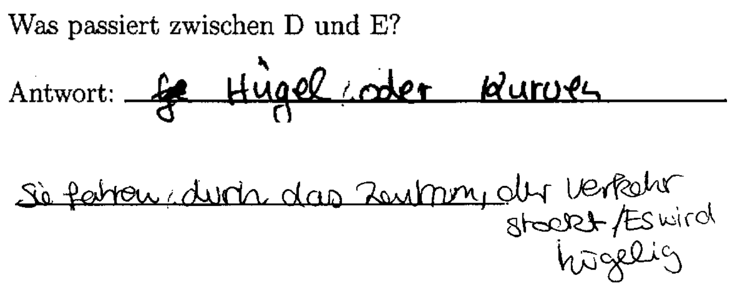


Abbildung 1.5: Zwei Beispiele falscher Schülerantworten auf die Frage: „Was passiert zwischen D und E?“

Die zweite Antwort „Sie fahren durch das Zentrum, der Verkehr stockt. Es wird hügelig“ beinhaltet ebenfalls einen Graph-als-Bild Fehler. Es wurde zwar erkannt, dass zwischen D und E die Fahrt durch London erfolgt, und damit Bezug zur Landkarte genommen. Dennoch wird gesagt, dass es „hügelig“ wird. Der zweite Teil der Antwort bezieht sich also auf den Weg-Zeit-Graphen und verweist auf einen Graph-als-Bild Fehler. Zum einen wird aufgrund der Darstellungsform „Landkarte“ und zum anderen aufgrund der Darstellungsform „Graph“ argumentiert. Die beiden Repräsentationsformen werden aber nicht miteinander in Verbindung gebracht. Es findet kein *Transfer zwischen den Repräsentationen* statt.

Abbildung 1.6 zeigt fehlerhafte Antworten auf die Frage „Wie schnell fährt das Auto zwischen C und D?“. Die richtige Antwort wäre $\frac{75}{\frac{2}{3}}$ km/h$=112,5$ km/h. Diese Frage wurde von nur 17% der Schülerinnen und Schüler korrekt beantwortet. Abbildung 1.6 zeigt, welche Fehler dabei auftraten.

Bei der Antwort „175 km/40 min“ wird das Zeitintervall korrekt abgelesen, aber die zurückgelegten Kilometer werden nicht abschnittweise als Intervall auf der y-Achse, sondern als zurückgelegte Kilometer von 0 bis 175 abgelesen.

Mehrere Schülerinnen und Schüler gaben den Wert „85 km/h“ als Lösung an. Abbildung 1.6 zeigt, wie ein Schüler auf diesen Wert kam. Er berechnete „$170 : 2$“ und das, obwohl er ein Steigungsdreieck korrekt eingezeichnet hatte. Den Wert „170“ liest er als y-Koordinate von D ab und den Wert „2“ nimmt er, weil er ungefähr in der Mitte zwischen den x-Koordinaten von C und D liegt. Für diese Schülerinnen und Schüler stellte demnach das *abschnittweise Lesen von Graphen* ein Problem dar. Eine *dynamische Sicht* auf den Weg-Zeit Graphen im Sinne

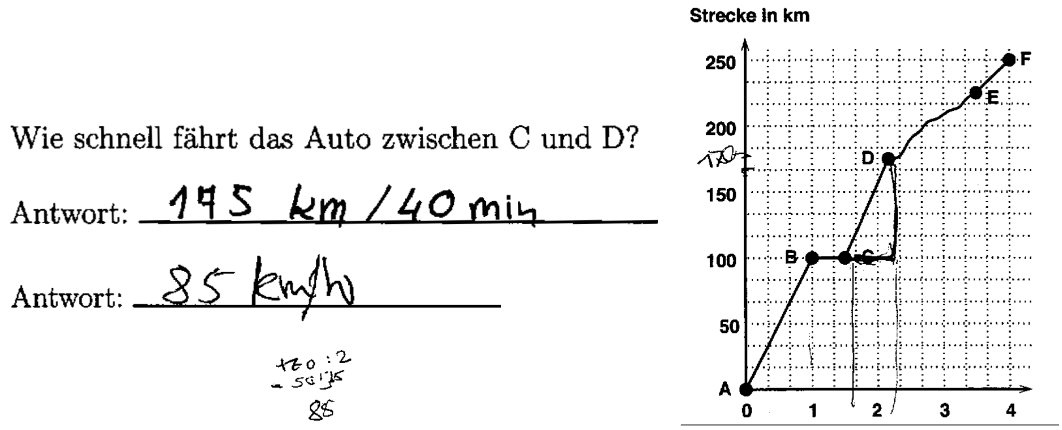


Abbildung 1.6: Zwei Beispiele falscher Schülerantworten auf die Frage: „Wie schnell fährt das Auto zwischen C und D?"

von *Änderung* des Weges mit der Zeit (Geschwindigkeit) erfordert aber die Fähigkeit Graphen abschnittweise zu lesen und zu interpretieren.

In der Aufgabe „Skizziere einen Graphen, der die Geschwindigkeit des Autos im Verlauf der Reise wiedergibt" wurde nach der Gestalt des Graphen der diese Änderung wiedergibt (*Änderungsgraph*) gefragt. Lediglich ein einziger Schüler zeichnete einen nahezu korrekten Geschwindigkeit-Zeit Graphen, und nur ca. 30 % der Studenten lösten diese Aufgabe korrekt! Abbildung 1.7 zeigt einige Lösungen dazu.

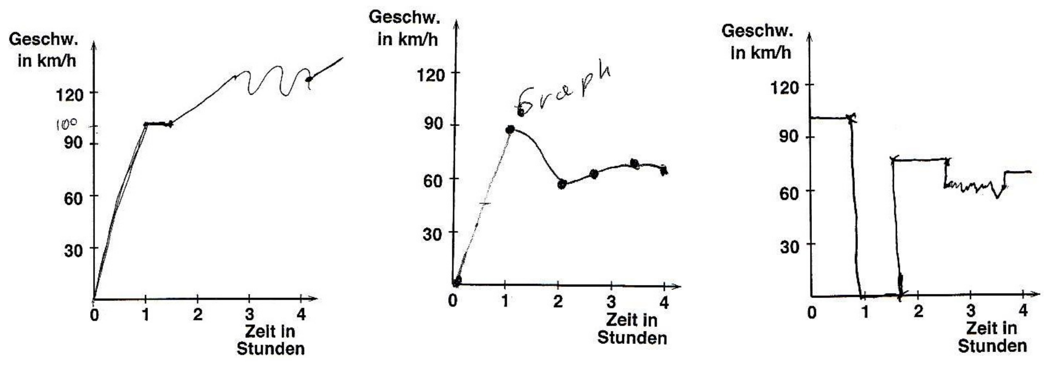


Abbildung 1.7: Lösungen zur Aufgabe „Skizziere einen Graphen, der die Geschwindigkeit des Autos im Verlauf der Reise wiedergibt."

Links wurde der Weg-Zeit Graph nochmals skizziert, es konnte also nicht zwischen *Bestand* an Kilometer und *Änderung* an Kilometer mit der Zeit unterschieden werden. In der Mitte wurde der Anfang wie im Weg-Zeit Graphen skizziert und dann „irgendwie" weiter gezeichnet.

Rechts wurde der Graph in groben Zügen korrekt skizziert, allerdings die Geschwindigkeiten nicht alle korrekt bestimmt.

Die Aufgabe „Trage die Punkte A bis F ungefähr in die Landkarte ein!“ stellte überraschenderweise ein großes Problem dar. Beispielsweise lösten nur knapp 50% der Studentinnen und Studenten diese Aufgabe korrekt. Abbildung 1.8 zeigt eine typische falsche Lösung eines Studenten.

Außer, dass – selbst bei ungefährer Abschätzung – B zu nahe bei A liegt, wurden insbesondere B und C an verschiedenen Stellen eingezeichnet. Dies ist einerseits als Graph-als-Bild Fehler zu werten und zwar in folgendem Sinne: „Wenn es im Graphen von B nach C weitergeht, dann auch bei der Fahrt“. Es wird nicht gesehen, dass der Graph die zurückgelegte Wegstrecke abhängig von der Zeit angibt, und dass zwischen B und C lediglich Zeit vergeht, aber keine Strecke zurückgelegt wird. Andererseits zeigt bzw. bedingt dies, dass der *Repräsentationstransfer* zwischen Situation (Landkarte) und Graph nicht vollzogen werden kann.

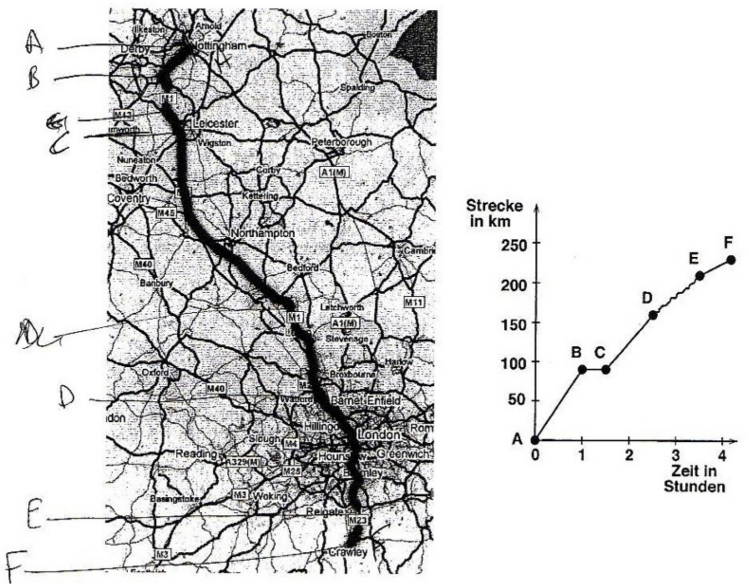


Abbildung 1.8: Typische fehlerhafte Lösung zur Aufgabe „Trage die Punkte A bis F ungefähr in die Landkarte ein!“

Die *Schwierigkeiten beim Repräsentationstransfer* äußerten sich auch darin, dass bei einigen Lösungen, die Punkte A bis F *von unten nach oben* (A bei Crawley und F bei Nottingham) eingetragen wurden, weil im nebenstehenden Graphen diese Punkte auch von unten nach oben „verlaufen“.

Nun könnte man einwenden, dass die Aufgabe nur scheinbar authentisch ist, denn ein authentischer Weg-Zeit-Graph ist sicherlich nicht über längere Abschnitte linear bzw. weist auch keine Knickstellen auf. Eine Idealisierung des Weg-Zeit-Graphen wie im Beispiel „Reise“ ist dennoch gerechtfertigt, wenn man diese Idealisierung im folgenden Sinne liest: Zwischen den einzelnen Stationen der Reise gibt der Graph die gefahrenen Durchschnittsgeschwindigkeiten wieder.

Um zu sehen, wie diese Idealisierung von Schülerinnen und Schülern wahrgenommen wird, und ob die idealisierte Gestalt des Graphen ein Denkhindernis darstellte, wurde eine abschließende Frage gestellt: „Findest Du, dass der Weg-Zeit-Graph die beschriebene Situation ganz exakt wiedergibt? Wenn nicht, was müsste man verändern?“

Den meisten Schülerinnen und Schülern fiel die Idealisierung nicht auf, sie gaben an „Graph ist ok“ oder „Man müsste nichts verändern“. Einige bemerkten, dass es nicht möglich ist über längere Zeit mit exakt konstanter Geschwindigkeit zu fahren. Interessanterweise bemerkte niemand, dass die Knickstellen unrealistisch sind, da Beschleunigungs- und Abbremsphasen so nicht dargestellt sind und sich die Geschwindigkeit jedes mal abrupt ändern würde.

Die Antworten kann man so deuten, dass die Idealisierung wohl keine zusätzliche Denkhürde darstellte. Aber die Antworten zeigen auch, dass die Diskussion der abschließenden Frage wichtig und fruchtbar ist. Zum einen wird dadurch die gesamte Situation in Bezug zum Graphen nochmals überdacht, und zum anderen bietet sich hier eine Diskussion zu Möglichkeiten und Grenzen graphischer Darstellung an.

1.2.2 Nationale und Internationale Arbeiten zu Schwierigkeiten im Bereich funktionalen Denkens

In der didaktischen Literatur findet man mannigfache Studien und Arbeiten, die Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern mit dem Funktionsbegriff und im Bereich funktionalen Denkens beschreiben. Für einen Überblick über diese Arbeiten sei zum Beispiel verwiesen auf [DH92a], [Stö08], [Vog06], [MP94] oder [FLM07].

Im Folgenden werden einige für die vorliegende Arbeit relevanten Ergebnisse dieser Arbeiten dargestellt. Sie geben genauere Erklärungsansätze für die im vorigen Abschnitt 1.2.1 beschriebenen Phänomene und ergänzen sie um einige tiefergehende Aspekte. Ziel dieses Abschnittes ist die Hinführung zur Darstellung der Problemlage und zu den Grobzielen der Arbeit.

1.2.2.1 Schwierigkeiten mit dem Funktionsbegriff – Die Schülerbriefe

Angeregt durch eine Arbeit von Vinner & Dreyfus [VD89] wurde Schülerinnen und Schülern zweier zehnten Klassen an Berliner Gymnasien die folgende Aufgabe gestellt:

Stelle Dir vor, ein(e) Brieffreund(in) von Dir hat noch niemals den mathematischen Begriff ***Funktion*** *gehört. Sie/Er bittet Dich in einem Brief zu schreiben, was Du über Funktionen* *weißt (z.B. was Funktionen sind, in welchen Situationen Funktionen vorkommen, wozu man sie braucht usw.). Du kannst zur Beschreibung auch gerne Bilder malen!*

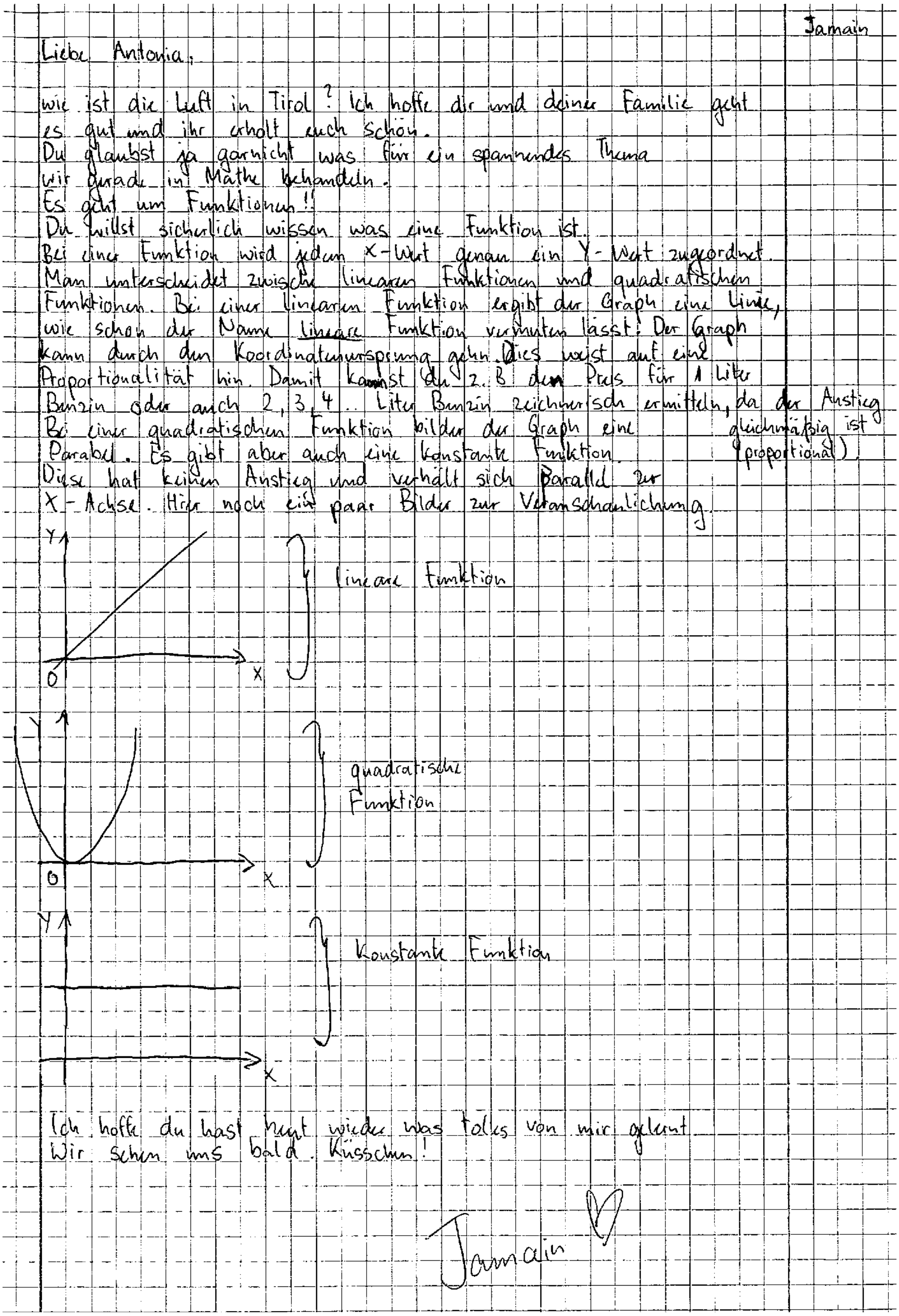
Die Schülerbriefe bildeten den Einstieg in die in Kapitel 4 beschriebene qualitative Studie. Durch die Briefe sollte ein Einblick in das mentale Konzept von Funktion der Schülerinnen und Schüler der beiden Versuchsklassen gewonnen werden. Tatsächlich haben die Briefe im Nachhinein zu einer Verfeinerung der Problemlage dieser Arbeit geführt, weswegen sie schon in diesem Kapitel aufgegriffen werden.

Bevor einige Schülerbriefe vorgestellt und analysiert werden, wird kurz beschrieben, inwiefern diese Aufgabe mit der Arbeit von Vinner & Dreyfus zusammenhängt. Vinner & Dreyfus (ibid.) prägten in ihrer Arbeit die Begriffe *concept image* und *concept definition* von Funktionen. Mit *concept definition* wird die individuelle Definition bezeichnet, die Schülerinnen und Schüler für den Begriff Funktion geben. Das *concept image* bezeichnet die Menge aller mentalen Bilder und charakterisierender Eigenschaften, die mit dem Funktionsbegriff verbunden werden. Vinner & Dreyfus stellten fest, dass Schülerinnen und Schüler bei der Entscheidung, ob es sich bei gegebenen Beispielen um Funktionen handelt oder nicht, aufgrund ihres *concept image* entscheiden, und nicht etwa aufgrund ihrer *concept definition*. Das *concept image* ist das Resultat von der Interaktion mit Beispielen und Nicht-Beispielen bzw. von den mit Funktionen gemachten Erfahrungen. Eine ähnliche Untersuchung wurde von Kösters [Kö96] vorgenommen. Auch sie fragte Schülerinnen und Schüler nach ihrer Definition von Funktion und ließ sie dann entscheiden, ob gewisse Beispiele Funktionen sind oder nicht. Kösters spricht davon, dass Schülerinnen und Schüler einen bestimmen *Prototyp von Funktion* haben, mit dem sie gegebene Beispiele vergleichen und dann entscheiden. Der *Prototyp* bzw. das *concept image* enthält zum Beispiel Vorstellungen wie:

- Eine Funktion ist eine einzige Regel.
- Eine Funktion muss „gutartig“ aussehen, d.h. sie hat ein überschaubares Monotonieverhalten, hat keine Sprungstellen, verläuft auf beiden Seiten der Achsen.

Dabei kann es durchaus sein, dass *concept image* und *concept definition* widersprüchlich zueinander sind. Diese Widersprüche fallen den Schülerinnen und Schülern oft nicht auf, weil zur Entscheidung, ob in einem vorliegenden Beispiel eine Funktion dargestellt ist oder nicht, nur ein Teil des *concept image* abgerufen wird und in anderen Situation eben wieder ein anderer (eventuell widersprüchlicher) Teil.

Die folgenden Auszüge aus den Schülerbriefen illustrieren sehr eindrücklich, was bei [VD89] und [Kö96] beschrieben wird, und leiten gleichzeitig zu weiteren Ergebnissen diverser Studien und Arbeiten über. Die Schülerinnen und Schüler wurden gebeten ihre *concept definition* von Funktion in einem Brief zu beschreiben. Die Briefe geben gleichzeitig aber auch Aufschluss über das *concept image*.



Jamain

Liebe Antonia,

wie ist die Luft in Tirol? Ich hoffe dir und deiner Familie geht
es gut und ihr erholt euch schön.
Du glaubst ja garnicht was für ein spannendes Thema
wir gerade in Mathe behandeln.
Es geht um Funktionen!!
Du willst sicherlich wissen was eine Funktion ist.
Bei einer Funktion wird jedem X-Wert genau ein Y-Wert zugeordnet.
Man unterscheidet zwischen linearen Funktionen und quadratischen
Funktionen. Bei einer linearen Funktion ergibt der Graph eine Linie,
wie schon der Name lineare Funktion vermuten lässt! Der Graph
kann durch den Koordinatenursprung gehn. Dies weist auf eine
Proportionalität hin. Damit kannst du z. B den Preis für 1 Liter
Benzin oder auch 2, 3, 4 .. Liter Benzin zeichnerisch ermitteln, da der Anstieg
gleichmäßig ist (proportional).
Bei einer quadratischen Funktion bildet der Graph eine
Parabel. Es gibt aber auch eine konstante Funktion.
Diese hat keinen Anstieg und verhält sich parallel zur
X-Achse. Hier noch ein paar Bilder zur Veranschaulichung.

Y, 0, X — lineare Funktion

Y, 0, X — quadratische Funktion

Y, X — Konstante Funktion

Ich hoffe du hast heut wieder was tolles von mir gelernt
Wir sehen uns bald. Küsschen!

Jamain

Abbildung 1.9: Der Schülerbrief von *Jamain* zum Funktionsbegriff

Jamain (Abbildung 1.9)[3] beginnt zunächst mit der Dirichlet'schen Definition von Funktion, also ihrer *concept definition*, indem sie schreibt:

> *Bei einer Funktion wird jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet.*

Hierbei vernachlässigt sie die Bedeutung von Definitionsmenge und Zielbereich, was wahrscheinlich an ihren bisherigen Erfahrungen mit Funktionen liegt – in der Schule werden zumeist reellwertige Funktionen betrachtet und die Notwendigkeit der Problematisierung von Definitions- und Zielbereich scheint zunächst nicht gegeben.

Im nächsten Abschnitt zeigt sich, auf welchen Erfahrungen Jamains Vorstellung von Funktionen beruht. Sie konstatiert, dass es lediglich zwei Arten von Funktionen gibt

> *Man unterscheidet zwischen linearen und quadratischen Funktionen.*

Sie beschreibt dann, was eine lineare Funktion ist und gibt dazu eine Anwendung, indem sie auf Proportionalitäten verweist. Lineare und quadratische Funktionen charakterisiert sie durch die Form des Funktionsgraphen und zeichnet dazu jeweils ein Beispiel.

Konstante Funktionen erwähnt sie extra. Konstante Funktionen scheinen für Jamain also nicht unter lineare Funktionen zu fallen. Interessanterweise sagt sie, diese hätten *keinen Anstieg* anstatt *der Anstieg ist Null*. Ein Anstieg von Null hat für sie wohl die Bedeutung eines „nicht existenten“ Anstiegs.

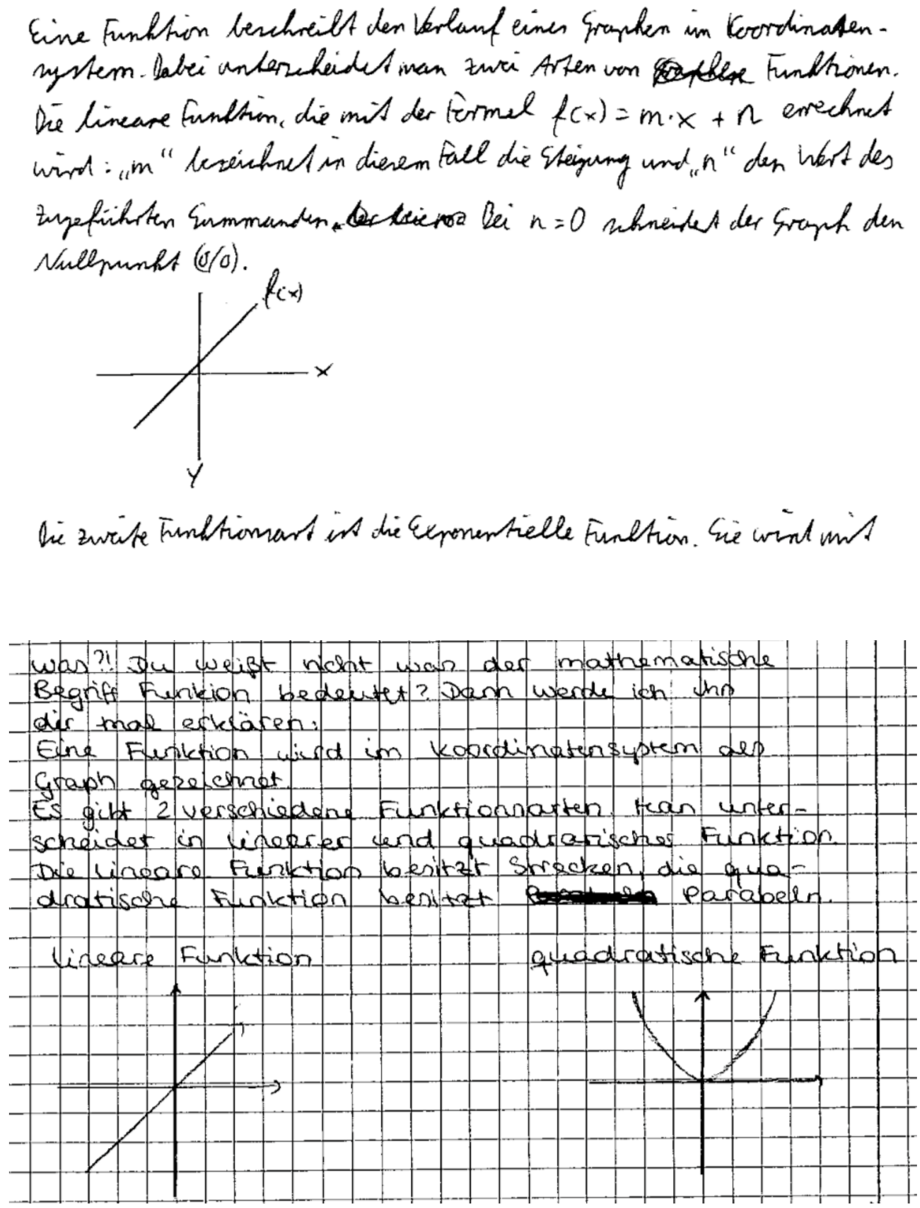
Der Brief zeigt, dass Jamains *concept image* von ihrer Erfahrung mit bestimmten *Funktionenklassen* geprägt ist. Sie scheint sich sogar nur „dreier“ Klassen bewusst zu sein (linear, quadratisch, konstant). Die Funktionenklassen sind für sie durch die Form ihrer Funktionsgraphen charakterisiert.

Das Denken in Funktionenklassen und die Dominanz der graphischen Darstellung zeigt sich auch in weiteren Briefen.

Beiden Briefausschnitten in Abbildung 1.10 entnimmt man, dass die Existenz eines Graphen, den man in ein Koordinatensystem zeichnen kann, charakteristisch für eine Funktion ist. Dies ist wieder als Teil des *concept image* zu deuten. In beiden Fällen werden genau zwei Funktionenklassen genannt (linear und exponentiell bzw. linear und quadratisch). Die Briefeschreiber scheinen sich nur dieser beiden Klassen für Funktionen bewusst zu sein.

Tatsächlich werden in der Schule nur wenige Funktionenklassen behandelt. Da die Erfahrungen, die man mit Funktionen macht, das *concept image* von Funktionen prägen, liegt die Gefahr nahe, dass die Schülerinnen und Schüler ein zu eingeschränktes Bild von Funktionen

[3] Die Schülerinnen und Schüler haben den Brief zumeist an einen imaginären Addressaten gerichtet und das Format „Brief“ mit einem ironischen Unterton – wie Jamain in Abbildung1.9 – angenommen und umgesetzt.



Eine Funktion beschreibt den Verlauf eines Graphen im Koordinaten-system. Dabei unterscheidet man zwei Arten von Funktionen. Die lineare Funktion, die mit der Formel f(x) = m·x + n errechnet wird: „m" bezeichnet in diesem Fall die Steigung und „n" den Wert des zugeführten Summanden. Bei n = 0 schneidet der Graph den Nullpunkt (0/0).

f(x)
x
Y

Die zweite Funktionsart ist die Exponentielle Funktion. Sie wird mit

was?! Du weißt nicht was der mathematische Begriff Funkion bedeutet? Dann werde ich ihn dir mal erklären:
Eine Funktion wird im Koordinatensystem als Graph gezeichnet
Es gibt 2 verschiedene Funktionsarten. Kan unter-scheidet in linearer und quadratischer Funktion.
Die lineare Funktion besitzt Strecken, die qua-dratische Funktion besitzt Parabeln.

lineare Funktion

quadratische Funktion

Abbildung 1.10: Zwei Briefausschnitte zum Funktionsbegriff entwickeln, was sich in den Ergebnissen von [VD89] und [Kö96] widerspiegelt. Das eingeschränkte Bild von Funktionen suggeriert darüber hinaus einen geringen Nutzen von Funktionen, da man mit diesen (wenigen) Klassen nur eingeschränkt modellieren kann.

Das Problem der eingeschränkten Vorstellung von Funktionen zeigt sich auch in einer Untersuchung von Markovits [MEB88]. Er legte Schülerinnen und Schülern eine Abbildung wie 1.11 vor und fragte: *Wie viele Funktionsgraphen kannst du zeichnen, die durch alle folgenden Punkte gehen?*

Abbildung 1.11: Abbildung aus [Tal96], S. 299, bezugnehmend auf die Ergebnisse von [MEB88].

Im ersten Fall (Abb. 1.11 links) wurde meist eine Gerade gezeichnet. Im zweiten Fall (Abb. 1.11 rechts) wurde oft – suggeriert durch die Lage der Punkte – gesagt, dass es zwei Geraden sein müssten, und es deswegen keine Funktion gebe, die durch alle Punkte geht.

In der Literatur wird dieses Phänomen als *illusion of linearity* beschrieben (zum Beispiel [Fre83], [DBH$^+$04], [Sie92]). Gemeint ist damit, dass Proportionalitäten als bevorrechtigte Arten von Relationen gesehen werden:

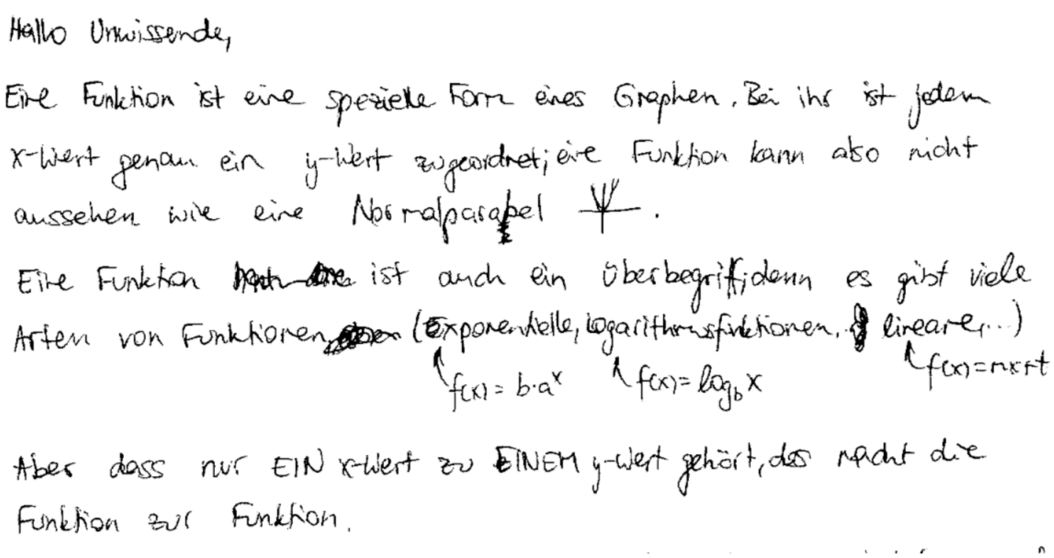
> „Linearity is such a suggestive property of relations that one readily yields to the seduction to deal with each numerical relation as though it were linear. “
> [Fre83], S. 267

Die Ergebnisse von Vinner & Dreyfus wurden auch in weiteren Untersuchungen wie denen von Bakar & Tall [BT92] bzw. Ferrini-Mundi & Graham [FMG94] bestätigt. Die Arbeiten bestätigen, dass das Bild von Schülerinnen und Schülern zum Funktionsbegriff häufig Vorstellungen umfasst wie:

- Funktionen müssen *eine* Regel sein.
- Wenn y eine Funktion in x ist, muss das x in der Formel vorkommen.
- Der Graph muss vernünftig aussehen (zum Beispiel wie ein Polynom, eine trigonometrische Funktion oder eine exponentielle Funktion).

- Der Graph muss gewisse *kontinuierliche* Eigenschaften besitzen, wobei dem Ausdruck *kontinuierlich* eigenwillige Bedeutungen zugewiesen werden: zum Beispiel *kontinuierlich* im Sinne von *der Graph geht immer weiter*, so dass ein Viertelkreis nicht als Funktionsgraph akzeptiert wird, da man ihn zu einem Vollkreis fortsetzen könnte (*continous* im Sinne von *continue*).

Der Brief in Abbildung 1.12 weist darauf hin, welche Problematik der Behandlung des Dirichlet'schen Funktionsbegriffes zugrunde liegt.



Hallo Unwissende,

Eine Funktion ist eine spezielle Form eines Graphen. Bei ihr ist jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet; eine Funktion kann also nicht aussehen wie eine Normalparabel.

Eine Funktion ist auch ein Überbegriff, denn es gibt viele Arten von Funktionen (Exponentielle, Logarithmusfunktionen, lineare, ..)

$f(x) = b \cdot a^x$ $f(x) = \log_b x$ $f(x) = mx+t$

Aber dass nur EIN x-Wert zu EINEM y-Wert gehört, das macht die Funktion zur Funktion.

Abbildung 1.12: Ein weiterer Briefausschnitt zum Funktionsbegriff

In diesem Brief wird Funktion zunächst – wie schon in den anderen Briefen zuvor – dadurch charakterisiert, dass es einen Funktionsgraphen gibt. Dies kann man als eine Teil des *concept image* interpretieren. Dann folgt eine Definition im Dirichlet'schen Sinne.

Bei ihr ist jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet.

Wie schon im Brief von Jamain (Abbildung 1.9) werden Definitions- und Zielbereich der Funktion nicht in der Definition erwähnt. Schließlich zeigt sich, dass die zuvor definierte Eindeutigkeit der Zuordnung falsch interpretiert wird, denn

eine Funktion kann nicht aussehen wie eine Normalparabel.

Die Begriffe *Eindeutigkeit der Zuordnung* und *Injektivität* werden also verwechselt. Der letzte Satz

> *Aber dass nur EIN x-Wert zu EINEM y-Wert gehört, das macht die Funktion zur Funktion*

lässt sogar vermuten, dass *Eindeutigkeit der Zuordnung* mit *Bijektivität* gleichgesetzt wird. Dies passt einerseits zu den Ergebnissen der oben genannten Studien [VD89], [FMG94], [BT92], [Kö96], dass typische Vorstellungen von Funktionen beinhalten, dass die Graphen „vernünftig“ aussehen müssen. Andererseits verbirgt sich dahinter eine weitere Problematik.

Die Funktionsdefinition im Dirichlet’schen Sinne

> „Eine Funktion ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer (eventuell anderen) Menge zuordnet.“

hat einen hohen Grad an Allgemeinheit. Dieser hohe Grad an Verallgemeinerung passt nicht recht zu den eingeschränkten Erfahrungen, die die Schülerinnen und Schüler mit Funktionen machen. Denn in der Schule werden eben nur bestimmte Funktionenklassen behandelt und auch fast nur solche, die durch einen analytischen Ausdruck darstellbar sind. Fischer & Malle [FM85] fragen zurecht, ob es sinnvoll ist, den Dirichlet’schen Funktionsbegriff in der Schule zu einem Zeitpunkt zu behandeln, da man noch mit Beispielen und Nichtbeispielen für Funktionen, die den Zuordnungsaspekt von Funktionen betonen, beschäftigt ist.

In der Schulpraxis sind Funktionen zunächst linear, dann quadratisch, dann polynomiell und später rational, exponentiell oder logarithmisch [Tal96]. Fischer & Malle [FM85] fragen, ob es nicht sinnvoller sei zu definieren „Eine Polynomfunktion ist ...“ anstatt die Dirichletdefinition an den Anfang zu stellen. Schließlich definiere man auch nicht, was eine „Zahl“ ist, sondern lediglich was „natürliche, ganze, usw. “ Zahlen sind.

Tatsächlich hat der Funktionsbegriff eine lange Entwicklung durchgemacht, die i.a. in der Schule nicht nachvollzogen wird [4]. Deswegen ist eine Einsicht in die Notwendigkeit der Allgemeinheit der Definition (zunächst) oft nicht möglich.

Begriffe werden in der Mathematik durch Eigenschaften der darunter fallenden Objekte definiert. Zur Präzisierung eines Begriffs, verwendet man nur bestimmte mathematisch ausdrückbare Aspekte, so dass manche zunächst mitgedachten Aspekte des Begriffs im Zuge eines Exaktifizierungsprozesses verloren gehen. Fischer & Malle [FM85] beschreiben dies anhand des Funktionsbegriffs:

Leonard Euler (1707–1783) fasste unter „Funktionen“ zunächst nur stetige Funktionen – nämlich solche, die im „im freien Zug der Hand“ gezeichnet werden können:

> „[...] omnes enim lineae curvae per nullam certam aequationem determinatae, cuiusmodi libero manus tractu delineari solent.“

[4] Zur historischen Entwicklung des Funktionsbegriffes sei zum Beispiel verwiesen auf [Kro97, Mal80, His02]

> („[...] nämlich alle, durch keine bestimmte Gleichung festgelegten Kurven („krummen Linien"), auf welche Art auch immer sie im freien Zug der Hand gezeichnet zu werden pflegen.")
>
> (aus: Kronfellner [Kro97], zitiert nach: Youshkevitch [You76], S. 68, übersetzt von Kronfellner (ibid.).)

Im Dirichlet'schen Funktionsbegriff wird auf den Aspekt der „Glattheit" verzichtet. Dieser Aspekt wird durch einen Zusatzbegriff, nämlich den der Stetigkeit wieder „zurückgeholt". Exaktifizierung hat aber ihren Preis – man entfernt sich dadurch von den ursprünglichen Problemstellungen, die die Begriffsbildung überhaupt erst angeregt haben. Deswegen sind exakte Begriffe oft schwer vermittelbar [FM85].

Ein anderer Aspekt, der in der Dirichletdefinition nicht mehr offenbar ist, ist der dynamische Aspekt von Funktionen. Die Definition betont mehr den statischen Zuordnungsaspekt. Dazu findet man beispielsweise bei Malik [Mal80]:

> „[...] a deep gap separates early notions of functions, based on an implicit sense of motion, and the modern definition of function, that is „algebraic" in spirit, appeals to discrete approach and lacks a feel for variable."

In der didaktischen Literatur wird deswegen häufig für einen historisch–genetischen Zugang zum Funktionsbegriff plädiert, bzw. dafür die Dirichletdefinition möglichst spät im Unterricht zu behandeln, zum Beispiel [Kro97, Kro98, FM85]. Dies ist sicherlich im Sinne der vorliegenden Arbeit, denn Schülerinnen und Schüler sind durchaus in der Lage funktional zu denken, auch ohne die Definition für Funktion zu kennen.

Die Allgemeinheit der Dirichletdefinition wird in der Schule erst bei der Behandlung von Konzepten der Analysis einsichtig [FM85]. Ohne die Eindeutigkeit der Zuordnung wäre die Beschreibung von Änderungsverhalten eines funktionalen Zusammenhangs, zum Beispiel im Sinne von „Steigung" nicht möglich. Auch algebraische Operationen mit Funktionen als Objekten wie zum Beispiel die „Hintereinanderausführung" erfordern eindeutige Zuordnungen.

1.2.2.2 Epistemologische Denkhürden

Die Arbeit von Vinner & Dreyfus [VD89] lässt sich mit der Arbeit von Sierpinska [Sie92] in Zusammenhang bringen. Sierpinska benennt und beschreibt *epistemologische Denkhürden*, die im Zusammenhang mit Funktionen und funktionalem Denken auftreten.

Der Begriff *epistemologische Hürde* wurde ursprünglich von Guy Brousseau [Bro83] geprägt. Das Konzept der *epistemologischen Denkhürden* geht davon aus, dass Wissensbildungsprozesse nicht linear verlaufen. Im Verlaufe müssen immer wieder Denkhürden bzw. Brüche überwunden werden. Diese Hürden sind quasi natürlich in dem Sinne, dass sie sich aus einem genetischen Aufbau des Stoffes ergeben. Eine typische Denkhürde, aus dem Bereich der Zahlbereichserweiterung, die den Begriff der epistemologischen Hürde sehr gut illustriert, wird in [Pre04] beschrieben: Kinder machen zunächst Erfahrungen mit natürlichen und ganzen Zahlen und damit verbundenen Operationen wie „$+, -, \cdot, \div$". Dabei entwickeln sie die Vorstellung, dass beispielsweise Multiplikation ein Vergrößern bedeutet. Bei Multiplikation mit Brüchen kann das Ergebnis aber auch kleiner werden. Bei der Erweiterung des Zahlbereiches von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ stellt dies eine typische Denkhürde dar. In [Pre04] werden solche Denkhürden als Bildungsanlass gesehen. In der Auseinandersetzung mit und Überwindung von solchen „Bruchstellen" liegt ein fortschreitendes Verständnis.

Die epistemologischen Hürden hängen in gewisser Weise vom *concept image*, also der Menge der mentalen Bilder und charakterisierenden Eigenschaften, ab. Die Denkhürden sind nämlich abhängig von den Vorstellungen, Ideen und Deutungen im Zusammenhang mit dem Begriff. Sierpinska [Sie94] schreibt, dass sich der Begriff *epistemologische Hürde* nicht definieren lässt, zumindest nicht so, dass es eine Definition gäbe, die breiten Konsens findet. Dennoch lenkt der Begriff unser Denken. Er ist aber besser beschreibbar durch seine Auswirkungen auf die Forschung, zu welchen Fragen er führte, welcher Diskurs um ihn herum entstand bzw. durch die Angabe von Beispielen. Er ist also nicht definierbar, wohl aber explizierbar. So sieht Sierpinska epistemologische Hürden als kulturelles Phänomen, abhängig von der jeweiligen Sozialisation. Ein zu verstehendes Objekt muss erst als solches erkannt werden und das Erkennen ist abhängig von der Sozialisation. Für die mathematische Ausbildung ist diese Sicht sehr wertvoll.

Die *illusion of linearity* ist ein Beispiel einer solchen Denkhürde im Zusammenhang mit Funktionen. Verbindet man mit dem Funktionsbegriff den Prototyp einer linearen Funktion, so erachtet man Proportionalitäten eventuell als bevorrechtigte Arten von Beziehungen. Diese Hürde entstand aber aufgrund einer mathematischen Sozialisation, die den Begriff der Proportionalität an den Anfang stellt, wenn es um die Erarbeitung des Funktionsbegriffs geht.

Sierpinska [Sie92] identifiziert 16 epistemologische Hürden im Zusammenhang mit funktionalem Denken, von denen im Folgenden einige wichtige genannt werden:

- „Computational techniques used in producing tables of numerical relationships are not worthy of being an object of study in mathematics." [Sie92], S. 32
- „Laws in physics and functions in mathematics have nothing in common; they belong to different domains (compartments) of thought." (ibid., S. 42)
- „Proportion is a privileged kind of relationship" (ibid., S. 43)
- „Only relationships describable by analytic formulae are worthy of being given the name of function." (ibid., S. 46)

- „The changes of variables are changes in time.“ (ibid., S. 55)

1.2.2.3 Gewichtung der Aspekte: Zuordnung, Änderung, Objekt

In der Schule haben die in Abschnitt 1.1.3 beschriebenen Aspekte (Zuordnungs-, Änderungs- und Objektaspekt) funktionalen Denkens unterschiedliche Gewichtungen, woraus verschiedene Probleme resultieren.

Der Zuordnungaspekt bereitet am wenigsten Schwierigkeiten [Mal93, Mal00, MP94, Ker81]. Allerdings dominiert der Zuordnungsaspekt in der Schulpraxis (siehe [Stö08], S. 75/76, der auf viele internationale Arbeiten verweist, die dies belegen). Die Überbetonung des Zuordnungsaspektes hängt mit der Dominanz numerischer Zugänge zusammen [GLO92] – sprich einer Annäherung an funktionale Zusammenhänge durch Aufstellen von Wertetabellen. Goldenberg [GLO92] bemerkt, dass durch diesen Zugang zu wenig Erfahrungen mit qualitativ gegebenen Funktionen gemacht werden. Das bestätigt auch Stellmacher [Ste86] und fordert, dass gerade im Einführungsunterricht eine nicht-quantitative Annäherung an Funktionen stattfinden sollte. Ein Beispiel hierfür bildet die Aufgabe „Dreiecksfäche“, die in Abschnitt 1.2.1.1 beschrieben wurde.

Wertetabellen betonen ein punktweises Lesen von funktionalen Zusammenhängen. Obwohl der hohe Nutzen von Wertetabellen oft betont wird [Wei88], da sie nah an der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler sind und deswegen einfach zu lesen sind (auch hinsichtlich der Eigenschaften des funktionalen Zusammenhangs, den sie darstellen), verhindern Tabellen gewisse Sichtweisen.

Wie schon in Abschnitt 1.2.2.2 beschrieben, können Tabellen verhindern, dass Schülerinnen und Schüler Funktionen als Objekte betrachten. Die Dominanz der Darstellungsform Tabelle führt zu dem Glauben, dass Funktionen als zu studierende Objekte keinen Wert haben [Sie92].

In Abschnitt 1.2.2.1 wurde schon ausgeführt, dass auch die Dirchlet'sche Funktionsdefinition den Zuordnungsaspekt betont. Nimmt man die mengentheoretische Definition von Funktion und definiert Funktion als bestimmte Teilmenge eines kartesischen Produkts, wie dies in einigen Ländern noch der Fall ist, so ist dies besonders deutlich. Insbesondere ist der Änderungsaspekt unterrepräsentiert, dadurch, dass er beispielsweise in der Definition nicht eminent ist. Auch in der didaktischen Literatur wird dezidiert auf den vernachlässigten Änderungsaspekt funktionaler Zusammenhänge verwiesen, zum Beispiel [Sch98, Mal00].

Malle [Mal00, Mal93] bemerkt, dass der Kovariationsaspekt am meisten Schwierigkeiten bereitet, da er mit dem Veränderlichenaspekt von Variablen zusammenhängt und dieser i.a. schwer fällt. Dies war auch in den Lösungen zur Aufgabe „Dreiecksfläche“ sichtbar (Abschnitt 1.2.1.1).

Schwierigkeiten mit dem Änderungsaspekt zeigen sich auch bei der Interpretation von Steigung und Wachstum, wenn zum Beispiel die Stelle größten Wachstums mit dem größten absoluten Wert verwechselt wird [MP94, Wei88]. Clement [Cle89] nennt dies auch einen „*height-for-slope*-Fehler“. Diese Verwechslung von *height* und *slope* liegt im Grunde genommen auch den Schwierigkeiten bei der Interpretation von Weg-Zeit Graphen zugrunde (s. Abschnitt 1.2.1.2). Weg-Zeit Graphen werden häufig als Bewegung in der Ebene interpretiert [Ker81, MP94]. Auch Janvier [Jan78] zeigte, dass relatives Lesen von Graphen, also das In-Beziehung-Setzen von Punkten schwer fällt und Schülerinnen und Schüler die Veränderung der Werte nicht nachvollziehen können.

Anna Sfard [Sfa91] weist in ihrer Arbeit darauf hin, dass der Übergang zu einer Objektsicht und damit der Objektaspekt besondere Schwierigkeiten bereitet und besonderer Aufmerksamkeit bedarf (siehe auch Abschnitt 1.1.3). Gerade dieser Aspekt wird erst sehr spät ausgebildet. Für die Analysis ist aber eine Objektsicht von großer Bedeutung, wenn man an globale Eigenschaften von Funktionen denkt bzw. bei der Beschreibung von Änderungsverhalten die Funktion lokal als Objekt betrachtet.

Ich möchte an dieser Stelle nochmals darauf verweisen, dass der Weg über Tabellen nicht abgelehnt wird. Er ist ein sehr fruchtbarer Weg, der aber nicht ausschließich dominieren sollte. Gerade in der Analysis gewinnt man durch Tabellen einen Bezug zu realen Problemen, wenn man zum Beispiel an Messwerte denkt. Bei Freudenthal [Fre73], Band 2, S. 471, findet man beispielsweise einen Vorschlag für einen „numerischen Anlauf“. Dabei geht es darum sich Datenüberblicke zu beschaffen und diese zu analysieren. Man bilde zu einer durch eine Tabelle gegebene Funktion die Differenzentabelle und schließlich die Differenzenquotienten, um zu lokalen Änderungsraten zu gelangen. Blum & Törner [BT83], S. 92, geben in einer Übersicht alltagsnahe Beispiele für lokale Änderungsraten an, wie zum Beispiel x =Zeit, $f(x)$=Weg, lokale Änderungsrate ist Durchschnittsgeschwindigkeit bzw. $f'(x)$ =Geschwindigkeit.

1.2.2.4 Konzepte der Analysis und Kalkülorientierung

Vollrath schreibt

> „Funktionales Denken beginnt bei intuitiven Vorstellungen über funktionale Zusammenhänge wie ‚Wenn man die eine Größe ändert, dann ändert sich die andere‘ oder ‚Je mehr ..., desto mehr ...‘ und es ist voll entwickelt bei Denkweisen der Analysis.“
> [Vol89], S. 27

Die Realität ist aber ein zumeist kalkülorientierter Analysisunterricht, der durch ein Verharren in Berechnungen gekennzeichnet ist. Inhaltliche Vorstellungen zu Konzepten der Analysis werden wenig entwickelt [BK79b, Ste86, Ben91, HP08]. Beispielsweise führt Müller-Philipp [MP94] in ihrer Dissertation aus, dass eine Auswertung vieler in- und ausländischer Studien ergeben habe, dass beim Thema „Funktionen“ ein schlechtes Begriffsverständnis in folgendem Sinne vorliege:

> „Nicht begriffliches Wissen, sondern höchstens prozedurale Kompetenz ohne begriffliche Basis ist das Ergebnis des Unterrichts für viele Schüler."
> [MP94]

Schon im Zusammenhang mit der Meraner Reform wurde dies als Gefahr angesehen. So findet man bei Weinmeister[5] im Jahr 1907:

> „Bekanntlich enthält die Unendlichkeitsrechnung sehr viel Formeln, die dem Schüler in Fleisch und Blut übergehen müssen, soll der Unterricht seinen Zweck erfüllen. Da liegt denn die Gefahr nahe, dass der Schüler glaubt, das Wesen des Unterrichts liege in diesen Formeln, und es genüge deren Kenntnis und ihre Anwendung zu seiner mathematischen Ausbildung."
> [Wei07], S. 13

Einige paar Jahre später findet Toeplitz [6] 1928 deutlichere Worte:

> „Wenn die Schule nicht imstande ist, aus der Infinitesimalrechnung mehr als den bloßen Kalkül herauszuholen, dann muss sie die Infinitesimalrechnung besser heute als morgen wieder beiseite stellen."
> [Toe28]

Tatsächlich war die Einführung der Infinitesimalrechnung in die Curricula der höheren Lehranstalten im Zuge der Meraner Reform sehr umstritten:

> „Wohl kaum hat eine Frage die mathematische Lehrerwelt Deutschlands so in Erregung versetzt als die zur Zeit schwebende über die Einführung der Infinitesimalrechnung in die höheren Lehranstalten. Viel ist dafür und dagegen gesprochen worden; Berufene und Unberufene sind zu Wort gekommen; fast jeder hat energisch im Grundton der Überzeugung geredet, so dass man an einem friedlichen Übereinkommen zweifeln sollte."
> [Wei07], S. 1

Tall [Tal96], S. 306ff, verweist auf einige internationale Studien zum Thema prozedurale Kompetenz versus strukturelles Verständnis in der Analysis. Er bemerkt (S. 306): Wenn sich fundamentale Konzepte der Analysis als schwer erweisen, so konzentrieren sich Schülerinnen

[5] Philipp Weinmeister (1848-1910) war Mathematiker, Physiker und Meteorologe, der zuletzt an der *Forstlichen Hochschule Tarandt* lehrte, einer Hochschule, die letztlich der Technischen Universität Dresden angegliedert wurde.

[6] Otto Toeplitz (1881-1940) war deutsch-jüdischer Mathematiker und Professor in Bonn. Nach der Machtergreifung der Nazis musste er seine Position aufgeben. Er emigrierte 1939 nach Palästina.

und Schüler gerne auf symbolische Routinen der Differential- und Integralrechnung. Wenn die Lehrperson die konzeptuellen Mängel dadurch ausgleicht, dass in den Prüfungen nur zu bewältigende Aufgaben im Sinne der Kalkülroutine gestellt werden, so landet man schnell in einer prozeduralen Spirale. Beispielsweise stellte Eisenberg [Eis92] fest, dass sich Schülerinnen und Schüler oft nicht bewusst sind, dass Differentiation und Integration inverse Prozesse sind. I.a. werden sie als zwei voneinander unabhängige Prozeduren gesehen, die man beide beherrschen muss und die sich auf bestimmte Aufgabentypen beziehen, für die man lediglich Bewältigungsstrategien entwickeln muss. Da sich die Bewältigungsstrategien immer auf bestimmte Aufgabentypen beziehen, versagen Schülerinnen und Schüler bei „unüblichen“ Aufgaben.

Wie schon in Abschnitt 1.1.1 erwähnt, nimmt für Tall (ibid., S. 289) die Analysis eine Stellung zwischen elementarer und höherer Mathematik ein. In manchen Ländern wird Analysis in der Schule intuitiv gelehrt und gelernt, indem zum Beispiel der Grenzwertbegriff vermittels einer variablen Größe, die sich einem festen Wert „immer mehr annähert“ eingeführt wird. In anderen Ländern liegt der Fokus auf der formalen Theorie, die die $\epsilon - \delta$-Definition für Grenzwert beinhaltet. Andere wieder suchen einen Mittelweg. Gerade der Analysisunterricht zeichnet sich seit seiner Einführung in die Curricula durch einen Spagat zwischen Anschaulichkeit und Strenge aus [BK79a]. Wir finden schon bei Lietzmann[7] im Jahr 1926:

> „Durch die Einführung infinitesimaler Methoden erhalten die Schüler Kenntnis von dem wichtigsten Werkzeug der Mathematik. Hier hat der Unterricht einen Mittelweg zu suchen zwischen berechtigten Anforderungen an wissenschaftliche Strenge und der Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse, und er wird das Hilfsmittel geometrischer Veranschaulichung ausgiebig benutzen müssen.“
> (aus den methodischen Bemerkungen für den mathematischen Unterricht in den Preußischen Richtlinien von 1925, zitiert nach Lietzmann [Lie26], S. 263 bzw. 261)

Das Spektrum an Zugängen zur Analysis ist groß. Für Tall [Tal96], S.294, umfasst es reale Probleme, innerhalb derer Intuitionen enaktiv aufgebaut werden können, indem visuell-räumliche Repräsentationen gebildet werden können, sowie numerische, symbolische und graphische Repräsentationen bis hin zum formalen Definition-Satz-Beweis–Zugang. Jedem dieser Zugänge liegt das *Grenzwertkonzept* zugrunde, welches mannigfache kognitive Probleme verursacht (zum Beispiel beschreibt Cornu in [Cor92] welcher Art diese Probleme sein können und welche Ursachen sie haben). Die enaktive reale Welt bezieht sich auf einen praktischen approximativen Level. Der graphische Zugang erlaubt wiederum eine implizite bzw. indirekte

[7] Karl Julius Walther Lietzmann (1880-1959) war deutscher Mathematiker und Pädagoge. Zuletzt war er Professor für Pädagogik der exakten Wissenschaften in Göttingen. Sein oben zitiertes Werk *Methodik des mathematischen Unterrichts* hatte nachhaltigen Einfluss auf die fachdidaktische Ausbildung von Mathematiklehrern.

Behandlung, zum Beispiel durch Vergrößerung, um zu sehen, dass ein Graph lokal durch eine Gerade gut angenähert wird.

In Deutschland geben die Rahmenpläne und Curricula der meisten Bundesländer vor, den Grenzwertbegriff rein intuitiv zu behandeln. Im Berliner Rahmenplan für die gymnasiale Oberstufe findet man beispielsweise

> „Die Ableitung ist als Grenzwert des Differenzenquotienten zu definieren. Dabei wird der Grenzwertbegriff propädeutisch verwendet, da exakte Konvergenzkriterien für Folgen ebenso wenig wie die entsprechenden Konvergenzkriterien für Funktionen als inhaltliche Voraussetzung zur Verfügung stehen."
> [SfB06a], S. VII

Später ist im Rahmenplan immer wieder von einem „inhaltlich-anschaulichen Grenzwertbegriff" die Rede. Unklar bleibt dabei, was genau damit gemeint ist.

Nach Erörterung der Probleme bei der Umsetzung des Analysisunterrichts in der Schule liegt die Forderung nach einer Stärkung der qualitativ-inhaltlichen Zugänge zur Analysis auf der Hand. Diese Forderung wurde – wie in obigen Zitaten sichtbar – schon im Zusammenhang mit der Meraner Reform gestellt. Man findet sie aber beispielsweise auch in [HP08, BDHW01, Blu00] wieder. Freudenthal [Fre73] formuliert diese Forderung so:

> „Noch weniger als andere Gebiete soll Analysis als eine Struktur behandelt werden, die ehrfürchtiges Staunen erweckt, und noch mehr als andere als ein Werkzeug, das die, die es zu hantieren lernen, dringend nötig haben und hantieren können, wenn sie es müssen. Dazu ist dann etwas anderes erforderlich, als daß man wohlgebildete sprachliche Ausdrücke kennt, die definieren was eine offene Menge, ein Limes, ein Differentialquotient und ein Integral ist; man muß vielmehr solche Begriffe geometrisch und numerisch erlebt haben, auch wenn man sie nicht gerade in eine über jeden Einwand erhabene Definition fassen kann."
> [Fre73], Band 2, S. 470

Im aktuellen Berliner Rahmenplan für die Sekundarstufe I für den 12-jährigen gymnasialen Bildungsgang findet man die Forderung nach einem qualitativ-inhaltlichen Zugang zu Konzepten der Analysis im Modul P9 für die Doppeljahrgangsstufe 9/10 verankert. Das bedeutet, dass das Problem der Kalkülorientierung nun erstmalig dezidierten Niederschlag im Rahmenplan gefunden hat, indem der Einstieg in die Analysis in Klasse 10 qualitativ-inhaltlich stattfinden soll. Das Modul P9 heißt *Veränderungen mit Funktionen beschreiben* und ist der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* zugeordnet. Dort findet man:

> „Im Vordergrund steht der Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen bei numerischen und graphischen Darstellungen von funktionalen Zusammenhängen und dem Wechsel zwischen sprachlichen, numerischen, graphischen und symbolischen Darstellungen. Schülerinnen und Schüler interpretieren Realsituationen, die durch funktionale Zusammenhänge beschrieben werden. Vertieft wird das Arbeiten mit qualitativ und durch Terme gegebenen Funktionen im Hinblick auf mittlere und lokale Änderungsraten. Dabei diskutieren Schülerinnen und Schüler Veränderungsprozesse, suchen markante Punkte auf und lösen damit Probleme. Veränderungsraten werden berechnet und graphisch abgelesen, Ableitungsfunktionen qualitativ erstellt und als Grundlage für einen argumentativen Umgang genutzt. Funktionen werden aus ihren Ableitungen rekonstruiert. "
> [SfB06b], S. 57

1.3 Zusammenfassung der Problemlage und Ziele der Arbeit

Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zu einem qualitativ-inhaltlichen Zugang zur Differential- und Integralrechnung geleistet werden. Konzepte der Analysis sollen qualitativ erfahren und entwickelt werden, bevor das Kalkül im Unterricht behandelt wird. Dies ist auch in Übereinstimmung mit der Forderung im Berliner Rahmenplan zum Modul P9, welches oben zitiert wurde. Es wird der Begriff des funktionalen Denkens, wie er in der Meraner Reform geprägt wurde, zugrunde gelegt.

Viele Probleme in der Analysis resultieren aus Problemen mit dem Funktionsbegriff. Zum einen ist die Definition von Funktion abstrakt und wichtige Aspekte sind nicht offensichtlich. Zum anderen werden nur bestimmte Funktionenklassen behandelt, die das *concept image* der Schülerinnen und Schüler von Funktion prägen. Damit hängt die Etablierung von *epistemologischen Hürden* verbunden mit den Funktionsbegriff zusammen.

Da in der Analysis Änderungsaspekt und Objektaspekt von funktionalen Zusammenhängen von hoher Bedeutung sind, sollen diese besonders akzentuiert werden. Wie man in den Beispielen „Dreiecksfläche" und „Die Reise" gesehen hat, führt die Betrachtung von Funktionen unter dynamischen Gesichtspunkten ganz natürlich zu Konzepten der Analysis, denn von einem höheren Standpunkt aus lassen sich die beiden Beispiele mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erklären.

In vielen Studien wurde aber gezeigt, dass genau die Aspekte Änderung und Objekt am meisten Schwierigkeiten bereiten. Insbesondere der Änderungsaspekt – und, wie in Kapitel 2 gezeigt wird, auch der Objektaspekt – lässt sich mit einer Dynamischen Geometrie Software (DGS) besonders einfach hervorheben. Mit DGS kann man insbesondere die Kovariation von Punkten visualisieren, da man abhängige und unabhängige Punkte unterscheiden und deren Abhängigkeit in der Dynamik untersuchen kann [FLM07].

Dafür werden in Kapitel 2 Gestaltungsprinzipien für interaktive Lernumgebungen basierend auf DGS vorgestellt, die in drei Lernumgebungen umgesetzt wurden. Die Gestaltungsprinzipien zielen insbesondere auf Änderungs- und Objektaspekt von Funktionen. Die Aspekte werden in der Nutzung der Lernumgebungen trotz der Schwierigkeiten, die die Aspekte bereiten, zugänglich gemacht. Gemeinsam mit explorativen Aufgaben sollen in der Dynamik lokale und globale Funktionseigenschaften erlebbar gemacht werden, die direkt auf Konzepte der Analysis führen. Um einer Verengung des Funktionsbegriffs entgegen zu wirken, werden nicht nur die üblichen Funktionenklassen visualisiert. Die funktionalen Abhängigkeiten sind im dynamischen Transfer zwischen den Darstellungsformen Situation und Graph zu erkunden. Tabellen und analytische Ausdrücke kommen nicht vor, zumal auch Funktionen behandelt werden, die nicht durch einen einzigen analytischen Ausdruck darstellbar sind. Dies zielt insbesondere in Richtung der oben beschriebenen *epistemologischen Hürden*.

An dieser Stelle sei nochmals an das Zitat aus den methodischen Bemerkungen für den mathematischen Unterricht im Rahmen der *Richertschen Schulreform in Preußen*[8] erinnert:

> „Durch die Einführung infinitesimaler Methoden erhalten die Schüler Kenntnis von dem wichtigsten Werkzeug der Mathematik. Hier hat der Unterricht einen Mittelweg zu suchen zwischen berechtigten Anforderungen an wissenschaftliche Strenge und der Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse, und er wird das Hilfsmittel geometrischer Veranschaulichung ausgiebig benutzen müssen."
> Zitiert nach [Lie26], S. 263 bzw. 261.

Zum einen wird hier auf die Problematik hingewiesen, dass man sich zwischen Anschaulichkeit und Strenge zu bewegen habe und zum anderen darauf, dass Anschaulichkeit am besten durch geometrische Veranschaulichung erfolgen könne. Blum & Kirsch [BK79a] widmen diesem Thema einen ganzen Zeitschriftenband.

Die entwickelten Lernumgebungen sollen im obigem Sinne ein Mittel zur geometrischen Veranschaulichung sein. Mathematische Strenge resultiert dabei aus mathematischer Konsistenz der Lernumgebungen. Zur Zeit Lietzmanns war eine dynamische Veranschaulichung, wie sie heute mit DGS möglich ist, noch nicht denkbar. Dynamische Visualisierungen werfen aber ganz neue didaktische Fragen auf. Da die Umgebungen auf einer DGS basieren, wird die Arbeit von der Grundfrage geleitet, ob die Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit den Lernumgebungen lediglich geometrische Objekte wie Punkte und Geraden bewegen bzw. manipulieren und dabei lernen, wie man solche Applikationen liest, oder ob und wie solche Lernumgebungen tatsächlich einen Beitrag zur Konzeptualisierung in Richtung Analysis leisten können.

[8] In Preußen wurden basierend auf den Meraner Lehrplänen im Jahr 1925 die *Richertschen Lehrpläne* als offizielle preußische Lehrpläne herausgegeben. Diese blieben im Wesentlichen bis in die 60er Jahre des 20. Jahrhunderts erhalten. Infinitesimalrechnung war ein verbindlicher Bestandteil der Lehrpläne. [Sch71]

Kapitel 2

Grundideen und Gestaltungsprinzipien der interaktiven Visualisierungen

In diesem Kapitel werden die Grundideen zu einem Computereinsatz im Rahmen eines propädeutischen Analysisunterrichts vorgestellt und begründet. Dabei werden die zugrunde liegenden Gestaltungsprinzipien für interaktive Lernumgebungen, die eine Konzeptualisierung im Hinblick auf Ideen der Analysis unterstützen sollen, erläutert und in einen theoretischen Rahmen gestellt. Arbeitsweisen und Wirkung werden herausgearbeitet und von anderen Ansätzen zum Technologieeinsatz im Rahmen von Analysisunterricht abgegrenzt.

Die Gestaltungsprinzipien sind in drei Lernumgebungen umgesetzt worden. In diesem Kapitel wird zur Erklärung der Prinzipien eine der Lernumgebungen vorgestellt. Die anderen beiden Lernumgebungen werden in Kapitel 3 dargelegt und analysiert.

Eine Beschreibung der Grundideen und Gestaltungsprinzipien findet man auch in [Hof09a, Hof09b, Hof09c, Hof10, Hof11b].

Die Applikationen innerhalb der Lernumgebungen sind in Zusammenarbeit mit Andreas Fest, PH Ludwigsburg, entstanden.

2.1 Grundidee

Die Grundidee des Computereinsatzes ist die Nutzung *interaktiv-experimenteller Visualisierungen*, bei denen die *dynamische Komponente funktionalen Denkens* hervorgehoben ist. Ziel ist die Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen im Hinblick auf eine Propädeutik zur

Differential- und Integralrechnung durch *dynamischen Darstellungstransfer zwischen Situation und Graph*.

Die Lernumgebungen basieren auf der Dynamischen Geometrie Software (DGS) *Cinderella* [KRG]. Das hervorstechende Merkmal von DGS ist der Zugmodus und damit die Beweglichkeit der Objekte. Der Zugmodus erlaubt Simultanität zwischen Schüleraktion und DGS-Feedback. Diese Simultanität ist ein vielversprechendes Mittel zur Überbrückung von experimenteller und theoretischer Mathematik [Leu03].

Beim Lehren und Lernen von Analysis ist ein Einsatz von graphikfähigen Taschenrechnern und Computeralgebrasystemen sehr gebräuchlich. Tall [Tal96] verweist darauf, dass dadurch verschiedene Repräsentationen von Funktionen, wie graphische und symbolische, in Kombination dargestellt werden können. Dennoch arbeitet ein CAS input-output basiert und Information bzw. Veränderung wird im allgemeinen asynchron wiedergegeben. DGS zeichnet sich demgegenüber durch Interaktivität und sofortige Rückmeldung aus [Kor07]. Dieses Charakteristikum lässt sich für die Akzentuierung des dynamischen Aspektes funktionaler Zusammenhänge nutzen, und in Richtung Analysis durch tiefergehende Beschreibung und Visualisierung von Änderungsverhalten weiterführen:

> „But the big revolution in teaching mathematics with technologies was the introduction of dynamicity in software: A dynamic way to control and master the virtual objects on the computer let the student explore many situations and notice what changes and what not. And the mathematics of change is the first step on the road to calculus."
> [FPR06], S. 257

Die Exploration von Veränderung mit DGS ist charakterisiert durch die Möglichkeit der Unterscheidung von ‚abhängigen' und ‚unabhängigen' geometrischen Objekten bei der Benutzung des Zugmodus. Unabhängige Variablen können durch Punkte repräsentiert werden, die direkt bewegt werden können, und abhängige Variablen durch Punkte, die indirekt bewegt werden. Dies wurde beispielsweise in einer Arbeit von Falcade et al. [FLM07] hervorgehoben, die DGS zur Einführung des Funktionsbegriffes im Rahmen einer Studie verwendeten. In Kapitel 2.4 wird auf diese Studie nochmals eingegangen.

Tall [Tal96] verweist darauf, dass der Fokus beim Lehren und Lernen von Analysis nicht nur auf den mathematischen Inhalten, sondern auch auf den mentalen Prozessen liegen muss. Hier kann ein Computereinsatz sinnvoll sein, denn Visualisierungen und Simulationen ermöglichen die Verknüpfung von Repräsentationen und ermöglichen somit eine Erweiterung an verfügbaren Repräsentationen in der Analysis. Die Repräsentationen, auf die sich Tall (ibid.) dabei bezieht, sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

Tall bezieht sich dabei auf folgenden theoretischen Rahmen: Elementare Analysis ist durch einen intuitiven Einstieg über eine enaktive Phase gekennzeichnet, in der zum Beispiel das

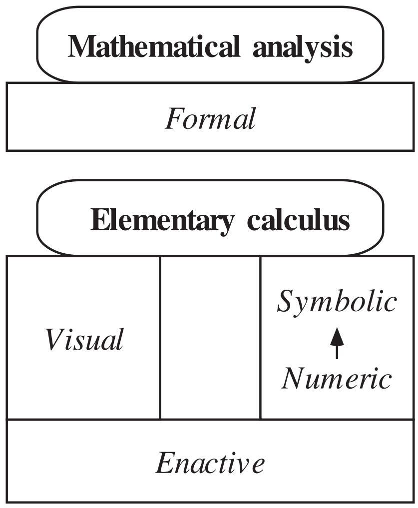


Abbildung 2.1: Repräsentationen in der Analysis (Abbildung aus: [Tal96], S. 292)

Phänomen „Kontinuität“ erlebbar ist. In Abbildung 2.1 gibt es von unten nach oben einen „cognitive growth“. Beispielsweise kann das enaktive Erleben von kontinuierlicher Änderung die Existenz einer (momentanen) Änderungsrate implizieren und schließlich einen Zusammenhang zwischen den – theoretisch zunächst unterschiedlichen – formalen Konzepten Stetigkeit und Differenzierbarkeit anzeigen. Viele Autoren theoretisieren, dass Wachstum menschlichen Wissens mit *Handlungen* (‚actions‘) beginnt (zum Beispiel [Pia72], [Sfa91]). Manche Handlungen werden wiederholbare *Prozesse* und werden später als *Objekte* erfasst, die auf höherem geistigen Niveau manipuliert werden.

Die Lernumgebungen, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind, sollen einen intuitiven Einstieg in die Analysis im Sinne Talls unterstützen. Insbesondere sollen dadurch gewisse Phänomene der Analysis (virtuell) erlebbar gemacht weren. Bezogen auf die Repräsentationen Talls [Tal96], werden dabei die enaktive und visuelle Repräsentation betont (Abbildung 2.1).

2.2 Gestaltungsprinzipien

Abbildung 2.2 zeigt einen Screenshot der Lernumgebung *Dreiecksfläche* anhand derer die Gestaltungsprinzipien erläutert werden. Die Idee für diese Lernumgebung ist aus der Aufgabe *Dreiecksfläche* (siehe Abschnitt 1.2.1.1) entstanden. In Abschnitt 1.2.1.1 wurde der mathematische Hintergrund der Aufgabe und der Bezug zu Konzepten der Analysis schon kurz erläutert. An dieser Stelle wird unter Heranziehung der explorativen Möglichkeiten der Lernumgebung nochmals darauf eingegangen.

In der Lernumgebung sollen die Schülerinnen und Schüler den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Abstand AD und dem Flächeninhalt des dunkelblauen Flächenanteils des Dreiecks erkunden. Insbesondere soll das Änderungsverhalten charakterisiert werden und die Wendestelle als charakteristischer Moment, in dem sich die Qualität des Wachstums ändert, wahrgenommen und beschrieben werden.

Dieses Beispiel kann im Rahmen einer Analysis–Propädeutik gesehen werden und führt auf die Idee des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: Der Graph zeigt den Bestand an Flächeninhalt in Abhängigkeit vom Abstand AD. Die Dreiecksseiten AC und BC – als stückweise lineare Funktion interpretiert – stellen gerade die Ableitung des Flächeninhaltsgraphen dar. Und umgekehrt beschreibt der Weg vom Dreieck zur Flächeninhaltsfunktion durch Integration die Flächeninhaltsfunktion, welche somit stückweise quadratisch ist. Es liegen hier also keine der üblichen Funktionenklassen vor – stückweise definierte Funktionen werden in der Schule im allgemeinen nicht behandelt. Dies ist gerade im Hinblick auf die Entwicklung eines reichhaltigen *concept image* (siehe Abschnitt 1.2.2.1) von Bedeutung.

Die Wendestelle ist als Maximum in der Ableitung sichtbar – ein Maximum, das man nicht mit dem Kalkül (Nullstelle der zweiten Ableitung) auffinden kann, da die Ableitungsfunktion in C nicht differenzierbar ist. An dieser Stelle *braucht* man also qualitativ-inhaltliche Vorstellungen vom Änderungsverhalten der Funktion.

Die folgenden Gestaltungsprinzipien sollen die Entwicklung geeigneter Vorstellungen durch einen dynamischen Zugang ermöglichen.

2.2.1 Zwei Variationsstufen

Jede Lernumgebung zeichnet sich durch zwei Variationstufen aus, wobei jede der Stufen bestimmte Aspekte der Funktion hervorhebt.

2.2.1.1 Variation innerhalb der Situation

Die erste Variationsstufe ermöglicht durch Bewegung des Punktes D eine *Variation innerhalb der Situation*. Dies macht die dynamische Komponente der Flächeninhaltsfunktion im Transfer zwischen den Darstellungen *Situation* und *Graph* sichtbar. Die Bewegung findet *simultan in Situation und Graph* statt. Monotonie lässt sich nun einfach dadurch ausdrücken, dass „immer mehr Blau dazukommt, wenn man D nach rechts bewegt“.

Dahinter steckt die Idee der *Supplantation* [Vog06], [Sal94]: Soll ein Lernender einen dynamischen Sachverhalt verstehen, so muss er ein „lauffähiges“ mentales Modell konstruieren, um mentale Simulation zu erreichen. Supplantation bedeutet die visuelle Unterstützung mentaler Simulationsprozesse. In seiner Doktorarbeit hat Markus Vogel [Vog06] die Wirksamkeit

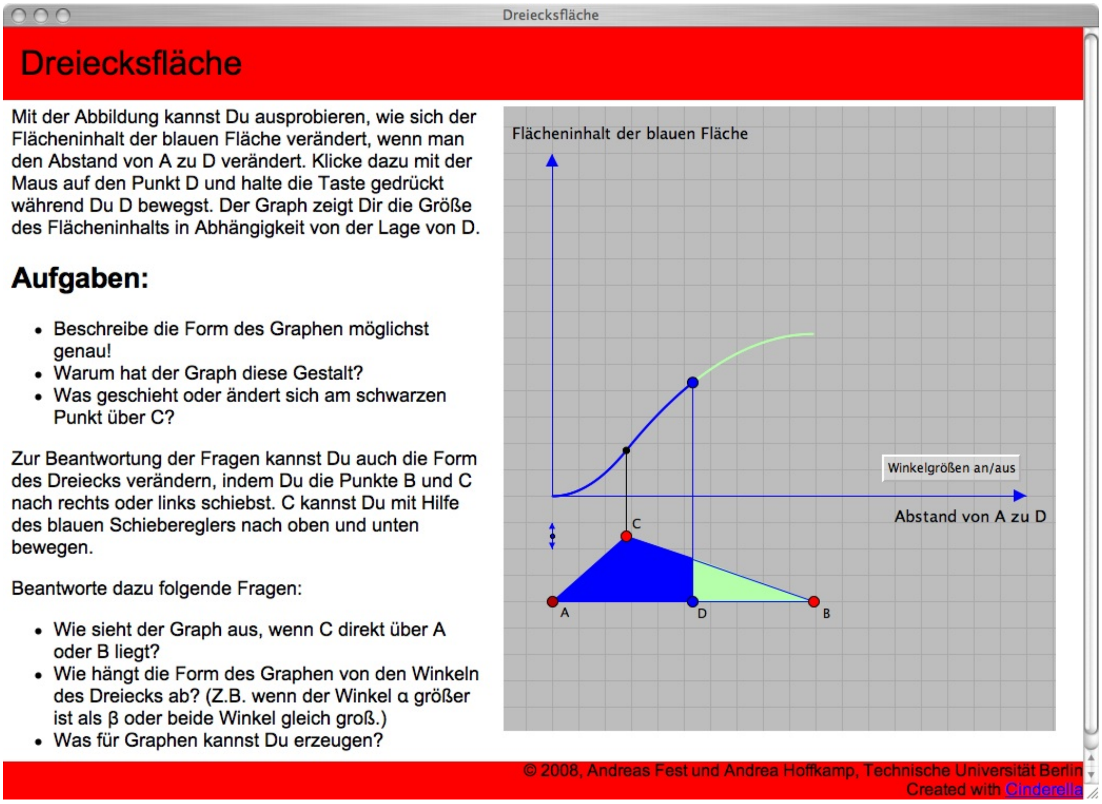


Abbildung 2.2: Lernumgebung *Dreiecksfläche*

von Supplantation beim „Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge“ in einer quantitativen Studie nachgewiesen. Ähnlich weisen auch Falcade et al. [FLM07] darauf hin, dass durch den Einsatz von DGS die Variable Zeit durch den Zugmodus erlebbar wird. Falcade et al. betrachten in diesem Falle die Technologie als Vermittler (sie sprechen hierbei von einem *semiotic mediator* und beziehen sich mit dieser Bezeichnung auf Vygotskij [Vyg78]) und durch Verinnerlichung bzw. Interiorisation wird mentale Simulation und Konzeptualisierung möglich.

2.2.1.2 Variation der Situation – Metavariation

Eine qualitative Beschreibung der Wendestelle als Stelle, bis zu der die Zunahme ansteigt und danach die Zunahme fällt, ist für Schülerinnen und Schüler schwieriger. Eine zweite Variationsstufe – im weiteren Verlauf der Arbeit *Metavariation*[1] genannt – erlaubt nun durch Bewegung der Punkte B und C das Verändern der Situation (in diesem Falle das Verändern des Dreiecks) und damit der Funktion als Ganzes. Abbildung 2.3 zeigt zwei mögliche Situationen unter Metavariation.

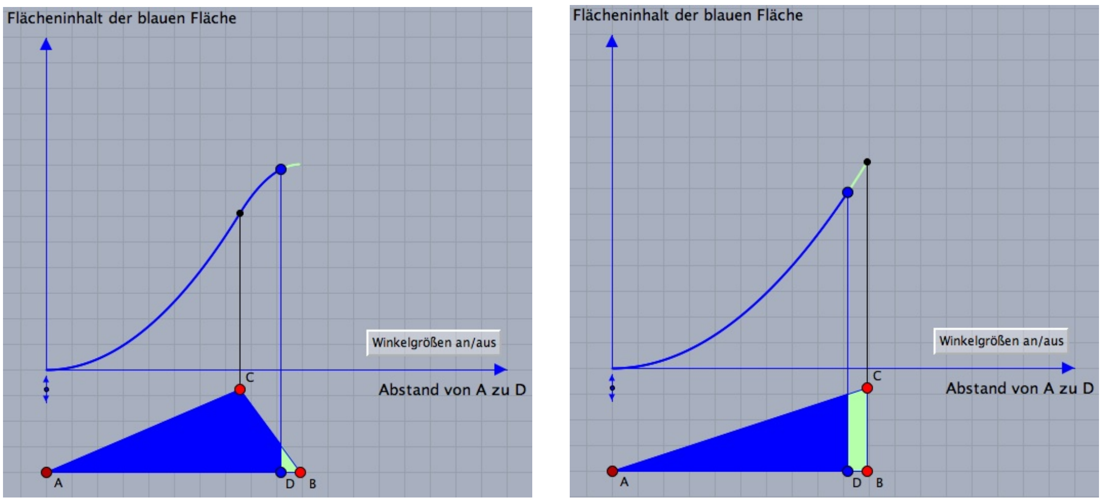


Abbildung 2.3: Metavariation in der Lernumgebung *Dreiecksfläche*.

Metavariation bedeutet Variation innerhalb der Funktion, die der Situation den Flächeninhaltsgraphen zuordnet – also Variation innerhalb des Integraloperators. Der Flächeninhaltsgraph ist ein Bild unter der *Metafunktion* Integraloperator. Somit bezieht sich Metavariation insbesondere auf den Objektaspekt funktionaler Zusammenhänge. Tatsächlich hängen aber Objektsicht und Änderungssicht von Funktionen eng zusammen und lassen sich nur theoretisch

[1] Der Begriff *Metavariation* entstand bei einem Treffen mit Ulrich Kortenkamp, bei dem ich ihm die Gestaltungsprinzipien der Visualisierungen darlegte. Als ich erklärte, dass jede Lernumgebung außer der Variation innerhalb der Situation auch noch die Variation der Situation an sich erlaubte, sagte er: „Ja klar, Metavariation“. Nach einem kurzen Schmunzeln erachteten wir den Begriff als äußerst passend und ich behielt ihn bei.

trennen (siehe Abschnitt 1.1.3). Objekteigenschaften wie Monotonie werden beispielsweise dynamisch beschrieben, und auch bei der Beschreibung von Änderungsverhalten blickt man oft lokal auf die Funktion als Objekt (wenn man beispielsweise an Änderungsraten denkt oder die Differentiation als lineare Approximation sieht). Der Verstrickung von Objektaspekt und Änderungsaspekt wird durch die Einführung der zweiten Variationsstufe Rechnung getragen.

Metavariation ermöglicht darüber hinaus die Loslösung von konkreten Werten und legt somit den Schwerpunkt auf qualitative Betrachtungen. Charakterisierende Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion werden hervorgehoben: So ist Monotonie invariant unter Metavariation, die Wendestelle als charakteristischer Moment im Änderungsverhalten ist „beinahe invariant". Das führt zu Erklärungszwängen und zu Schüleräußerungen wie: „Nach dem schwarzen Punkt über C nimmt er hinzuzuaddierende Flächeninhalt ab.". Es ist bemerkenswert, dass gerade in dieser Schüleräußerung eines Zehntklässlers implizit das Konzept der *Integration als kumulatives Wachstum* steckt.

Auch Begriffe wie „konvex" und „konkav" (falls C über A oder B liegt) werden von den Schülerinnen und Schülern genannt und können weiter erkundet werden. So spiegelt sich die Konvexität der Flächeninhaltsfunktion in Abbildung 2.3 (rechts) im monotonen Wachstum der Ableitungsfunktion (Dreiecksseite AC als lineare Funktion betrachtet) wieder. Die zweite Ableitung wäre also positiv.

Gerade an diesem Beispiel zeigt es sich, wie hilfreich das Vorhandensein eines „lauffähigen" mentalen Modells sein kann. Begriffe wie konvex, konkav und deren Zusammenhang zu den Ableitungen sind in einem Bild vereint und so in *mathematisch komprimierter Form* vorhanden. Tall [Tal94] formuliert das *Prinzip der Kompression* als eigenständiges *kognitives Prinzip*, welches in der Mathematik von großer Bedeutung ist.

> „The brain has a small focus of attention and a huge space for storage and therefore cognitive growth needs to develop:
> - a mechanism for compression of ideas to fit in the focus of attention
> - a mechanism for linking with relevant stored information and bringing it to focus of attention in an appropriate sequence."
>
> [Tal94], S. 2

Talls kognitives Prinzip bezieht sich auf eine Äußerung von Thurston [Thu90], in der *mathematische Kompression* und kognitive Weiterentwicklung noch deutlicher in Beziehung gesetzt werden:

> „Mathematics is amazingly compressible: you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there

> is often a tremendous mental compression. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics.“
> [Thu90], S. 847

Die Lernumgebungen kann man als visuelle Kompression mathematischer Inhalten betrachten. Sie betonen in einer komprimierten, integrierten Darstellung die Aspekte Änderung und Objekt von Funktionen. Durch Informationsreduktion ist es möglich gewisse Aspekte deutlicher hervorzuheben.

2.2.2 Verknüpfung Situation – Graph

Der Ausgangspunkt jeder Lernumgebung ist ein funktionaler Zusammenhang innerhalb einer (außer- oder innermathematischen) Situation und deren dynamische Verknüpfung mit der Darstellungsform Graph. In Abschnitt 1.1.4 wurde schon darauf hingewiesen, dass verschiedene Darstellungen unterschiedliche Aspekte eines Begriffs verdeutlichen. Durch Anknüpfung an eine Situation sollen inhaltliche Vorstellungen im dynamischen Transfer zur Darstellungsform Graph entwickelt werden. Die Darstellungsform Situation ermöglicht die Anknüpfung an vorunterrichtliche Vorstellungen. Zur Beschreibung der Veränderung können Begriffe wie „Flächeninhalt“ oder „Geschwindigkeit“ (Lernumgebung *Die Reise*, Abschnitt 3.2) herangezogen werden.

Die Darstellungsform Graph wurde gewählt, weil sie sich besonders auf den Änderungs- und Objektaspekt von Funktionen bezieht. Ein Funktionsgraph enthält die gesamte Information über die Funktion „auf einen Blick“, also im komprimierter Form (siehe Abschnitt 2.2.1.2). Mit einem Graphen kann man unabhängig von einzelnen Werten lokale und globale Eigenschaften der Funktion in einem Bild wiedergeben.

Funktionsgraphen ermöglichen aber insbesondere einen intuitiven – und durch Dynamisierung der Darstellung – enaktiven Zugang zu den Konzepten und Begriffen (siehe Abschnitt 2.1). Stellmacher [Ste86] plädiert beispielsweise für eine nichtquantitative Beschreibung von Funktionen und deren Eigenschaften mit Hilfe von Graphen. Seiner Meinung nach ermöglicht solch ein Zugang den Aufbau einer geeigneten intuitiven Basis für weitere Begriffsbildung und Konzeptualisierung.

2.2.3 Kontiguität

Bei der Gestaltung der Lernumgebungen spielt das *Prinzip der Kontiguität* [May05] eine wichtige Rolle. Kontiguität meint in diesem Zusammenhang die zeitliche und räumliche Nähe von

Darstellungsformen, die sich aufeinander beziehen. Beispielsweise sind der beschreibende Text und die Aufgabenstellungen zu jeder interaktiven Visualisierung direkt neben der Applikation platziert. Aber Kontiguität ist hier noch weiter gefasst. Es wurde darauf geachtet, dass Bewegung genau dort stattfindet, wo mit der Maus agiert wird. So wurde bei der Gestaltung zum Beispiel bewusst auf die Verwendung von Schiebereglern verzichtet, da bei deren Manipulation an räumlich anderer Stelle Bewegung stattfindet. Daraus resultiert insgesamt eine integrative Darstellung, in der Dynamik „direkt erlebbar“ wird.

2.2.4 Sprache als Vermittler

In den Aufgabenstellungen zu den Java-Applikationen wird im allgemeinen verlangt, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Beobachtungen und Entdeckungen verbalisieren. Die Applikationen für sich und deren Beobachtung würden wohl noch keine mentalen Prozesse anregen, die in Richtung Konzepte der Analysis gehen. Dazu bedarf es geeigneter Aufgabenstellungen. Bei der Lernumgebung *Dreiecksfläche* soll beispielsweise die Form des Graphen zunächst beschrieben und anschließend begründet werden. Insbesondere wird gefragt „Was geschieht bzw. ändert sich am schwarzen Punkt über C?“.

Die Fragen zu den Lernumgebungen wurden in der Erwartung gewählt, dass dadurch Konzeptualisierungsprozesse angestoßen werden. Verbalisierung spielt dabei eine entscheidende Rolle. In der Literatur findet man viele Arbeiten zur Rolle von Sprache in diesem Zusammenhang. Hier soll nur kurz auf ein paar wesentliche Dinge eingegangen werden.

Janvier [Jan78] betrachtete in seiner Arbeit die Wechselwirkung zwischen Situation und Funktionsgraph. Er hält es für wesentlich, dass sich Interpretationen an der ständigen Wechselwirkung zwischen Situation und Graph orientieren und nicht auf eine Darstellung isoliert bleiben. Die Fragestellungen zu den Lernumgebungen sind deswegen so gestaltet, dass diese Wechselwirkung möglich ist. Die Sprache hat dabei eine Mittlerrolle zwischen den Darstellungen und den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler. Sprache hat somit eine kognitive Funktion. Dies findet man insbesondere in den Arbeiten von Vygotskij [Vyg74] in allgemeinerer Form: Denken und Sprechen bilden eine Einheit. Für Vygotskij ist die Vermittlung über „psychische Werkzeuge“ bedeutend. Er sieht die soziale Realität als Motor für die psychische und geistige Entwicklung und schreibt der Sprache und den Symbolen eine Mittlerrolle zwischen sozialer Realität und psychischer Entwicklung zu:

> „Denken geht aus der praktischen Tätigkeit hervor und wird durch Sprechen, das Wort vermittelt.“
> [Bra05], S. 6

Vygotskij nimmt an, dass die Entwicklung des Denkens vom Sozialen zum Individuellen verläuft und nicht umgekehrt. Insbesondere beeinflussen die Dinge und das Tun den Verstand:

> „Für ihn [Vygotskij] wird das pädagogisch Mögliche nicht durch *selbständige* Tätigkeit des Kindes definiert, sondern durch das, was es in einem *interaktiven* Zusammenhang zu erfassen vermag.“
> [Bra05], S. 13

Dies lässt vermuten, dass die Interaktivität mit den Applikationen gemeinsam mit Interaktion unter den Schülerinnen und Schülern und geeigneten Verbalisierungsaufgaben Denkprozesse und Konzeptualisierungsprozesse anstoßen können.

2.2.5 Geringer technischer Overhead und Praktikabilität

Grundsätzlich sind die Lernumgebungen auf Praktikabilität im Hinblick auf Nutzung im Unterrichtsalltag gestaltet. In seiner Arbeit weist Ruthven [Rut07] darauf hin, dass Technologieeinsatz im Mathematikunterricht immernoch vergleichsweise wenig stattfindet, obwohl in vielen Studien gezeigt wurde, dass Technologieeinsatz bzw. der Einsatz spezieller Lernumgebungen reichhaltige Gelegenheiten zum Explorieren, Experimentieren und mathematischer Konzeptualisierung bieten. Ruthven nennt mehrere strukturelle Merkmale, die für Lehrerinnen und Lehrer zur Entscheidung über einen Technologieeinsatz eine Rolle spielen. Unter anderem spielt die Art des eingesetzten Hilfsmittels (Welche Software? Welche Hardware? usw.) eine große Rolle. Wenn man dem Technologieeinsatz eine längerfristige Einarbeitungszeit (der Lehrperson selbst und der Schülerinnen und Schüler) in die Soft- und Hardware voranschicken muss, ist die Hemmschwelle für einen Einsatz relativ groß. Wichtig für die Entscheidung der Lehrpersonen sind auch methodische Überlegungen: Arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Gruppen? Wie oft wechselt man zwischen Zweierarbeit und Unterrichtsgespräch? Nicht zuletzt ist der Technologieeinsatz auch oft eine Frage des Zeitmanagements.

Die hier vorgestellten Lernumgebungen tragen dem in gewissem Sinne Rechnung. Die Lernumgebungen bestehen aus Java-Applikationen, die in HTML-Seiten eingebunden sind. Neben den Applikationen finden sich Texte, die die Lernumgebung und deren Nutzung kurz beschreiben und dazugehörige Aufgabenstellungen. Die Aufgaben liegen auch auf separaten Papier-Arbeitsbögen vor.

Zur Nutzung der Lernumgebungen genügt ein Standardinternetbrowser. Spezielles Wissen zur Funktionsweise der Software oder das Installieren der Software sind nicht nötig. Die Lernumgebungen sind ohne Einarbeitungszeit direkt nutzbar. Idealerweise arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Paaren am Computer (s. Abschnitt 2.2.4).

2.3 Rolle von Visualisierungen in Mathematik und Mathematikunterricht

Der Kern der Lernumgebungen besteht aus dynamischen Visualisierungen gemeinsam mit Fragestellungen, die zum Explorieren anregen sollen. Tatsächlich spielen Visualisierungen in Mathematik und Mathematikunterricht eine große Rolle. Die für diese Arbeit entscheidenden Aspekte mathematischer Visualisierung werden im Folgenden beschrieben.

Zimmermann & Cunningham [ZC91] umschreiben den Begriff der Visualisierung in der Mathematik folgendermaßen:

> „Mathematical visualization is the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of the computer) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding."
> [ZC91], S. 3

Im Zusammenhang mit Funktionen spielen Visualisierungen eine wichtige Rolle, denn verschiedene Darstellungen einer funktionalen Abhängigkeit sind wichtige Mittel auf dem Weg zur Begriffsbildung. Das Verständnis eines Begriffes ist über das Entdecken und Erkennen der Begriffseigenschaften in den verschiedenen Darstellungen möglich. Dabei geht es um den Aufbau von Beziehungen zwischen dem ursprünglichen Begriff und anderen Begriffen aus Mathematik und Umwelt. Schülerinnen und Schüler müssen neue Aspekte und Unterbegriffe in ein Beziehungsnetz einordnen.

So verweist Weigand [Wei88] darauf, dass neben der Weiterentwicklung von Darstellungen vor allem der erkenntnistheoretische Aspekt von Darstellungen wichtig ist. Mathematikunterricht hat hierbei die Aufgabe

> „[...] den ‚Bedeutungsgehalt' der Darstellungen, der nur implizit in der Veranschaulichung enthalten ist, durch vielfältige und immer umfassendere Anwendungen zu entwickeln."
> [Wei88], S. 289, mit Verweis auf [Jah84]

Die Lernumgebungen vereinen beides: Sie sind Weiterentwicklung in dem Sinne, dass sie dynamische Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten im Repräsentationstransfer sind, und sie erlauben Erkenntniszuwachs durch Exploration.

Fischer & Malle [FM85] greifen obige Gedanken auf und beschreiben die Rolle von Darstellungen in der Mathematik nochmals tiefergehender:

> „Mathematik vollzieht sich gewissermaßen im Wechselspiel zwischen Darstellen, Interpretieren und Operieren.“
> [FM85], S. 221

Das Operative ist im Unterricht immernoch vorherrschend. In ihrem Buch argumentieren Fischer & Malle (ibid.) für eine stärkere Betonung des Darstellens und Interpretierens. Sie verweisen darauf, dass Darstellung und Beschreibung Voraussetzung für regelhaftes Operieren ist, denn es wird mit Symbolen operiert. Die Symbole sind aber gerade Beschreibungen abstrakter Zusammenhänge. Mathematiker führen Abstraktionen oft nicht nur im Kopf aus, sondern entwickeln bildhafte oder symbolische Darstellungen in materieller Form. Diese sind insofern Abstraktionen, da sie durch die Art der Darstellung gewisse Aspekte, Beziehungen oder Prozeduren aus der Wirklichkeit herausgreifen. Die materielle Darstellung von Abstraktem ist ein Wesensmerkmal der Mathematik

Auch Kaput [Kap87] beschreibt dieses Wesensmerkmal und setzt es mit dem erkenntnistheoretischen Aspekt von Darstellungen in Verbindung:

> „The fundamental premise is that the root phenomena of mathematics learning and application are concerned with representation and symbolization because these are at the heart of the content of mathematics and are simultanously at the heart of the cognitions associated with mathematical activity. “
> [Kap87], S. 22

Die Vergegenständlichung bzw. Visualisierung hat also einerseits einen erkenntnistheoretischen Wert. Durch Fokussierung auf gewisse Aspekte, zum Beispiel Dynamik im Darstellungstransfer bei Funktionen, schafft man eine Erweiterung der Denkmöglichkeiten. Malle [Mal84] weist insbesondere darauf hin, dass die heuristische Funktion visueller Modelle gerade dadurch gekennzeichnet ist, dass die Modelle bereits vor einer exakten mathematischen Begriffsbildung verwendet werden können, also beispielsweise wie in dieser Arbeit im Rahmen eines propädeutischen Analysisunterrichts.

Andererseits erlaubt Visualisierung auch die Entwicklung von *visueller Kommunikationsfähigkeit* [FM85]. Die Darstellung eines Funktionsgraphen ermöglicht es über die Eigenschaften der Funktion zu sprechen. Diagramme, Graphen u.ä. sind also auch Kommunikationsmittel. Die Lernumgebungen können Referenzsituationen werden, auf die man sich später wieder beziehen kann und die man in weiteren Lern- und Aushandlungsprozessen nutzen kann. Hier kann man auch wieder den Bogen zur Sicht von Tall [Tal94] schlagen (Abschnitt 2.2.1.2): Visualisierungen stellen eine Möglichkeit der *Kompressionen mathematischer Inhalte und Konzepte* dar.

In diesem Zusammenhang fand Sfard [Sfa94] in Interviews mit forschenden Mathematikern folgendes Statement:

> „To understand a new concept I must create an appropriate metaphor. A personification. Or a spatial metaphor. A metaphor of structure. Only then I can answer questions, solve problems. I may even be able then to perform some manipulations on the concept. Only when I have the metaphor. Without the metaphor I just can't do it."
> [Sfa94]

Mathematiker verfügen oft über hoch entwickelte kognitive Strukturen und benutzen Bilder, um Ideen und Vorstellungen innerhalb dieser kognitiven Strukturen in Beziehung zu setzen. Tall [Tal94] bemerkt, dass bei Schülerinnen und Schülern diese kognitiven Strukturen im allgemeinen noch nicht entwickelt sind, weswegen Bilder oft zu Trugschlüssen führen können[2]. Schülerinnen und Schüler haben meist ihre eigenen Bilder von Konzepten entwickelt und zwar abhängig von ihren Vorerfahrungen. Diese stehen oft in Konflikt mit der formalen Theorie oder eben auch mit der dynamisierten Darstellung in den Applikationen. Dies bringt dann häufig epistemologische Hürden zum Vorschein (siehe Abschnitt 1.2.2.2).

Tall (ibid.) verweist weiterhin darauf, dass es ein Problem von Visualisierungen ist, dass der menschliche Verstand oft implizite Eigenschaften der Bilder aufnimmt und das Individuum ein *concept image* (siehe Abschnitt 1.2.2.1) aufbaut, das diese Eigenschaften einschließt. Bei den Applikationen muss man deswegen fragen, ob die Schülerinnen und Schüler tatsächlich Konzepte der Analysis erkunden, oder ob sie lediglich lernen, wie man solche Applikationen liest. Die Schülerinnen und Schüler manipulieren ja zunächst nicht Funktionen, sondern geometrische Objekte. Dies ist aber genau die Grundfrage, die in Abschnitt 1.3 gestellt wurde und der im Rahmen dieser Arbeit weiter nachgegangen wird.

2.4 Technologieeinsatz beim Thema Funktionen und Analysis

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über den Technologieeinsatz im Bereich Funktionen und Analysis gegeben. Dies dient dazu, den in dieser Arbeit vorgestellten Ansatz besser einzuordnen. Gleichzeitig begründet es die Notwendigkeit einer empirischen Untersuchung zum hier dargestellten Technologieeinsatz. Tatsächlich existieren bislang noch vergleichsweise wenige Arbeiten zum Einsatz von DGS bzw. dynamischen Visualisierungen im Analysisunterricht.

In der Literatur gibt es mannigfache Aufsätze zum Technologieeinsatz beim Lernen und Lehren von Funktionen und Analysis. In diesem Abschnitt werden einige Richtungen und Tendenzen angesprochen. Dabei ist eine vollständige Darstellung nicht möglich (und auch nicht

[2]Tatsächlich können Bilder nicht nur Schülerinnen und Schüler, sondern auch Mathematiker zu Trugschlüssen führen.

beabsichtigt). An dieser Stelle sei deswegen zunächst auf zwei Übersichtsartikel verwiesen, nämlich zum einen Tall [Tal96] und zum anderen Ferrara et al. [FPR06].

Beim Technologieeinsatz im Bereich funktionales Denken und Analysis gibt es verschiedene Möglichkeiten. In vielen Analysiskursen werden *Computeralgebrasysteme (CAS)* verwendet, worunter hier auch graphikfähige/symbolische Taschenrechner gezählt werden sollen. Der Fokus bei der Nutzung von CAS liegt einerseits auf dem Repräsentationstransfer bei funktionalen Abhängigkeiten. Andererseits wird hervorgehoben, dass durch die Nutzung eines CAS ‚komplizierte' Rechnungen abgenommen werden und man so die Möglichkeit hat reale Situationen zu untersuchen und sich dabei mehr auf die Konzepte konzentrieren kann. Tall [Tal96] zählt einige Studien zur Wirksamkeit von CAS im Analysisunterricht auf. Im Prinzip wurde herausgefunden, dass Lernende mit Computerunterstützung besser bei konzeptuellen und rechnerischen Aufgaben abschneiden als welche, die traditionell unterrichtet wurden (zum Beispiel [Hei88, Pal91]). Andererseits gab es auch Studien, deren Ergebnisse bzgl. eines CAS-Einsatzes eher ernüchternd waren (zum Beispiel [May94]). Coston [Cos95] fand heraus, dass der Gebrauch von Technologie alleine keine signifikanten Unterschiede liefert, aber Technologie gepaart mit kooperativem Lernen sehr wohl.

Der Computer ermöglicht aber auch einen *datenbasierten bzw. numerischen Zugang* zur Analysis. Tall [Tal96] verweist hier auf Software, die Wertetabellen anzeigt (als Teil eines Multi-Repräsentationspaketes) bzw. auf *Tabellenkalkulationsprogramme*. Der Fokus liegt hier meist auf Daten, die aus authentischen Situationen gewonnen werden oder aus der Auswertung von Funktionsgraphen. Tabellenkalkulation erlaubt die Untersuchung der Daten (zum Beispiel durch Differenzenbildung) und eine anschließende graphische Interpretation. Aber auch für iteratives Arbeiten im Zusammenhang mit den Newton-Verfahren oder rekursiv-definierten Folgen eignet sich dieser Zugang.

Das dritte große Feld zum Einsatz des Computers liegt in der *Visualisierung von Konzepten der Analysis*. Auf die Rolle von Visualisierung in Mathematik und Mathematikunterricht wurde schon in Abschnitt 2.3 eingegangen. Tall (ibid.) geht in seiner Arbeit vor allem auf die Möglichkeiten von Graphenplottern bzw. von Computergraphiken ein. Er verweist insbesondere auf die Zoom-Funktion. Durch Heranzoomen sieht ein differenzierbarer Graph weniger gebogen aus und irgendwann scheint er ‚gerade' zu sein. Mit anderen Worten wird hierbei durch die sichtlichen Begrenzungen der Computergraphik das Konzept von Grenzwert (zum Beispiel beim Differentialquotienten) in der Vergrößerungsprozedur implizit nutzbar gemacht.

Aber auch bei der Integration lässt sich dies ausnutzen. Führt man Integration zum Auffinden der Fläche unter einem Graphen ein, so versucht man meist die Fläche durch das Addieren von Flächen schmaler Rechtecksstreifen zu approximieren. Im Grenzprozess geht die Breite der Streifen letztlich gegen Null. Dies führt zu einigen typischen Denkhürden. Zum Beispiel beschreibt Schneider [Sch93], S. 32/33, dass Schülerinnen und Schüler denken, dass die Rechteckstreifen die Fläche unter dem Graphen nicht ausfüllen können, so lange diese Streifen eine Breite/Dicke haben bzw. dass, wenn sie auf eine Linie reduziert werden, deren Flächeninhalt

Null ist und sie somit nicht addiert werden können. Dies ist allgemein im Zusammenhang mit epistemologischen Hürden beim Grenzwertkonzept zu sehen. Sierpinska [Sie87] weist beispielsweise darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler glauben, der Grenzwertprozess sei potentiell unendlich und es geht immer weiter ohne letztlich ein Endergebnis zu finden. Tall sieht aber gerade hier ein Potential zur Nutzung des Computers. Man kann ihn zu der Einsicht nutzen, dass ein stetiger Graph ‚platt/flach gezogen wird', wenn man die y-Achse konstant lässt, aber die x-Achse dehnt (Abbildung 2.4)

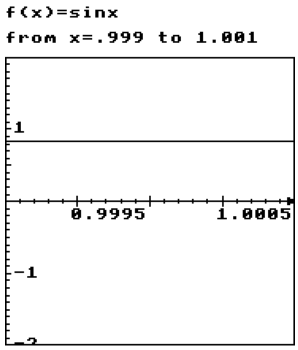


Figure 18: Horizontal stretching of the sine graph

Abbildung 2.4: Grenzwertprozess bei der Integration der Sinusfunktion: Hier ist die Fläche von x bis $x + h$ visuell annähernd ein Rechteck mit Höhe $f(x)$ und Breite h. Geht h gegen Null, so kann man sich vorstellen, dass die Approximation besser wird und sich letztlich $(A(x + h) - A(x))/h$ dem Wert $f(x)$ nähert. (Abbildung aus [Tal96], S. 314)

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Computer zur *dynamischen Visualisierung* von Konzepten der Analysis eingesetzt. Die dabei entwickelten Applikationen basieren auf einer *Dynamischen Geometrie Software (DGS)*. Wie bereits erwähnt gibt es zum Einsatz von DGS beim Thema Funktionen und Analysis vergleichsweise relativ wenig Literatur und Studien. Ein paar Arbeiten werden im Folgenden genannt und kurz beschrieben.

Zum einen hat Vogel [Vog06] dynamische Visualisierungen in seiner Arbeit benutzt, um den Aufbau mentaler Simulationsprozesse beim Transfer zwischen Situation und Graph zu unterstützen (siehe auch *Supplantation*, so wie in Abschnitt 2.2.1.1 beschrieben). Die Stärke der Visualisierungen sieht Vogel in der vereinten Darstellung von Relations- und Kovariationsaspekt funktionaler Zusammenhänge. Er hat in einer quantitativen Studie die Wirksamkeit eines solchen Ansatzes nachgewiesen. In gewisser Weise greift diese Arbeit Grundgedanken der Arbeit von Vogel auf und führt sie weiter.

Roth [Rot08] hat in seiner Dissertation zum Thema „Bewegliches Denken" ebenso DGS-Applikationen eingesetzt. Seine Arbeit weist einige Parallelen zu Vogels Arbeit auf, denn es geht darin ebenfalls um die Förderung einer mentalen Simulation von Bewegung und insofern auch um funktionales Denken. Roth bewegt sich allerdings ausschließlich im Bereich der Geometrie und läßt Schülerinnen und Schüler der 7. Klasse eines Gymnasiums beispielsweise die Änderungen von Winkeln in bestimmten geometrischen Situationen untersuchen. Auch seine Längsschnittuntersuchung ist quantitativer Natur und zeigt die positive Wirksamkeit der benutzten Applikationen im Unterricht auf.

Beide Untersuchungen bleiben die Frage nach den Mechanismen beim Lernen mit dynamischen Visualisierungen schuldig: Welche Interaktionen zwischen den Lernenden und zwischen Lernenden und Computer laufen dabei ab? Was genau fördert das gewünschte Denken? Wie wirken sich die Aufgabenstellungen auf das Lernen aus? – Dies sind Fragen, die durchaus von Interesse sind, gerade wenn man an Designvorgaben für interaktive Lernumgebungen denkt.

Falcade et al. [FLM07] haben in ihrer Studie die Mechanismen genauer unter die Lupe genommen. Hier wurde DGS in einem Lernexperiment genutzt, um den Funktionsbegriff einzuführen. Falcade et al. sehen das Potential von DGS in der Möglichkeit das *Konzept von Kovariation* durch Nutzung des Zugmodus zu *erleben*. DGS erlaubt die Unterscheidung zwischen unabhängigen und abhängigen Variablen: Eine unabhängige Variable wird durch einen direkt beweglichen Punkt repräsentiert, eine abhängige Variable durch einen Punkt, der nur indirekt bewegt werden kann. Zu Beginn ist der Zugmodus ein externes Werkzeug, das die Schüler abhängige und unabhängige Variablen unterscheiden lässt. In einem zweiten Schritt kann dieses Werkzeug aber unter Anleitung durch eine Lehrperson internalisiert werden. Technologie wirkt hierbei als Mediator (Falcade et al. beziehen sich auf den Begriff *semiotic mediation* nach Vygotskij [Vyg78]), und in Falcades Studie wird der Prozess der Internalisierung und Mediation untersucht. Die Rolle von Technologie als Mediator spielt in einigen Untersuchungen eine große Rolle. Ferrara et al. [FPR06] formulieren dies folgendermaßen:

> „The calculator acted as a mediator in the learning process and in this mediation it is by no means neutral. Meeting new potentialities and constraints, the students have to elaborate schemes of use potentially rich in mathematical meanings, a process that requires support and encouragement from the teacher. “
> [FPR06], S. 254/255

Gleichzeitig heben Ferrara et al. hervor, dass es bisher wenig Forschungsarbeiten über die Beziehung zwischen Design von Lernumgebungen und Lernen von Funktionen gibt:

> „Given the wide interest in the situatedness of learning, it seems odd that there is little research into the relationship between design and learning about functions.“
> [FPR06], S. 255/256

Zuletzt soll noch auf ein Projekt hingewiesen werden: Im Projekt *CalGeo* (`http://www.math.uoa.gr/calgeo`, [ZPC+07, BZ07]) wurden digitale Lernumgebungen basierend auf DGS für das Lernen und Lehren von Konzepten der Analysis entwickelt und eingesetzt. Die Themen reichen von der Einführung in unendliche Prozesse, Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung bis zum Integral. Die DGS wurde dabei insbesondere als Funktionsplotter benutzt, wobei ähnlich wie bei Tall (siehe oben) die Möglichkeit der Vergrößerung bzw. des Zoomens benutzt wurde. DGS-spezifisch wurde ausgenutzt, dass man sich dem Konzept von Grenzwert in dynamischer Weise nähern kann. Beispielsweise wurde bei der Stetigkeit die $\epsilon - \delta$- Definition dynamisch visualisiert. Auch das Konzept von Ableitung wurde dynamisch visualisiert und kombiniert mit der Möglichkeit des Zoomens, um die Eigenschaft ‚lokale Linearität' sichtbar zu machen. Das entwickelte Material wurde im Unterricht getestet und gleichzeitig fand ein begleitendes Lehrertraining statt. Die Autoren weisen darauf hin, dass hier allerdings noch weitere Untersuchungen und systematische Forschung nötig sei.

Kapitel 3

Die Lernumgebungen und deren mathematikdidaktischer Hintergrund

In diesem Kapitel werden die Lernumgebungen, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind, ausführlicher dargestellt. Insgesamt wurden drei interaktive Lernumgebungen entworfen und umgesetzt. Diese sollen im folgenden Kapitel auf ihren mathematischen und didaktischen Gehalt hin analysiert werden. Das Ziel ist die Herausarbeitung des Kontextes der Forschung auf fachlich-inhaltlicher Ebene. Konkret werden die Konzepte der Analysis, die hinter den interaktiven Visualisierungen stehen, analysiert und dargestellt. Die Erörterung des lerntheoretischen Hintergrundes für den Einsatz der Lernumgebungen erfolgt dann in Kapitel 4.

Alle Lernumgebungen sind unter `http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp` abrufbar und nutzbar. Sie bestehen jeweils aus Java-Applikationen nebst erklärendem Text und Aufgabenstellungen. Die Applikationen wurden mit der DGS *Cinderella* erstellt. Zusätzlich gibt es zu jeder Lernumgebung einen begleitenden Arbeitsbogen (siehe Anhang B bzw. obige Internetadresse), auf dem die Schülerinnen und Schüler ihre Beobachtungen und Begründungen notieren. Screenshots aller Teilaufgaben der Lernumgebungen findet man in Anhang A dieser Arbeit.

Die Arbeitsaufträge sind in ihrer Anlage so gestaltet, dass sie zum Explorieren der dynamischen Visualisierungen anregen sollen. Im Idealfall arbeiten die Schülerinnen und Schüler mindestens in Paaren am Computer, damit Verbalisierungsprozesse stattfinden können.

Die Arbeitsaufträge sind jeweils folgendermaßen aufgebaut: In einem ersten Schritt werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert lediglich ihre Beobachtungen zu formulieren. Dies wird durch Fragen der Art „Was passiert, wenn man den Punkt X bewegt? Wie verändert sich Y? Beschreibe die Form des Graphen und erzeuge weitere Graphen? Welche weiteren Graphen gibt es?“ angeregt. Die Schülerinnen und Schüler sollen hier also beobachten und beschreiben bzw. sich mit der Situation vertraut machen. In einem zweiten Schritt sollen durch Ausnutzung der interaktiven Visualisierungen Begründungen für gewisse lokale und globale Eigenschaften der Graphen bzw. des funktionalen Zusammenhangs gegeben werden. Dazu werden Fragen der Art „Warum hat der Graph diese Gestalt? Was geschieht am Punkt X? Was kannst Du über den Zusammenhang von X zu Y aussagen?" gestellt. D.h. hier sind die Schülerinnen und Schüler – ausgehend von den zuvor gemachten Beschreibungen – aufgefordert die Zusammenhänge und Abhängigkeiten zu analysieren.

Im weiteren Verlauf des Kapitels wird darauf verzichtet alle Aufgabenstellungen im Detail aufzulisten. Vielmehr werden sie von ihren zugrunde liegenden Prinzipien her umrissen. Auf Kernfragen der jeweiligen Teilaufgaben wird jedoch genauer eingegangen. Alle Arbeitsaufträge findet man in Anhang A auf den Screenshots bzw. in Anhang B in den angehängten Arbeitsbögen.

3.1 Dreiecksfläche

Die Lernumgebung *Dreiecksfläche* wurde schon in Kapitel 2 ausführlich behandelt. Hier werden deswegen nur die wichtigsten Punkte rekapituliert und um ein paar Aspekte ergänzt.

Bei der *Dreiecksfläche* soll der Zusammenhang zwischen der Lage des Punktes D und dem blauen Flächenanteil des Dreiecks (Abbildung 2.2) dynamisch erkundet werden. Durch Bewegung des Punktes D hat man die Möglichkeit der *Variation innerhalb der Situation*. *Metavariation (Variation der Situation)* findet durch Bewegung der Punkte B (horizontal) und C (horizontal und vertikal) statt. Tatsächlich liegt dem dargestellten funktionalen Zusammenhang keine ‚einfache' Gesetzmäßigkeit zugrunde, denn der Graph ist aus zwei quadratischen Funktionen zusammengesetzt. Zusammengesetzte Funktionen werden in der Schule zumeist nicht behandelt, sie sind keine der (schul-)typischen Funktionenklassen. Da das *concept image* insbesondere von den mit Funktionen gemachten Erfahrungen abhängt (Abschnitt 1.2.2.1) kann die hier dargestellte Flächeninhaltsfunktion als Bereicherung angesehen werden.

In Kapitel 2 wurde schon erläutert, inwiefern die Applikation in dieser Lernumgebung als dynamische Visualisierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung betrachtet werden kann. Im Rahmen einer Propädeutik zu Konzepten der Analysis bietet die Lernumgebung zudem folgende Möglichkeiten: Im dynamischen Transfer zwischen Situation und Graph sticht zunächst die globale Eigenschaft der Monotonie hervor. Diese ist unter Metavariation als Invariante jeder herstellbaren Situation besonders deutlich.

Lokal ist vor allem die Wendestelle des Flächeninhaltsgraphes von Interesse. Die Wendestelle ist durch einen Wechsel in der Qualität des Wachstums charakterisiert. Bis zu dieser Stelle steigt der Zuwachs an Flächeninhalt und danach fällt der Zuwachs – eine Tatsache, die in der Dynamik besonders deutlich ist, insbesondere wenn man dies durch die Änderung des Zuwaches des blauen Flächenanteils beschreibt. Damit lässt sich die Krümmungsänderung des

Flächeninhaltsgraphen an der Wendestelle von konvex auf konkav dynamisch begründen. Unter Metavariation wird die lokale Eigenschaft der Wendestelle nochmals auf andere Art und Weise sichtbar und beschreibbar: Das Krümmungsverhalten (konvex/konkav) lässt sich nämlich durch Einstellen der Randpositionen (C über A oder B) besonders hervorheben und dadurch besser erkunden (siehe auch Abbildung 2.3). Das Vorhandensein einer Wendestelle ist eben nur ‚beinahe invariant': Unter Metavariation und vom Änderungsverhalten in den Randpositionen lässt sich auf das Änderungsverhalten an der Wendestelle schließen.

Wie schon in Kapitel 2 erörtet, kann die Applikation als Visualisierung des Zusammenhanges zwischen *Bestand an Flächeninhalt* und *Änderung an Flächeninhalt* gesehen werden. Interpretiert man die Dreiecksseiten AC und CB als stückweise lineare Funktion, so stellt das Dreieck gerade den Graphen der Ableitung, also den Änderungsgraphen dar, während der obere Graph den Bestand an Flächeninhalt abhängig von der Lage von D wiedergibt.

Tatsächlich ist die Fähigkeit zur Unterscheidung zwischen Bestandsgrößen und Änderungsgrößen wichtig. So hat zum Beispiel Ossimitz [Oss01] in einer Studie gezeigt, dass genau diese Unterscheidung große Schwierigkeiten bereitet. Ossimitz [Oss00, Oss01] verweist in seinen Arbeiten zum systemdynamischen Modellieren bzw. systemischen Denken auf verschiedene Situationen, in denen solch eine Unterscheidung und die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Bestand und Änderung zum Tragen kommt. Denkt man beispielsweise an Zeitungsberichte über den Staatshaushalt und die Staatsverschuldung, so ist oft die Rede von einer ‚Senkung der Neuverschuldung' (als Änderungsgröße). Damit soll suggeriert werden, dass es ‚aufwärts' geht. Beispielsweise ist ein diesbezüglicher Zeitungsartikel in [HP08], S. 164, wiedergegeben. In dem Artikel mit dem Titel „Neuverschuldung soll sinken" liest man

> „Bei einer Senkung [der Neuverschuldung] würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren."

Will man diese Aussage bewerten, so muss man unterscheiden zwischen der Bestandsgröße der Schulden und der Änderungsgröße der hinzukommenden Schulden (Neuverschuldung). Eine Senkung der Neuverschuldung bedeutet hier lediglich eine Wendestelle im Bestand an Schulden und ein Maximum in der Änderung. Um dies zu erkennen benötigt man aber gewisse mathematische Vorstellungen. Hahn & Prediger [HP08] sprechen deswegen davon, dass mathematische Vorstellungen als „Verstärker von Alltagsdenken" wirksam werden können.

3.2 Die Reise

Die Idee zur Lernumgebung *Die Reise* ist aus der gleichnamigen Testaufgabe entstanden, die in Abschnitt 1.2.1.2 vorgestellt wurde. Die Lernumgebung besteht aus drei Aufgabenteilen, wobei jeder Teil durch eine zu explorierende Applikation gekennzeichnet ist.

Ausgangspunkt ist wieder eine *dynamische Verknüpfung zwischen Situation und Graph*. In dieser Aufgabe ist die Situation durch eine Landkarte und eine Stoppuhr gegeben. Der dazugehörige Graph ist ein Weg-Zeit-Graph (Abbildung 3.1, links), der dynamisch mit der Landkarte verknüpft ist. Auf der Landkarte ist eine Strecke von Neubrandenburg (im Norden) über Berlin nach Cottbus (im Süden) markiert. Bewegt man den blauen Punkt auf dem Graphen, so bewegt sich das Auto auf der Landkarte und der y-Achse entsprechend mit. Außerdem kann eine Animation gestartet werden, bei der das Auto einmal die Strecke von Nord nach Süd mit sichtbaren Geschwindigkeitsänderungen durchfährt.

Um einer Interpretation des Weg-Zeit-Graphen als Bewegung in der Ebene (*Graph-als-Bild Fehler*, siehe auch Abschnitt 1.2.1.2) vorzubeugen, wurde ein Auto beweglich auf der y-Achse, auf der die zurückgelegten Kilometer markiert sind, platziert. Beispielsweise wird so die Pause zwischen den Stationen B und C besonders deutlich: Das Auto bleibt zwischen B und C auf der y-Achse stehen, während die Zeit auf der x-Achse weiterläuft.

Die Abhängigkeit der zurückgelegten Kilometer von der Zeit wird durch eine senkrechte Linie vom blauen Punkt aus auf die x-Achse verdeutlicht. Durch Bewegung des blauen Punktes auf dem Graphen, bewegt man sich somit visuell in der Zeit und die Kilometer werden zeitabhängig zurückgelegt.

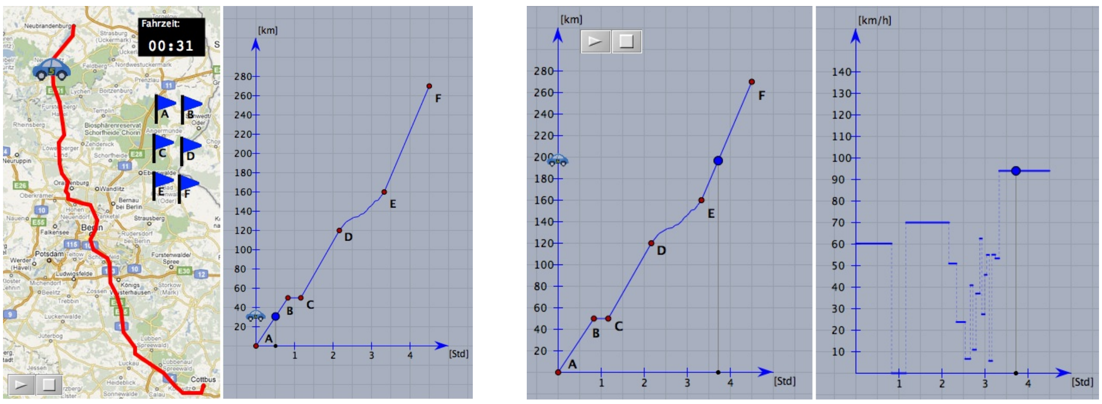


Abbildung 3.1: Verknüpfung von Situation und Graph (links) und Variation innerhalb der Situation (rechts) in der Lernumgebung *Die Reise*. (Quelle: Google Maps)

Dabei ist die Lernumgebung bewusst so gestaltet, dass die Fahrt in der Landkarte von oben nach unten verläuft, während die Stationen A-F im Graphen von unten nach oben sortiert sind. Dies bezieht sich auf den in Abschnitt 1.2.1.2 dargestellten Fehler von einigen Lernenden, bei dem die Stationen A-F in der Landkarte oft von unten nach oben markiert wurden, weil dies den Stationen im Graphen in ikonischer Weise entsprach (*Graph-als-Bild Fehler*).

Die Schülerinnen und Schüler werden zunächst aufgefordert, mit den verschiebbaren Fähnchen die Stationen A-F auf der Landkarte zu markieren. Hiermit werden zwei Intentionen verfolgt. Zum einen soll dadurch ein Transfer zwischen den Darstellungen Graph und Situation hergestellt werden und zum anderen soll ein Überblick über die Situation als Ganzes gewonnen werden. Damit bezieht sich dieser Arbeitsauftrag unter anderem auf den Objektaspekt des funktionalen Zusammenhanges.

Weitere Arbeitsaufträge zielen auf die Erkundung der Situation im Repräsentationstransfer zwischen den Darstellungen Situation und Graph. Sie sind angelehnt an die schriftliche Aufgabe *Die Reise* aus Abschnitt 1.2.1.2 und den dort festgestellten Schwierigkeiten. Dabei werden beispielsweise folgende Fragen gestellt: „Was passiert zwischen den Stationen B und C bzw. zwischen D und E?“, „Wie hoch ist die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit?“. Insbesondere die Frage nach der durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit zielt schon auf eine Änderungssicht des funktionalen Zusammenhanges zwischen Weg und Zeit. Während hier nach der durchschnittlichen Veränderung des zurückgelegten Weges mit der Zeit gefragt ist, wird die Änderungssicht im zweiten Teil der Lernumgebung weiter ausgebaut.

In Aufgabenteil zwei der Lernumgebung ist die Applikation, die in Abbildung 3.1 rechts sehen ist, zu untersuchen. Durch *Variation innerhalb der Situation* soll der Zusammenhang zwischen *Bestand* an Kilometer zu einem gewissen Zeitpunkt und *Änderung* an Kilometer mit der Zeit (also *Geschwindigkeit*) erkundet werden. Dazu ist die graphische Darstellung des Weg-Zeit-Graphen mit dem dazugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Graphen dynamisch verknüpft. Die blauen Punkte sind auf beiden Graphen simultan beweglich. Außerdem kann wieder eine Animation gestartet werden.

Verschiedene Fragestellungen regen die Untersuchung und Verbalisierung des Verhaltens der beiden Graphen (Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Graph) zueinander an: „Wie hoch ist die Geschwindigkeit zwischen C und D? Wie liest man das ab?“, „Kann man die Geschwindigkeit auch ablesen, wenn man nur den Weg-Zeit-Graphen gegeben hat? Wie macht man das?“, „Kann man mit dem rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist?“.

In Abschnitt 1.2.1.2 wurde geschildert, dass das Bestimmen der Geschwindigkeiten zwischen einzelnen Stationen der Reise und damit das Zeichnen eines Geschwindigkeit-Zeit-Graphen oft sehr große Schwierigkeiten bereitet. Die dynamische Visualisierung ermöglicht das Explorieren des Zusammenhanges zwischen den beiden graphischen Darstellungen. Dabei geht es insbesondere um die Übersetzung zwischen beiden Graphen: Der Geschwindigkeit-Zeit-Graph gibt die Änderung des zurückgelegten Weges über die Zeit an („Änderungsgraph“). Man erhält ihn, indem man die Steigungen im Weg-Zeit-Graph berechnet bzw. abliest. Aber auch umgekehrt kann man vom Geschwindigkeit-Zeit-Graphen auf den Weg-Zeit-Graphen schließen, indem man sich überlegt, dass ein Auto, das beispielsweise über einen Zeitraum Δt konstant $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gefahren ist, eine Strecke von $60\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \Delta t$ zurückgelegt haben muss. Dies entspricht gerade dem Flächeninhalt eines Rechtecks unter dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen. In der Dynamik wird dieser Zusammenhang beim Verstreichen eines Zeitintervalls Δt besonders deutlich.

Wie bei der Lernumgebung *Dreiecksfläche* kann man diese Applikation als idealisierte dynamische Visualisierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung betrachten. Idealisiert meint hierbei, dass der Geschwindigkeit-Zeit-Graph eine Treppenfunktion ist und somit nicht stetig, was in der Realität nicht vorkommen kann. Die dazugehörige Integralfunktion (der Weg-Zeit-Graph) ist dann natürlich keine Stammfunktion, da sie in den Knickstellen nicht differenzierbar ist. In der Realität kann dies aber nicht vorkommen – eine Weg-Zeit-Funktion wird immer differenzierbar sein. Die Idealisierung des Weg-Zeit-Graphen als abschnittweiser linearer Graph entspricht der Idealisierung des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen, der stückweise konstant ist. Dies leuchtet auch durchaus ein, wenn man annimmt, dass zwischen den einzelnen Stationen der Reise nicht die Momentan-, sondern die jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten wiedergegeben werden. Insofern abstrahiert man hier von der Wirklichkeit und gewinnt dadurch sogar die Möglichkeit weiterführende Ideen zur Mathematisierung zu entwickeln. In diesem Falle führt es direkt zu der Grundidee des Riemann-Integrals, nämlich durch Annäherung des Flächeninhaltes unter einem Graphen durch Rechtecksflächen.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass auch hier – wie bei der Lernumgebung *Dreiecksfläche* – keine der typischen im Unterricht behandelten Funktionenklassen vorliegen.

Im dritten Teil der *Reise* erlaubt eine zweite Variationsstufe (*Metavariation*) das Ändern der Situation und damit der Funktion als Ganzes. Dabei können die Lernenden in einem (wiederum idealisierten) Geschwindigkeit-Zeit-Graphen die Balkenbreite und -höhe von fünf vorgegebenen Balken ändern und die Auswirkungen dieser Änderungen auf den Weg-Zeit-Graphen untersuchen (Abbildung 3.2).

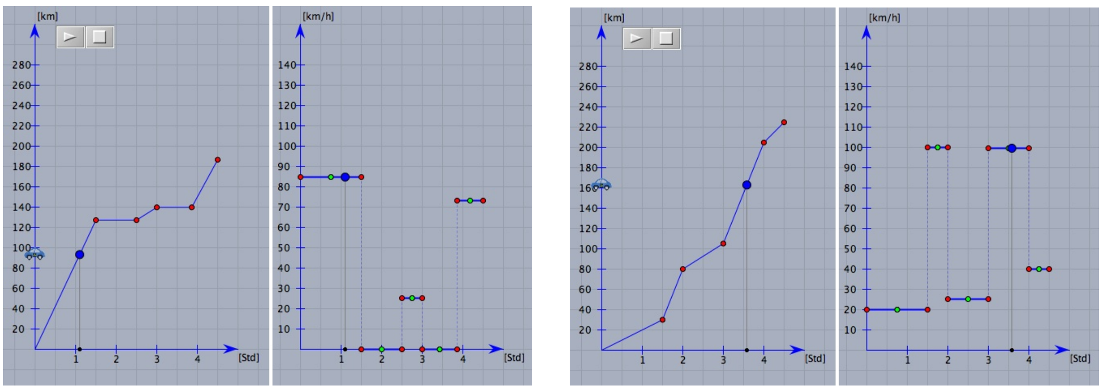


Abbildung 3.2: Zwei Situationen unter Metavariation in Teil drei der Lernumgebung *Die Reise*.

Metavariation erlaubt hier wiederum die Loslösung von konkreten Werten und zwingt zu einer qualitativen Sicht auf den Zusammenhang zwischen Bestand (Weg-Zeit) und Änderung (Geschwindigkeit-Zeit). Von einem höheren mathematischen Standpunkt aus betrachtet, wird unter Metavariation der Input in den Integraloperator, der den funktionalen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit-Zeit-Graph und Weg-Zeit-Graph beschreibt, variiert.

Das Explorieren des Zusammenhanges wird durch verschiedene Arbeitsaufträge angeregt. Zunächst ist nach einer Beschreibung der Änderungen unter *Metavariation* gefragt: „Beschreibe, wie sich der Weg-Zeit-Graph ändert, wenn man die Balken im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen ändert.“ Dadurch wird ein qualitativer Blick auf die Übersetzung zwischen den graphischen Darstellungen gefordert. Bewegt man Balken vertikal, so ändert sich die Steigung im entsprechenden Abschnitt des Weg-Zeit-Graphen. Verlängert oder verkürzt man Balken, so bleibt die Steigung im entsprechenden Abschnitt des Weg-Zeit-Graphen gleich, nur die Zeitspanne, mit der in dieser Geschwindigkeit gefahren wird, ändert sich entsprechend. Die Möglichkeiten, die Metavariation hier bietet, sollen zu einer elaborierteren abschnittweisen Sicht auf die Graphen führen. In Abschnitt 1.2.1.2 und Abbildung 1.6 wurde illustriert, dass abschnittweises Lesen von Graphen eine Schwierigkeit darstellen kann, eine Schwierigkeit, die nicht nur in schriftlichen Aufgabe *Die Reise* auftaucht, sondern auch in der didaktischen Literatur beschrieben wurde (zum Beispiel [Wei88]).

Bei einem anderen Arbeitsauftrag sollen die Schülerinnen und Schüler zu vorgebenen Weg-Zeit- bzw. Geschwindigkeit-Zeit-Graphen das jeweilige Pendant zeichnen. Dazu können sie die Applikation benutzen. Ist beispielsweise der Weg-Zeit-Graph gegeben, so muss überlegt werden, wie die Balken einzustellen sind, um die vorgegebene Konstellation zu erreichen. Überlegungen wie: ‚Stellt man zuerst die Höhe eines Balkens ein oder zuerst die Breite‘ oder ‚Die Pausen, die als konstante Abschnitte im Weg-Zeit-Graphen sichtbar sind, entsprechen im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen einem konstanten Abschnitt des Wertes Null‘ müssen hier gemacht werden. Die Übersetzung zwischen den Graphen kann durch Nutzung der *Metavariation* quasi enaktiv vollzogen werden.

Abschließend wird folgende Frage gestellt: „Betrachte nochmals den Graphen aus Aufgabe 1. Glaubst Du, dass er die beschriebene Situation exakt wiedergibt? Wenn nicht, was müsste man verändern?“ Hiermit wird nochmals der Bogen zur dargestellten Situation gespannt. Die Schülerinnen und Schüler sind angehalten zu überlegen, inwiefern der Weg-Zeit-Graph eine idealisierte Darstellung der Wirklichkeit ist. Durch diese Reflexion wird in gewisser Weise erst die Verwendung einer idealisierten Darstellung gerechtfertigt. Im weiteren Verlauf des Unterrichts ist nun eine Fortführung mit weniger idealisierten Darstellungen möglich, wie zum Beispiel in Abschnitt 6.3 beschrieben.

3.3 Einbeschriebene Rechtecke

Die Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* besteht ebenso aus drei Aufgabenteilen, die jeweils durch eine interaktive Visualisierung gekennzeichnet sind. Aufgabenteil eins dient der Untersuchung der zugrunde liegenden Situation in der Dynamik. Abbildung 3.3 zeigt drei Konstellationen, die mit der dazugehörigen Applikation hergestellt werden können.

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Änderung des Flächeninhalts der dem Dreieck

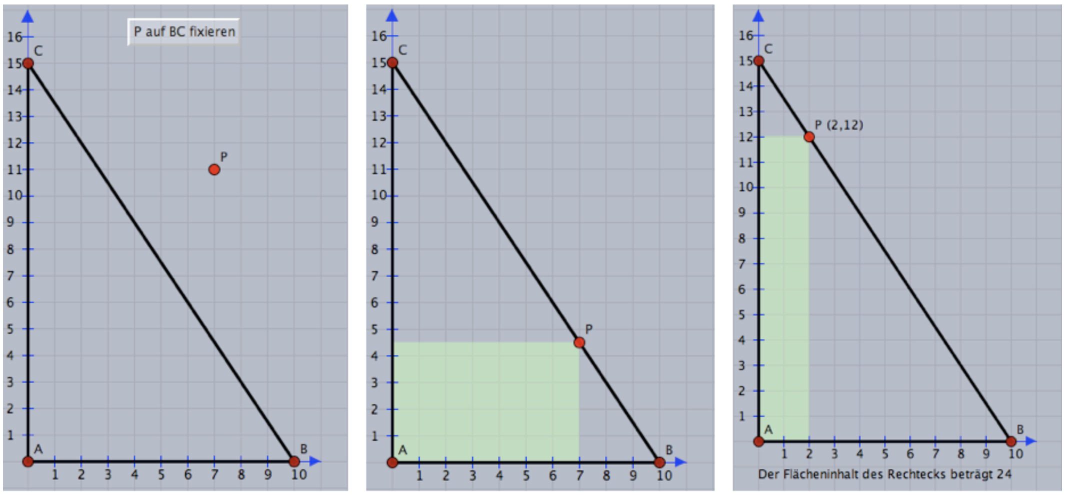


Abbildung 3.3: Drei verschiedene Konstellationen in der Applikation des ersten Teils der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke*.

ΔABC einbeschriebenen Rechtecke beschreiben und untersuchen. Durch Bewegung des Punktes P auf die Dreiecksseite BC erscheint ein einbeschriebenes Rechteck. Liegt P auf BC, so kann P durch den Button „P auf BC fixieren" auf BC fixiert werden, d.h. nur noch auf BC bewegt werden (Abb. 3.3, Mitte).

Durch verschiedene Fragestellungen wird die Exploration des funktionalen Zusammenhanges zwischen der x-Koordinate von P und dem Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke angeregt. Wiederum wird zuerst nach einer Beschreibung der Veränderung des Flächeninhaltes gefragt. Dabei wird auch nach den möglichen Werten für den Flächeninhalt gefragt – mit anderen Worten soll hier der Wertebereich herausgefunden werden.

Erste Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion sollen durch Beantwortung der Frage „Gibt es mehrere verschiedene Rechtecke, die aber denselben Flächeninhalt besitzen? Wenn ja, suche mehrere Beispiele dafür!" aufgefunden und beschrieben werden.

Durch Nutzung eines ‚Hinweis'-Buttons werden die Koordinaten von P und der jeweilige Flächeninhalt in der Applikation angezeigt. Die Schülerinnen und Schüler sollen formulieren, wie sich der Flächeninhalt aus den Koordinaten von P berechnen lässt (x-Wert von P multipliziert mit dem y-Wert von P).

Die dynamische Exploration der Situation wurde der simultanen Verknüpfung von Situation und Graph vorangestellt, da die Situation sich durch eine höhere Komplexität als in den beiden anderen Lernumgebungen auszeichnet. Die Situation ist in diesem Fall durch zwei funktionale Zusammenhänge charakterisiert. Zum einen liegt ein linearer Zusammenhang zwischen der x-Koordinate von P und der y-Koordinate von P vor: P bewegt sich auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + 15$. Zum anderen hat man einen quadratischen Zusammenhang zwischen der x-Koordinate von P und dem Flächeninhalt: Der Flächeninhalt ergibt sich aus $F(x) = x \cdot (-\frac{3}{2}x + 15)$, wobei x die x-Koordinate von P und $F(x)$ den Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks bezeichnet.

Aufgabenteil zwei der Lernumgebung dient der Untersuchung des funktionalen Zusammenhangs im *dynamischen Darstellungstransfer zwischen Situation und Graph* durch *Variation innerhalb der Situation*. Abbildung 3.4 (links) zeigt die zugrunde liegende interaktive Visualisierung. Die Bewegung von P führt zu einer simultanen Bewegung des Punktes des Flächeninhaltsgraphen, wobei der Punkt im Koordinatensystem eine Spur hinterlässt. Im dynamischen Repräsentationstransfer lassen sich nun lokale und globale Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion herausfinden und begründen. Hierzu gehören die Charakterisierung der Symmetrie, des Extremwertes und der Nicht-Linearität der Flächeninhaltsfunktion. Diese Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion können sowohl unter Bezug auf den Graphen als auch unter Bezug auf die Situation begründet werden. Die dynamische Visualisierung verbindet hierbei beide Darstellungen.

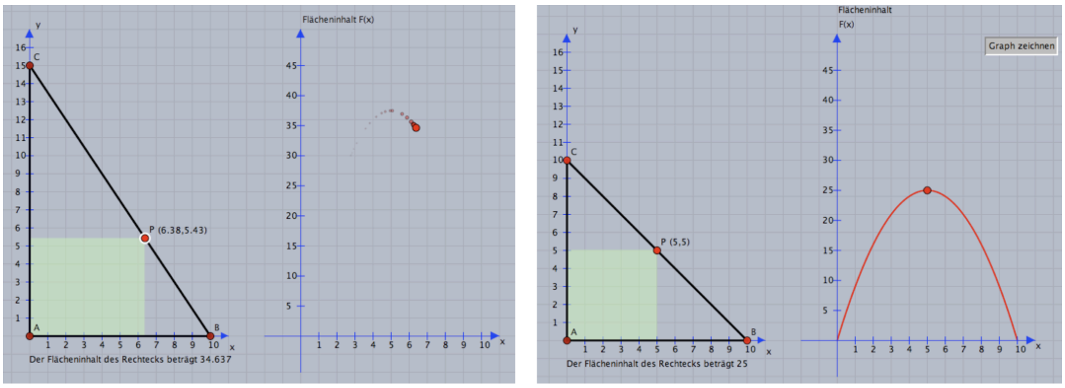


Abbildung 3.4: *Variation innerhalb der Situation* (links) und *Metavariation* (rechts) in Aufgabenteil zwei bzw. drei der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke*.

Folgende Möglichkeiten hat man zur Begründung der verschiedenen Eigenschaften: Die Symmetrie im Graphen ist leicht zu erkennen und zu beschreiben (als Achsensymmetrie). In der Situation kann man beispielsweise statt des Flächeninhalts der einbeschriebenen Rechtecke, die grauen Restdreiecke betrachten. Liegt P in der Mitte von BC, so sind die grauen Restdreiecke kongruent. Die Symmetrie ist in der Dynamik dadurch sichtbar, dass bei Verschiebung des Punktes P um denselben Wert nach rechts und links jeweils kongruente Restdreiecke entstehen (Abbildung 3.5).

Symmetrie lässt sich aber auch auf nicht-dynamische Art und Weise durch Beschreibung der spezifischen Merkmale und ihrer Zusammenhänge im Nebeneinander erklären. Ergänzt man nämlich das Dreieck ΔABC zu einem Rechteck, so erhält man ein Bild wie in Abbildung 3.6.

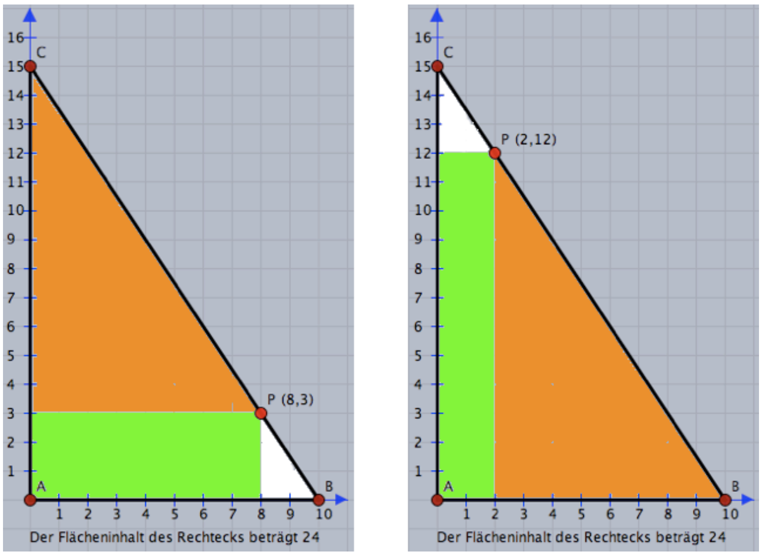


Abbildung 3.5: Dynamische Betrachtung der Symmetrie in der Situation durch Betrachtung der kongruenten Restdreiecke.

Hier sieht man die Kongruenz der grauen Restdreiecke auf einen Blick und kann sofort darauf schließen, dass die dazugehörigen (nicht-kongruenten) einbeschriebenen Rechtecke flächeninhaltsgleich sind.

Mit Hilfe der Abbildungen 3.5 und 3.6 lässt sich auch die Lage des Maximums in der Mitte begründen: Jedem Punkt der Seite BC entspricht ein dazugehöriger zweiter Punkt auf der Seite BC, so dass die von diesen Punkten bestimmten einbeschriebenen Rechtecke flächeninhaltsgleich sind. Ein Punktepaar dieser Art zeichnet sich dadurch aus, dass beide Punkte auf BC denselben Abstand zum Mittelpunkt von BC haben. Der einzige Punkt ohne Entsprechung ist der Mittelpunkt, der somit ein Extremum sein muss.

Dadurch, dass sich die Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion sowohl auf dynamische Art und Weise als auch durch ihre zugrunde liegende Strukturen und deren Zusammenhänge beschreiben lassen, unterscheidet sich diese Lernumgebung von den beiden anderen. Aus kognitiver Sicht erlaubt diese Lernumgebung sowohl *prädikatives* als auch *funktionales Denken* zur Beschreibung der Funktion. Das Begriffspaar *prädikatives/funktionales Denken* wurde rund um die Arbeitsgruppe von Schwank [Sch99, Sch01] geprägt. Mit *funktionalem Denken* ist allerdings *nicht* dasselbe gemeint, was in dieser Arbeit in Kapitel 1 beschrieben wurde. *Prädikatives Denken* ist ein an Invarianten interessiertes Denken und meint ein Zurechtfinden anhand von Merkmalen und ihren Zusammenhängen. Dabei hat das Nebeneinander Vorrang, welches auf seine Ordnung hin untersucht wird. *Funktionales Denken* meint dagegen ein Denken in Handlungsabfolgen. Hier ist man an Varianten interessiert – das Nacheinander hat Vorrang.

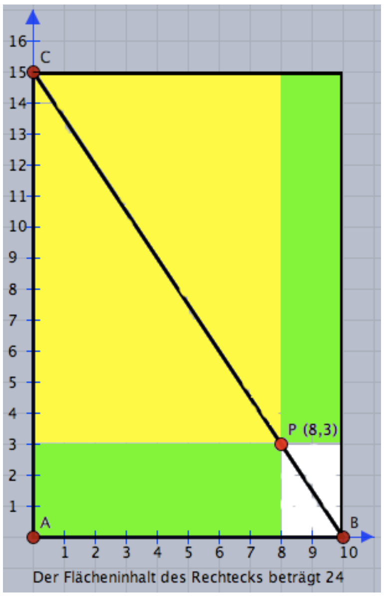


Abbildung 3.6: Strukturelle Sicht auf den funktionalen Zusammenhang in der Situation: Kongruente Restdreiecke liegen gespiegelt an der Diagonalen vor.

Auch die Nicht-Linearität der Funktion lässt sich dynamisch-funktional beschreiben. Liegt P beispielsweise in der Mitte von BC und verschiebt man P zunächst um eine und dann um zwei Einheiten nach links, so sieht man, dass der Flächeninhalt des unteren Restdreiecks bei diesen Schritten jedesmal um mehr wächst als der Flächeninhalt des oberen Restdreiecks abnimmt. Anders ausgedrückt: Die Differenz *Zunahme an Flächeninhalt des unteren Restdreiecks* minus *Abnahme des Flächeninhalts des oberen Restdreiecks* steigt von der Mitte BC ausgehend bis zu C. Für diese Feststellung ist eine dynamisch-funktionale Sicht tatsächlich nötig.

Durch folgende Fragestellungen in Aufgabenteil zwei (Abbildung 3.4, links) der Lernumgebung sollen Anregungen zur Erkundung der eben beschriebenen Zusammenhänge geschaffen werden:

Zunächst wird mit einer Beschreibung und Skizzierung des Flächeninhaltsgraphen begonnen. Anhand des Graphen wird nach einer Erklärung gefragt, welche Flächeninhalte einmal, zweimal, bzw. keinmal vorkommen. Dies war zuvor schon in der ersten Applikation innerhalb der Situation gefragt worden. Nach diesen Arbeitsanregungen, die zur Übersetzung zwischen Graph und Situation anregen, folgt die Kernfrage des zweiten Teils: „Warum hat der Graph diese Gestalt? Erkläre!“. Gesucht ist nach einer Erklärung, die die spezifischen Eigenschaften des Graphen (Symmetrie, Lage des Maximum usw.) berücksichtigt und dabei zur Situation Bezug nimmt.

Abbildung 3.4 (rechts) zeigt die Applikation zur *Metavariation* (Variation der Situation). Die Punkte B und C können auf den Achsen verschoben werden, wobei sich der dazugehörige Flächeninhaltsgraph simultan dazu verändert. Auch hier löst man sich durch Metavariation von konkreten Werten – der Blick wird wieder auf qualitative Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion gelenkt. Lokale und globale Eigenschaften können nochmals aus qualitativ-inhaltlicher Sicht betrachtet werden.

Nach einer Beschreibung der Veränderung des Graphen unter Metavariation und der Überlegung, welche Graphen erzeugt werden können, kommen folgende Aufgabenstellungen zum Tragen: „Wie findet man jeweils den größten Flächeninhalt? Woran erkennt man das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt in der linken Abbildung, woran im Graphen?“ Diese Frage zielt auf eine qualitativ-inhaltliche Sicht der Eigenschaft ‚Maximum liegt in der Mitte‘ in der Übersetzung zwischen Graph und Situation. Metavariation fordert dazu heraus, die Situation von einem höheren Standpunkt aus zu betrachten. Das Vorhandensein des Maximums und die Lage des Maximums in der Mitte sind Invarianten unter Metavariation und können prinzipiell für jede erzeugbare Situation beschrieben werden. Solche Betrachtungen werden durch Arbeitsaufträge folgender Art angeregt: „Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist, und skizziere die Situation und den Graphen. Wie findet man diese Dreiecke?“ Und: „Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt genau bei $x = 4$ angenommen wird. Wie findet man diese?“

Diese Kernfragen des dritten Aufgabenteils der Lernumgebung fordern zu einer Beschreibung auf, die beispielsweise folgendermaßen aussehen könnte: ‚Soll der maximale Flächeninhalt 15 betragen, so wird dies zum Beispiel durch das Produkt $3 \cdot 5$ erreicht. Dies liefert mir die Koordinaten $(3|5)$ für den Mittelpunkt von BC und lässt mich auf die Längen der Seiten AB und AC schließen.‘ Bzw. ‚Das Maximum liegt immer in der Mitte, also habe ich bei $x = 4$ nur die Möglichkeit, die Länge der Seite AB auf 8 einzustellen, während die Länge von AC beliebig ist.‘

In einer letzten Fragestellung kann man die Schülerinnen und Schüler den Spezialfall untersuchen lassen, dass das Dreieck ΔABC gleichschenklig ist. In dieser Situation ist das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt gerade ein Quadrat und die einbeschriebenen Rechtecke haben alle denselben Umfang – eine beliebte Extremwertaufgabe, die auch in Abschnitt 6.4 nochmals aufgegriffen wird.

Kapitel 4

Qualitative Studie – Lerntheoretischer Rahmen und Studiendesign

Am Ende von Abschnitt 1.3 wurde die Grundfrage gestellt, inwiefern die Lernumgebungen tatsächlich einen Beitrag zur Konzeptualisierung in der Analysis leisten können, und inwiefern die Schülerinnen und Schüler lediglich geometrische Objekte manipulieren ohne funktional zu denken. Dieser Frage soll im Rahmen einer qualitativen Studie nachgegangen werden. Dazu wurde ein interpretativer Ansatz gewählt, mit dem eine in die Tiefe gehende Analyse angestrebt wurde.

In diesem Kapitel wird zunächst der lerntheoretische Hintergrund, der den Kontext für die Forschungsfragen und für die Analyse der Auswertungsmaterialien bildet, dargestellt. Vor diesem Hintergrund werden dann die genauen Forschungsfragen der Studie ausgeführt und begründet. Nach Schilderung des Studiendesigns wird schließlich das methodische Vorgehen, welches auf den Grundprinzipien der *interpretativen Unterrichtsforschung* basiert, erläutert und das Auswertungsverfahren vorgestellt.

4.1 Lerntheoretischer Hintergrund und Forschungsfragen

4.1.1 Lerntheoretischer Hintergrund

Da die Lernumgebungen im Rahmen eines Konzeptualisierungsprozesses zu sehen sind, liegt es nahe, lerntheoretisch den sogenannten *Conceptual-Change-Ansatz* zugrunde zu legen. Beschreibungen dieses Ansatzes findet man beispielsweise in [HP08, VV06]. Dabei steht die Bezeichnung *conceptual* für *Vorstellung, Idee* oder *Begriff*, während *change* für *Entwicklung* oder *Veränderung* steht. Die Übersetzung „Konzeptwechsel“ ist irreführend, da es nicht um den Wechsel von einer Vorstellung zu einer anderen geht, sondern vielmehr um die Veränderung und Erweiterung vorhandener Vorstellungen [Möl07]. Der Ansatz ist in den 70er Jahren aus Untersuchungen zur Resistenz von sogenannten Misskonzepten beim Lernen in den Naturwissenschaften entstanden. Beispielsweise ist der Physikunterricht von ‚Konzeptwechseln' geprägt. Ausgehend von naiven physikalischen Vorstellungen werden die Konzepte bis hin zu tragfähigen physikalischen Vorstellungen erweitert. Inzwischen gibt es einige neuere Arbeiten im Umfeld von Vosniadou zum *Conceptual-Change-Ansatz* beim Lehren und Lernen von Mathematik [VV04, VV06].

Der Ansatz entwickelte sich aus der Beobachtung, dass sich vorunterrichtliche Vorstellungen bzw. Präkonzepte sehr hartnäckig halten, denn sie sind Produkte aktiver individueller Konstruktionsprozesse. Sie werden jeweils situationsspezifisch aktiviert. Oft werden sie spontan verwendet, und Schülerinnen und Schüler sind sich auf einer Metaebene gar nicht bewusst, dass sie ein gewisses Konzept verwenden, da sie im allgemeinen nicht in der Lage sind eine Metaperspektive einzunehmen.

So ist der *Graph-als-Bild Fehler* (siehe Abschnitt 1.2.1.1) ein Beispiel für eine *nicht*-situationsadäquate Aktivierung einer Vorstellung. In Untersuchungen von Duit [Dui96] zeigte sich, dass Schülerinnen und Schüler in Experimenten das sehen, was sie entsprechend ihrer vorunterrichtlichen Vorstellungen und Präkonzepte sehen „wollen". Deswegen geht man beim *Conceptual-Change-Ansatz* davon aus, dass diese Präkonzepte bzw. vorunterrichtlichen Vorstellungen immer bestehen bleiben. Aus dieser Sicht sollen dementsprechend naive Vorstellungen nicht „ersetzt", sondern im folgenden Sinne „erweitert" werden:

> „More specifically, a number of researchers have pointed out that even in the case of the natural sciences conceptual change should not be seen in terms of the replacement of students' naive physics with the „correct" scientific theory but in terms of enabling students to develop multiple perspectives and/or more abstract explanatory frameworks with greater generality and power."
> [VV04], S. 448

Anders formuliert findet man dies bei Hahn & Prediger [HP08]: Es geht nicht um Ablösung der vorunterrichtlichen Vorstellungen, sondern um Vorstellungsentwicklung mit dem Ziel, dass die Kontexte, in denen die jeweiligen Vorstellungen aktiviert werden, verschoben werden. Gleichzeitig sollen die spontan verwendeten Konzepte (wie zum Beispiel beim Graph-als-Bild Fehler) bewusst gemacht werden. Lernen wird hierbei als ‚Umlernen' – als Reorganisation von bestehenden Wissensstrukturen verstanden. Tatsächlich ist der Prozess der Integration von Vorstellungen ein gradueller, kontextabhängiger und langwieriger Vorgang, der umso schwieriger ist, je radikaler der ‚Konzeptumbau' ist.

Die Aufdeckung und Beschreibung der vorunterrichtlichen Vorstellungen oder Präkonzepte ist wesentlich, will man diese Präkonzepte im Unterricht nutzen und bewusst machen. Intuitionen und Vorerfahrungen müssen miteinbezogen werden, will man eine gute intuitive Basis für mathematisch bedeutsames Arbeiten schaffen:

> „[..] the learning process should be based on intuitions of the learner. A concept learned with an intuitive base is likely to be understood by the students and can then be built upon in a meaningful way.“
> [DE80], S. 78

Letztendlich finden wir hier eine Analogie zum Begriff der epistemologischen Denkhürde. Denn auch diese ist von den (vorunterrichtlichen) Vorstellungen, Deutungen und Ideen zu einem Begriff abhängig (Abschnitt 1.2.2.2). Denkhürden haben für den Lernprozess ein hohes produktives Potential. Prediger bezeichnet sie als Bildungsanlass und Chance für Weiterentwicklung [Pre04]. Die bewusste Überwindung ist demnach ein Motor des *conceptual change*.

Dies bestätigt Sierpinska [Sie94] in ihrem Buch bei der Erläuterung der Theorie der epistemologischen Hürden. Sie schreibt – und das ist ganz im Sinne des conceptual change – von einem Wissens- und Verständnislevel zum nächsten besteht die Notwendigkeit der Integration und Reorganisation. Erkenntnis ist demnach nicht nur bzw. nicht immer kumulativ, weder was die indiviuelle Entwicklung noch was die historische Entwicklung anbelangt. Für die Schule bedeutet das, dass man genügend Raum für die Reorganisation vorhergehenden Verständnisses lassen sollte.

Im Zusammenhang mit Konzepten der Analysis findet man bei Cornu [Cor92] eine sehr interessante Beschreibung des *Conceptual-Change Ansatzes*. Er identifiziert typische Präkonzepte von Schülerinnen und Schülern im Zusammenhang mit dem Grenzwertbegriff. Der Grenzwertbegriff, Vorstellungen über infinitesimale Prozesse und der Begriff der Kontinuität sind zentral für die Analysis. Schülerinnen und Schüler bringen zu diesen Begriffen gewisse Vorstellungen und Ideen mit (Cornu bezeichnet diese als *spontanous conceptions*). Diese resultieren meist aus Alltagserfahrungen und -begriffen. Die Begriffe ‚strebt nach‘ oder ‚Grenzwert‘ haben für Schülerinnen und Schüler eine bestimmte Bedeutung bevor sie im Unterricht behandelt werden. Auch das Konzept ‚Kontinuität‘ ist durch den Alltagsgebrauch in Formulierungen, wie ‚den ganzen Tag regnete es kontinuierlich durch‘ oder ‚die Rate steigt kontinuierlich an‘ geprägt. Im Verlaufe des Unterrichts verschwinden diese Ideen und Vorstellungen nicht, sondern vermischen sich mit den neu erworbenen Vorstellungen, werden modifiziert und angepasst. Sie bilden die persönliche Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler. Um ein Problem zu lösen, berufen sich Schülerinnen und Schüler im allgemeinen nicht einheitlich auf eine adäquate wissenschaftliche Theorie, sondern auf natürliche und spontane Argumentationen.

Beim Grenzwertbegriff stellte Cornu (ibid.) beispielsweise fest, dass der Ausdruck ‘strebt nach‘ in der Vorstellungswelt gedeutet wird als ‚nähert sich etwas an, ohne dies zu erreichen‘ oder ‚ähnelt einem Wert‘. So weisen alle limitierenden Prozesse, wie die Konzepte ‚Kontinuität‘, ‚Differentiation‘ oder ‚Integration‘ in kognitiver Hinsicht dieselben Schwierigkeiten auf – nämlich die Überwindung bzw. Einbindung vorunterrichtlicher Vorstellungen in das individuelle Konzept.

4.1.2 Forschungsfragen

In diesem Abschnitt werden die Forschungsfragen formuliert und im Kontext des eben beschriebenen lerntheoretischen Ansatzes begründet und analysiert.

4.1.2.1 Formulierung der Forschungsfragen

Forschungsfrage 1: Welche Vorstellungen und Begriffe im Hinblick auf eine dynamische Sicht funktionaler Abhängigkeiten werden bei der Arbeit mit den Lernumgebungen entwickelt bzw. formuliert, insbesondere, wenn es um die qualitative Beschreibung lokaler und globaler Funktionseigenschaften im Hinblick auf Konzepte der Analysis geht?

Forschungsfrage 2: Welche Interaktionsprozesse zwischen den Lernenden, und zwischen Lernenden und dem Computer lassen sich beschreiben, und welche Rolle spielen dabei die Möglichkeiten der Applikationen wie dynamischer Repräsentationstransfer, Variation und Metavariation?

Forschungsfrage 3: Welche spontanen Konzepte und eventuell damit verbundene epistemologische Denkhürden lassen sich identifizieren?

4.1.2.2 Begründung der Forschungsfragen

Forschungsfrage 1 bezieht sich auf die Grundfrage, inwiefern die Lernumgebungen einen Beitrag zu einem Konzeptualisierungsprozess im Bereich der Analysis-Propädeutik leisten können. Die in Abschnitt 1.3 gestellte Grundfrage, ob die Schülerinnen und Schüler eher geometrische Objekte sehen und bewegen, und lernen solche Applikationen zu lesen, oder ob tatsächlich eine Konzeptentwicklung angestoßen werden kann, wird hiermit aufgegriffen. Es soll untersucht werden, welche mathematischen Konzepte formuliert und entdeckt werden können.

Den Lernumgebungen liegt ein spezielles Design der Applikationen zugrunde. Die interaktiven Visualisierungen sollen die Entdeckung gewisser Eigenschaften und Vorstellungen in der Dynamik möglich machen (siehe Kapitel 3). In Abschnitt 1.1.4 wurde bereits kurz auf die Bedeutung der Darstellungsformen im Zusammenhang mit Funktionen und funktionalem Denken eingegangen. Die Applikationen bilden dynamische Darstellungsformen, die bestimmte Eigenschaften betonen. Ob dadurch Konzeptualisierungsprozesse angestoßen werden können, muss empirisch ermittelt werden. Weigand formuliert dazu:

> „Vorstellungen von Begriffen können aber nur über die Darstellung einzelner Objekte der im Begriff zusammengefassten Gesamtheit aufgebaut werden [...] Bei jeder Darstellung einer Funktion gibt es aber eine ganze Reihe von Eigenschaften zu entdecken. Welche Eigenschaften und in welcher Reihenfolge diese Eigenschaften entdeckt werden, hängt dabei von verschiedenen Faktoren ab und lässt sich nur empirisch ermitteln.“
> [Wei88], S. 291 und 299

Die Analyse im Hinblick auf *Forschungsfrage 1* wird in den theoretischen Rahmen des *Conceptual-Change Ansatzes* eingebettet. Es wird untersucht, welche Vorstellungen bei der Arbeit mit den Lernumgebungen ausgebildet oder formuliert werden, und wie sie mit den vorhandenen Vorstellungen oder Präkonzepten zusammen gebracht werden. Dabei wird nicht erwartet, dass durch einmalige Arbeit mit einer Lernumgebung tatsächlich *conceptual change* stattfindet. Vielmehr geht es darum festzustellen, ob durch die Arbeit mit den Lernumgebungen solch ein *change* möglich wäre und wie man dies im weiteren Unterrichtsverlauf aufgreifen könnte.

Mit *Forschungsfrage 2* soll den Mechanismen nachgegangen werden, die eine etwaige Bildung und Entwicklung der intendierten Konzepte, bewirken. Dazu sind sowohl die Interaktionen zwischen den Lernenden, insbesondere deren Kommunikation im Laufe des Verbalisierungsprozesses, als auch die Interaktionen zwischen den Lernenden und dem Computer Gegenstand der Analyse.

Verbalisierungen werden in Konzeptualisierungsprozessen eine wichtige Rolle zugeschrieben. Prediger [Pre04] verweist zum Beispiel darauf, dass Verbalisierungen gerade in der Überwindung und Bewusstmachung von Denkhürden fruchtbar sind. Die Rolle von Verbalisierungen in Konzeptualisierungsprozessen bzw. die Rolle von Sprache als Vermittler zwischen den Darstellungen und den Vorstellungen der Lernenden wurde schon in Abschnitt 2.2.4 hervorgehoben.

Insbesondere soll die Rolle der den Lerumgebungen zugrunde liegenden Designprinzipien (dynamischer Repräsentationstransfer, Variation in der Situation und Metavariation) bei der Arbeit mit den Lernumgebungen und in der Kommunikation der Lernenden und Interaktion mit dem Computer analysiert werden. Eventuell auftretende didaktische und kognitive Probleme und Hürden, die ein derartiger Computereinsatz mit sich bringt, sollen identifiziert und beschrieben werden.

Die Integration von Technologie in den Unterricht ist im allgemeinen komplex, denn es werden dadurch alle Aspekte von Unterricht und Lernen berührt, wie Arbeitsformate, didaktischer Kontrakt und individuelle, sowie klasseninterne konzeptuelle Entwicklungen [DDBvG09]. Artigue [Art02] versucht in ihrem theoretischen Ansatz – dem sogenannten *instrumental approach* – diese Komplexität zu berücksichtigen. Gemäß dieses Ansatzes wird bei der Nutzung eines technologischen Werkzeugs eine sogenannte *instrumental genesis* durchlaufen werden. Im Laufe dieser Entwicklung wird das Tool zu einem *Instrument*. Dieses *Instrument* ist ein psychologisches Konstrukt bestehend aus dem Artefakt und mentalen Schemata, die der Benutzer entwickelt hat [DDBvG09]. *Instrumental genesis* beinhaltet zwei Richtungen: Zum einen die *instrumentalisation*, bei der dem Artefakt durch den Benutzer Bedeutung zugeschrieben wird, und zum anderen die *instrumentation*, bei der der Benutzer kognitive Schemata durch die Nutzung des Instruments entwickelt. Artigues Artikel [Art02] ist im Wesentlichen eine Reflexion über die Dialektik zwischen technischem und konzeptuellen Arbeiten. Computereinsatz hat gewisse Kosten und führt eben nicht automatisch zu mathematischem Nutzen. In meinem Ansatz des *geringen technischen Overhead* (Abschnitt 2.2.5) versuche ich die Kosten zu minimieren in der Hoffnung, dadurch den epistemischen Wert des Technologieeinsatzes zu betonen. Dennoch muss auch bei der Benutzung der Applikationen eine *instrumental genesis* durchlaufen werden, denn die Applikationen zeichnen sich durch spezifische Eigenheiten aus, die wohl v.a. in der Dynamisierung und Geometrisierung liegen und vom Lernenden erst als mathematisches Instrument zur Konzeptualisierung wahrgenommen werden müssen.

Mit *Forschungsfrage 3* sollen spontane Konzepte und eventuelle epistemologische Hürden, die bei der Arbeit mit den Lernumgebungen zutage kommen, identifiziert werden. Dabei wird sowohl auf Präkonzepte und Hürden beim Lernen und Entwickeln mathematischer Konzepte als auch auf Hürden, die spezifisch für den Computereinsatz und die Applikationen sind, geachtet. Die Rolle von Präkonzepten und Denkhürden in Konzeptualisierungsprozessen im Kontext des *Conceptual-Change Ansatzes* wurde schon in Abschnitt 4.1.1 erörtert. Demnach sind epistemologische Hürden wichtige Momente im Lernprozess. In der Auseinandersetzung mit diesen Hürden liegt oft der Schlüssel für eine Erweiterung der Sicht auf mathematische Konzepte. Hier wird aber auch die Frage gestellt, ob das spezielle Design der Lernumgebungen applikations-spezifische Hürden mit sich bringt. Der Aufbau solcher Hürden ist beispielsweise denkbar, wenn bei der Benutzung der Visualisierungen implizite Eigenschaften der Bilder aufgenommen werden und die Lernenden ein *concept image* entwickeln, das diese Eigenschaften mit einschließt [Tal94] (siehe auch Abschnitt 2.3).

Ferrara et al. [FPR06] weisen darauf hin, dass Technologieeinsatz gerade bei der unterrichtlichen Behandlung und Überwindung von epistemologischen Hürden im Bereich der Analysis hilfreich sein kann:

> „In calculus, the power of technology is particularly important to facilitate students' work with numerous epistemological discontinuities such as discrete/continuum, finite/infinite, determinate/indeterminate, and so on which also relate to other subjects (e.g. arithmetic, algebra, analytical geometry) previously learned by students. These discontinuities can remain epistemological obstacles not understood by the students or may be overcome on the road towards the construction of concepts.“
> [FPR06], S. 257

Daraus resultiert die Frage, ob durch die Arbeit mit den Lernumgebungen solche Hürden überwunden werden können, bzw. inwiefern dadurch Möglichkeiten für die unterrichtliche Behandlung dieser gegeben sind.

4.2 Studiendesign und Rahmenbedingungen

Die interaktiven Lernumgebungen wurden im Rahmen einer qualitativen Studie in zwei 10. Klassen an verschiedenen Berliner Gymnasien eingesetzt. Die Durchführung fand zum Ende des Schuljahres im Juni und Juli 2009 statt. Zu Beginn der Studie hatten beide Schulklassen ihre *Mittleren Schulabschlussprüfungen (MSA)* gerade hinter sich gebracht, so dass die Lehrkräfte gerne bereit waren einige Schulstunden für eine Studie dieser Art abzutreten.

Beide Schulklassen machen ihr Abitur noch in einem 13-jährigen gymnasialen Bildungsgang. Bis zu diesem Zeitpunkt haben die Schülerinnen und Schüler noch keinen Kurvendiskussionskalkül kennen gelernt, da dieser erst in Klasse 11 unterrichtet wird. Insofern wurden die Lernumgebungen hier im Rahmen eines propädeutischen Analysisunterrichts eingesetzt und konnten als Vorbereitung auf den Stoff der 11. Klasse dienen.

Zum Zeitpunkt der Studie waren die Schülerinnen und Schüler mit den gängigen behandelten Funktionenklassen wie linearen, quadratischen, polynomiellen, exponentiellen, logarithmischen und trigonometrischen Funktionen in Kontakt gekommen. Auf den Änderungsaspekt bezogen wurden dementsprechend auch schon Themen wie exponentielles Wachstum behandelt (z.B. in Zusammenhang mit der Vermehrung von Bakterienkulturen).

Jede der Schulklassen bestand aus ca. 25 Schülerinnen und Schülern und wurde im Rahmen des regulären Unterrichts von der Forscherin selbst unter Anwesenheit der Fachlehrkraft unterrichtet.

Eine der Klassen konnte in einem gut ausgestatteten Computerraum unterrichtet werden, in dem es in der Mitte den Computern abgewandte Tische gab, so dass beim Unterrichtsgespräch keine Ablenkung durch die Computer stattfand. Die andere Klasse hatte einen Klassensatz Laptops zur Verfügung, die eine teilweise sehr langsame Verbindung zum Internet hatten, so dass das Laden der Applikationen zunächst eine Zeitlang dauerte. Waren die Applikationen einmal geladen, war die langsame Verbindung zum Internet kein Problem mehr. Natürlich war das Arbeiten in einem gut ausgestatteten Computerraum bei weitem angenehmer und weniger vorbereitungsintensiv.

Der zeitliche Rahmen der Studie umfasste pro Klasse drei Doppelstunden à 90 Minuten und eine Einzelstunde à 45 Minuten, die auf zwei Schulwochen verteilt waren. Der Ablauf der Doppelstunden war wie folgt: In den ersten 45 Minuten arbeiteten die Schülerinnen und Schüler in Paaren mit den Lernumgebungen. Dabei wechselten sie selbstständig ihre Rollen zwischen Aufschreiben und Bedienung des Computers. Die Lehrkraft bemühte sich nur bei

Fragen von seiten der Schülerinnen und Schüler einzugreifen, um das selbstständige Arbeiten nicht zu unterbrechen. Die zweiten 45 Minuten wurden jeweils für ein Unterrichtsgespräch genutzt, bei dem die Lösungen und notierten Gedanken gesammelt und gemeinsam reflektiert wurden. Die Lösungen wurden lediglich mündlich unter Verwendung eines Beamers nachbesprochen. Die Verwendung einer Doppelstunde pro Lernumgebung war zeitlich angemessen. Die abschließende Einzelstunde wurde genutzt, um eine Fragebogenaktion durchzuführen. Alle Materialien zur Studie wie Fragebögen und Arbeitsbögen befinden sich im Anhang dieser Arbeit.

Pro Lernumgebung wurden 3-4 Schülerpaare (1-2 Paare pro Klasse) bei der Arbeit am Computer videographiert. Dabei wurden Bildschirmaktivität und Schüleraktivität in Bild und Ton simultan aufgenommen[1]. In der einen Klasse wurden die videographierten Paare von der Lehrkraft bestimmt, und dem Wunsch der Forscherin entsprochen ein Schülerpaar im Notenbereich 2 und eines im Bereich 4-5 auszuwählen. In der anderen Klasse gab es freiwillige Meldungen, wobei ein Paar im Notenbereich 1-2 und eines im Bereich 2-3 lag.

Die Unterrichtsgespräche wurden ebenfalls mit einer Videokamera aufgenommen. Weiteres Auswertungsmaterial bildeten die eingesammelten und bearbeiteten Arbeitsbögen der Schülerinnen und Schüler und die ausgefüllten Fragebögen.

Dieses Design hat sicherlich einige Vor- aber auch Nachzüge. Ungünstig war das Hintereinanderschalten von drei Lernumgebungen innerhalb von zwei Schulwochen. Dadurch war es schwierig am Ende die Motivation der Schülerinnen und Schüler hoch zu halten. Dennoch bemühten sich die Klassen sehr, denn ihnen war bewusst, dass das Setting durch die Studie bestimmt wurde, und ein Hintereinanderschalten von drei Lernumgebungen dieser Art im Unterrichtsalltag nicht praktiziert werden würde.

Im Sinne der Forschungsfragen macht das Setting aber durchaus Sinn. Denn die Fragen beziehen sich direkt auf die Arbeit mit den Lernumgebungen und weniger auf eine langfristige Einbindung im Unterricht. Der Frage einer längerfristigen Einbindung wird dennoch in Form von Fortsetzungsideen, die auch auf den Beobachtungen im Rahmen der Studie basieren, in Kapitel 6 nachgegangen. Ein anderer Vorteil war, dass durch das Hintereinanderschalten das jeweils Spezifische für jede Lernumgebung in der Abgrenzung voneinander sehr deutlich zutage trat.

Dass der Unterricht von der Forscherin selbst durchgeführt wurde, hatte Vor- und Nachteile: Nachteilig war es eventuell, dass die Klassen der Forscherin komplett unbekannt waren und es durch das Design der Studie keine Zeit für eine Etablierung eines Umgangs miteinander gab. Andererseits waren die Schülerinnen und Schüler auch motivierter, da deutlicher wurde, dass dies etwas ist, was über den Rahmen ihres gewohnten Unterrichts hinausgeht und eine

[1]Zur Aufzeichnung wurde die Software *ScreenFlow* (`http://screenflow.softonic.de/mac`) genutzt. Die videographierten Paare arbeiteten an MacBooks, die von der Forscherin zur Verfügung gestellt wurden.

Abwechslung in den Unterrichtsalltag bringt. Die Einbindung der Studie in den regulären Unterricht war positiv, denn so konnte man herausfinden, ob ein Computereinsatz dieser Art in Klassen mit „normaler“ Stärke funktionierte. Die Lehrkräfte waren sehr interessiert und haben die Forscherin tatkräftig unterstützt. Das Engagement der Lehrkräfte lag auch darin begründet, dass die Forscherin eine der Lernumgebungen in Rahmen eines Vortrages zur Lehrerfortbildung vorgestellt hatte und am Ende des Vortrages einige Lehrerinnen und Lehrer für die Durchführung der Studie in ihren Klassen gewinnen konnte.

Die Aufteilung in Schülerpaare am Computer diente der Anstoßung von Verbalisierungsprozessen. Durch das Aufschreiben auf den Arbeitsbögen waren die Schülerinnen und Schüler gezwungen, ihre Gedanken „schriftreif“ auszuformulieren und auszudiskutieren. Die Schülerinnen und Schüler wurden im Unterrichtsgespräch gebeten ihre Aufschriebe auf den Arbeitsbögen nicht mehr zu verändern, um möglichst Originalgedanken zu erfassen. Ob sich alle an diese Vorgabe gehalten haben, ist nicht garantiert, aber die meisten haben den Arbeitsbogen in der Ausgangsform belassen.

4.3 Methodische Aspekte und Auswertungsverfahren

Im Verlauf der Studie wurde vielfältiges Auswertungsmaterial gesammelt. Zum einen ‚dynamisches Material‘ in Form der Videos der Schülerpaare und des Unterrichtsgespräches, und zum anderen ‚statisches Material‘ bestehend aus den ausgefüllten Arbeitsbögen und den Fragebögen. Die Vielfalt des Materials lässt die Entwicklung eines differenzierten Bildes bezüglich der konzeptuellen Ideen und Gedanken bzw. bezüglich der Arbeitsweisen der Schülerinnen und Schüler erwarten. Das Hauptziel des empirischen Teils dieser Arbeit ist es – sehr grob formuliert – ‚zu verstehen, was passiert‘. Es wird versucht nachzuvollziehen, was die Schülerinnen und Schüler ‚sehen‘, wenn sie die Objekte bewegen bzw. geistige Prozesse der Schülerinnen und Schüler zu analysieren. Deswegen wurde für die Studie ein qualitativer Ansatz gewählt, der analytisch in die Tiefe geht. Dabei werden die Grundprinzipien der *interpretativen Unterrichtsforschung* zugrunde gelegt.

4.3.1 Grundprinzipien der Interpretativen Unterrichtsforschung

Die Darstellung der Grundprinzipien der *interpretativen Unterrichtsforschung* orientiert sich zum einen an der Dissertation von Voigt [Voi84] und zum anderen an den Artikeln in den von Maier & Voigt herausgegebenen Sammelbänden [MV91, MV94].

Interpretative Unterrichtsforschung ist ein *mikroethnographischer Zugang*. Bildlich gesprochen kann man Video- und Audiogeräte mit Mikroskopen vergleichen, die einen Einblick in die Mikrokultur von Unterricht bieten können. Die Lernumgebungen sind in der Hoffnung entworfen worden, gewisse mathematische Inhalte im Rahmen eines propädeutischen Analysisunterrichts zu vermitteln. Dies soll nun auch durch eine empirische Studie untersucht und analysiert werden. Der Fokus liegt dabei auf dem Subjekt in seiner Intersubjektivität (Schülerinnen und Schüler untereinander und in Verbindung mit dem Computer, aber auch mit der Lehrperson) und auf interpretativen Methoden.

Es wird davon ausgegangen, dass Lehren und Lernen von Mathematik Momente eines sozialen Prozesses sind, dass mathematische Zeichen und Mittel – wie zum Beispiel interaktive Visualisierungen – bzw. unterrichtliche Handlungen keine Bedeutung per se haben, sondern dass Bedeutungen erst interaktiv konstituiert werden.

> „Es wird insbesondere gefragt, wie Lehrer und Schüler gemeinsam ein mathematisches Thema erarbeiten. Das Interesse gilt [...] der interaktiven Konstitution von Bedeutung, die als mathematische gilt. [...] Statt zu fragen, was die mathematische Bedeutung wirklich ist oder wie oft sie konstituiert wird, wird gefragt, wie in einer sich bildenden Unterrichtskultur mathematische Bedeutung hervorgebracht und stabilisiert wird. Mathematische Bedeutung, Lehren und Lernen von Mathematik werden als Momente eines sozialen Prozesses verstanden, der für die beobachtete Unterrichtskultur spezifisch ist.“
> [MV91], S. 154

Insbesondere ist die Einbeziehung des Computers bzw. der interaktiven Lernumgebungen in die Interaktions- und Aushandlungsprozesse eines der Hauptinteressen dieser Arbeit.

Charakteristisch für den mikroethnographischen Zugang der interpretativen Unterrichtsforschung ist seine Theoriegebundenheit:

> „Was der Mikroethnograph als relevant annimmt, hängt von seinem theoretischen Blickwinkel oder einer Kombination verschiedener Theorien ab. Will man sich nicht mit dem gesunden Menschenverstand begnügen, lassen sich Theorien wie Brillen nutzen und Konturen in dem beobachteten Geschehen erkennen.“
> [MV91], S. 154/155

Bei der vorliegenden Arbeit wird der *Conceptual-Change Ansatz* zugrunde gelegt. Dieser wurde in Abschnitt 4.1.1 erläutert. Gerade in einem propädeutischen Analysisunterricht scheint dies ein vielversprechender Ansatz bzw. eine vielversprechende „theoretische Brille“ zu sein. Die Forschungsfragen sind dementsprechend in Abschnitt 4.1.2 im Sinne des *Conceptual-Change Ansatzes* formuliert und analysiert worden. In seiner Anlage ist dieser Ansatz konstruktivistischer Natur und passt deswegen zu den Grundannahmen der *interpretativen Unterrichtsforschung*. Denn auch hier werden die Menschen als aktive Konstrukteure der Wirklichkeit bzw. von mathematischer Bedeutung gesehen. Als Forscher versucht man die konstruierten Bedeutungen zu *re-konstruieren*. Natürlich bringt ein Forscher in seine Deutungen sein

Vorwissen, seine Vorerfahrungen, Vermutungen und Hypothesen mit ein. Diese gilt es zu analysieren und offen zu legen. Dies wurde in den bisherigen Kapiteln versucht, indem zunächst in Kapitel 1 der dieser Arbeit zugrunde liegende Begriff von *funktionalem Denken* analysiert wurde und typische Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten in diesem Zusammenhang vorgestellt wurden. Die Analyse der Designprinzipien der Lernumgebungen und deren mathematischer Bedeutung (Kapitel 2 und 3) gibt die mathematischen und mathematikdidaktischen Vorstellungen und Sichtweisen der Forscherin auf die Lernumgebungen wieder. Lerntheoretisch ist die Interpretation an den *Conceptual-Change Ansatz* gebunden. Ein Interpret konstruiert selbst Vorstellungen, welche dem beforschten Subjekt unterstellt werden. Deswegen ist eine Reflexion von Vorwissen, Vorerfahrungen, Vermutungen und Hypothesen unerlässlich und Bestandteil der Analyse.

Interpretiert werden dabei Interaktionstexte. Hierzu zählen in dieser Forschungsarbeit hauptsächlich Transkripte, die, basierend auf den Videos von den Schülerpaaren am Computer, angefertigt wurden (siehe auch Abschnitt 4.3.2). Ergänzend werden die schriftlichen (statischen) Aufzeichnungen der Schülerinnen und Schüler auf den Arbeitsbögen und den Fragebögen herangezogen. Die Transkripte werden von der Forscherin sequentiell durchgegangen und deutend erschlossen. Ein Interpret versucht dabei aus den Reaktionen der Beteiligten (hier beteiligte Schülerinnen und Schüler unter Einbeziehung des Computers) auf die öffentliche, die als verbindlich geltende Äußerung zu schließen. Der Schwerpunkt interpretativer Studien liegt auf dem „Verstehen“. Phänomene und ihre Zusammenhänge sollen in ihrer Vielfalt aufgedeckt werden, und typische Handlungsmuster der Beforschten sollen verstanden werden. Somit sind die Ergebnisse nicht als Allaussagen zu verstehen, vielmehr wird das Allgemeine im Einzelfall gesucht. Die Analyse führt nicht etwa zu einem objektiven Urteil über subjektive Vorstellungen der Beforschten, sondern es zeigt sich im Verlaufe der Analyse die Voraussetzungsgebundenheit der Interpretationen.

Was erhofft man sich von den Ergebnissen einer solchen interpretativen Studie und was kann man zur Gültigkeit der Deutungen sagen?

Maier [MV91] formuliert die Antwort auf die Frage nach der Art der Ergebnisse folgermaßen:

> „Die Vielgestaltigkeit dessen, was im Einzelfall möglich ist, kann [...] den beobachtenden Blick von Lehrern als Rezipienten seiner Forschung schärfen, sie für denkbare Phänomenzusammenhänge sensibilisieren und sie auf diese Weise befähigen, die Gestaltung von Unterricht überlegt zu planen, rational zu kontrollieren und ihre Handlungskonzepte zu verbessern.“
> [MV91], S. 148

Es geht also um Sensibilisierung im Hinblick auf Wahrnehmung und eigenes didaktisches Handeln. Darüber hinaus ist es ein Schwerpunkt dieser Arbeit, den Einfluss der interaktiven

Lernumgebungen auf das Lernen von Mathematik zu analysieren. Es sollen Phänomene im Zusammenhang mit der Arbeit am Computer beschrieben und analysiert werden, die dann wiederum Hinweise auf einen sinnvollen Einsatz des Computers im Unterricht geben können. Genauer wird nach Hinweisen und Phänomenen bezüglich des speziellen Designs der Lernumgebungen gesucht.

Bei der Analyse konzentriert man sich zunächst auf gewisse Szenen und bezieht nach und nach mehr Material mit ein. Solche Fallstudien beanspruchen natürlich keine absoluten Wahrheiten, sondern resultieren in plausibilisierte Re-Konstruktionen. Tatsächlich findet Verallgemeinerung auch in der Auseinandersetzung des Lesers mit der Fallstudie statt. Die Leser bekommen die Möglichkeit die re-konstruierten Strukturen und Prozesse als typisch zu erkennen und Perspektiven für den eigenen Unterricht zu entwickeln. Die Interpretationen sind Deutungsangebote, die in einen (fiktiven) Dialog mit dem Leser eingehen. Deswegen enthalten interpretative Studien mindestens Transkripte, dichte Interpretationen und theoretische Hintergründe.

4.3.2 Auswertungsverfahren

In diesem Abschnitt wird das konkrete Verfahren bei der Dokumentation und Analyse dargestellt. Dabei wird erläutert, welche Analysedokumente erstellt wurden, welche Analyseschritte gemacht wurden und wie die Szenen für die Interpretationen ausgewählt wurden. Weiterhin wird das Vorgehen begründet. Ziel des Verfahrens ist, sich durch den Einsatz reflexiver Prozesse von der alltäglichen und unwillkürlichen Textinterpretation abzuheben.

Hauptauswertungsmaterial sind die Videos der Schülerpaare am Computer. Bei der Lernumgebung „Dreiecksfläche“ wurden vier Videos analysiert und bei den Lernumgebungen „Die Reise“ und „Einbeschriebene Rechtecke“ jeweils drei. Bei einer Erstdurchsicht der Videos zeigte sich sehr schnell, dass eine Deutung der Schüleraussagen und (Computer-) Handlungen nur im Gesamtablauf – also im sequentiellen Durchgang – möglich ist. Das liegt daran, dass viele Aussagen, sich auf vorangegangene Aussagen beziehen und eine Deutung erst möglich ist, wenn man die Bezüge aufdeckt und den chronologischen Verlauf berücksichtigt.

Um eine sequentielle Sicht auf eine gesamte Sitzung zu ermöglichen, mussten Überblicksdokumente erstellt werden. Die Überblicks- oder *Rohdokumente* bestehen aus großen Tabellen, die je eine Spalte für die *Zeit, Paraphrase, Computeraktion, Rohtranskript* und *erste Deutungsversuche* enthalten. Dazu wurde jedes Video Stück für Stück durchgegangen. Jede nicht-transkribierte Stelle wurde paraphrasiert. In die Paraphrase-Spalte wurden außerdem die schriftlichen Äußerungen der videographierten Schülerpaare auf den Arbeitsbögen mit aufgenommen. Die Computeraktionen wurden in einer extra Spalte festgehalten. Bei Stellen mit lebhafter/kontroverser Diskussion, häufiger Computeraktion oder Schwierigkeiten wurde ein Rohtranskript angefertigt. Solch ein Rohtranskript hält lediglich die gesprochenen Worte fest, häufig ohne etwaige Wortwiederholungen oder Wortabbrüche. Es diente – genau wie die Paraphrasierungen – der Herstellung erster Deutungen bzw. ersten Verstehens der Episoden. In der letzten Spalte wurden unter „ersten Deutungsversuchen“ erste spontane Assoziationen und subjektive Anfangsdeutungen schriftlich fixiert, um sie später mit der Analyse zu vergleichen.

Die Rohdokumente bildeten die Basis für die Auswahl der Episoden für Feintranskripte. Die Feintranskripte wurden nicht für sich stehen gelassen, sondern basierend auf den Rohdokumenten, wurden Analysedokumente erstellt, die die ausgewählten Episoden in ihrem zeitlichen Ablauf eingebettet ließen. Alle nicht-transkribierten Abschnitte tauchen in diesen Analysedokumenten als Paraphrasierungen auf. Zusätzlich wurden die Antworten auf den Arbeitsbögen mit eingearbeitet. Am Ende jedes Analysedokuments wurden auch die Antworten auf den Fragebögen der jeweiligen Schülerpaare festgehalten.

Insofern bilden die Analysedokumente mit den Feintranskripten eine Zusammenschau einer gesamten Sitzung eines Schülerpaares inklusive statischen Auswertungsmaterials, was aus Arbeitsbögen und Fragebögen besteht.

Darüber hinaus enthält jedes Analysedokument Bemerkungen über das videographierte Schülerpaar bzgl. deren Leistungsstand anhand der Notenauskunft durch die Lehrperson, Motivation, und Bemerkungen zu den zugrunde gelegten Transkriptionsregeln. Diese Analysedokumente sind in ihrer Gesamtheit in Anhang D dieser Arbeit zu finden.

Grundsätzlich kann man in einem Transkript verschiedene Dimensionen verschriftlichen. Bei der Abfassung der Analysedokumente wurde die *linguistische Dimension* – also die hörbare Sprache, die einem Sprecher zugeordnet werden kann – verschriftlicht. Die *nonverbale Dimension* – also Körpersprache, Bewegungen – wurde nur festgehalten, wenn sie besonders heftig war. Allerdings wurde jede Computeraktion in die Transkripte mit aufgenommen. Um eine gute Lesbarkeit der Transkripte zu ermöglichen wurde die *paralinguistische Dimension* kaum in den Transkripten berücksichtigt. D.h., dass Intonationen, Betonungen, Hebungen und Ähnliches kaum auftauchen. Solch ein Vorgehen bei der Transkription erschien in Anbetracht der gestellten Forschungsfragen, die auf die Konzeptualisierungsprozesse und Computereinbindung abzielen, als sinnvoll. Es wurde versucht, die Transkriptionsregeln möglichst einfach zu halten.

An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass Dokumentation methodisch schwierig und keinesfalls eindeutig ist. Videos ermöglichen zwar Zweifeln nachzugehen und mehrfach zu interpretieren, sie stellen aber ihrerseits schon Interpretationen der Wirklichkeit dar, da sie nur Ausschnitte der Wirklichkeit wiedergeben. Durch Transkription wird das ganze Geschehen nochmals reduziert. Insbesondere ist nonverbales Verhalten schwierig im Transkript festzuhalten. Insofern muss man sich bewusst sein, dass durch die Transkription mit den zugrunde gelegten Regeln schon eine Interpretation stattfindet. In diesem Falle wird der Schwerpunkt auf die hörbare Sprache gelegt. Dies scheint im Sinne des Theorierahmens und der Forschungsfragen zielführend zu sein.

Die Analysedokumente mit den Feintranskripten dienten dann im weiteren Verlauf als Interpretations- und Feinanalysegrundlage. Die Transkripte wurden dabei sequentiell bzw. Zeile für Zeile durchgegangen und analysiert. Die Deutungen wurden in die Dokumente mit aufgenommen. Bei unklaren Deutungen wurde im chronologischen Ablauf der Sitzung nach vorne und zurück geschaut. Dabei konnte beispielsweise verfolgt werden, wie sich mathematischer Sinn im Schülergespräch entwickelte und an welchen Stellen der Computer eine Rolle spielt.

Für die Darstellung der Ergebnisse in Kapitel 5 werden Transkriptausschnitte verschiedener Schülerpaare zu unterschiedlichen Phänomenen zusammengefasst und entsprechend der Forschungsfragen angeordnet. Will man Sitzungen einzelner Paare chronologisch verfolgen, so kann man die Analysedokumente bestehend aus Feintranskripten und Paraphraseabschnitten in Anhang D einsehen.

Grundsätzlich liegt dem gesamten Verfahren eine Verfeinerung der Analyseeinheiten zugrunde. In den Rohdokumenten waren die Analyseeinheiten sehr groß, während bei der Feinanalyse am Ende teilweise Einzelhandlungen analysiert wurden. Daraus wurden letztlich im Vergleich verschiedener Schülerpaare Deutungshypothesen entwickelt.

Kapitel 5

Qualitative Studie – Analysen und Ergebnisse

5.1 Aufbau und Intentionen des Kapitels

Dieses Kapitel dient der Darstellung der Ergebnisse der durchgeführten Studie im Kontext der in den vorigen Kapiteln beschriebenen Theorien, Prinzipien und methodischen Zugängen. Die Darstellung der Ergebnisse wird entsprechend der in Abschnitt 4.1.2 formulierten Forschungsfragen angeordnet. Dabei werden einzelne Phänomene herausgegriffen und exemplarisch anhand von Transkriptauszügen und Antworten auf den Arbeitsbögen beschrieben und analysiert. Die herausgegriffenen Transkripte können in der Gesamtheit eingebettet in den sequentiellen Ablauf der Passagen in Anhang D eingesehen werden. Es sei darauf verwiesen, dass die hier präsentierten Phänomene lediglich eine Auswahl darstellen und sich noch weitere Phänomene beschreiben lassen könnten.

Die Auswahl der Passagen und Phänomene ist vom Kontext und den Forschungsfragen her geprägt. Ein anderer Kontext würde sicherlich zu anderen Fragen und einer anderen Auswahl führen, und die Bereitstellung der vollständigen Transkripte in Anhang D ermöglicht den Leserinnen und Lesern theoretisch die Interpretation der Textstellen aus einem anderen Kontext heraus. Insofern ist es gerade bei interpretativer Arbeit schwer zu sagen, wann eine Interpretation als abgeschlossen betrachtet werden kann. Den Abschluss der Interpretationen entscheidet der Forscher oder die Forscherin. In dieser Arbeit wurden die Interpretationen abgeschlossen, nachdem sich für zentral erscheinende Phänomene ein schlüssiges Gesamtbild ergeben hat, was auch mit den Antworten auf den Arbeitsbögen verträglich war. Darüber hinaus wurden die Interpretationen und Analysen in teils referierten Zeitschriften veröffentlicht [Hof09c, Hof10, Hof11a, Hof11b] und in diversen Vorträgen vorgestellt und diskutiert. Auch dies trug zum Abschluss der Analysetätigkeiten bei.

Ergänzend zu den Transkriptanalysen in den Abschnitten 5.2 und 5.3 werden in Abschnitt 5.4 die Fragebögen und ausgewählte Antworten der Schülerinnen und Schüler vorgestellt. Diese Antworten runden das Bild vom Computereinsatz in allgemeinerer Form ab.

An dieser Stelle sei nochmals darauf verwiesen, dass die vorliegende Studie keine klassische Interventionsstudie ist und sein soll. Vielmehr liegt der Fokus der Studie auf der Beschreibung und Analyse von Zusammenhängen und Phänomenen in dem beschriebenen Kontext. Die Ergebnisse sind dementsprechend so zu lesen, dass in dem vorliegenden Kontext und den vorliegenden Situationen gewisse Ereignisse auftraten. Diese lassen Schlüsse auf zukünftiges didaktisches Handeln, sowie auf die weitere Gestaltung von Lernumgebungen zu und sensibilisieren im Hinblick auf die eigene Wahrnehmung (siehe auch Abschnitt 4.3.1).

5.2 Analysen und Ergebnisse zu den Forschungsfragen 1 und 2

Im Folgenden werden Analysen und Ergebnisse die ersten beiden Forschungsfragen (Abschnitt 4.1.2) betreffend dargestellt. Die Forschungsfragen werden nochmals im Wortlaut an den Anfang dieses Abschnitts gestellt:

Forschungsfrage 1: Welche Vorstellungen und Begriffe im Hinblick auf eine dynamische Sicht funktionaler Abhängigkeiten werden bei der Arbeit mit den Lernumgebungen entwickelt bzw. formuliert, insbesondere, wenn es um die qualitative Beschreibung lokaler und globaler Funktionseigenschaften im Hinblick auf Konzepte der Analysis geht?

Forschungsfrage 2: Welche Interaktionsprozesse zwischen den Lernenden, und zwischen Lernenden und dem Computer lassen sich beschreiben, und welche Rolle spielen dabei die Möglichkeiten der Applikationen wie dynamischer Repräsentationstransfer, Variation und Metavariation?

Bei der Analyse der Transkriptausschnitte zeigte es sich, dass die Entwicklung von Vorstellungen und Begriffen in der Interaktion der Schülerinnen und Schüler untereinander bzw. mit dem Computer stattfindet. Deswegen lassen sich in der Analyse diese Fragen nicht scharf trennen und werden im Folgenden gemeinsam behandelt. An den Stellen, wo eine Trennung möglich ist, wird sie aber vorgenommen. Die Formulierung der beiden Fragen ist für die Analyse dennoch hilfreich, da jedes Transkript im Sinne der Fragen auf seinen Gehalt an mathematischen Vorstellungen (Forschungsfrage 1) und dann nochmals auf die Prozesse und Interaktionen unter Berücksichtigung der Möglichkeiten der Lernumgebung hin (Forschungsfrage 2) analysiert und beschrieben werden kann. Insofern hat die Formulierung der beiden Fragen eine ordnende Funktion.

5.2.1 „Dreiecksfläche“ und die Diskussion um Bestand und Änderung

Die Hauptschwierigkeit der Lernumgebung bestand für die Schülerinnen und Schüler in der inhaltlichen und begrifflichen Trennung von *Bestand an Flächeninhalt* und *Änderung des Flächeninhalts* (siehe auch Abschnitt 3.1 für den mathematischen und mathematikdidaktischen Hintergrund der Lernumgebung „Dreiecksfläche“). Zur Bearbeitung der Aufgaben müssen Bestand und Änderung sowohl in der Situation als auch mithilfe des Funktionsgraphen beschrieben werden. In der Situation ist das Änderungsverhalten an der Wendestelle beispielsweise durch einen qualitativen Wechsel im Zuwachs des Flächeninhalts beschreibbar. Anhand des Graphen lässt sich dies mit den Begriffen „Steigung“ oder „Anstieg“ ausdrücken.

Im Verlauf dieses Abschnittes werden drei Transkriptauszüge präsentiert, die zeigen, wie Schülerinnen und Schüler sich hier auf Begrifflichkeiten einigen und welche Diskussionen dabei ablaufen können. Der Transkriptauszug in Abbildung 5.1 wurde gewählt, weil die beiden (sehr guten) Schüler sich sehr schnell auf eine tragfähige mathematische Formulierung einigen. Der Transkriptauszug in Abbildung 5.2 zeigt einen Ausschnitt aus einer langen Diskussion zweier Schülerinnen zum Thema. Im dritten Auszug (Abbildung 5.4) kann man verfolgen, wie die Möglichkeiten der Applikationen im Aushandlungsprozess zum Tragen kommen können.

19	S1:	Darf ich nochmal verschieben?
20	S2:	Ne.
21	S1:	( ) *(S1 verschiebt C horizontal nach links über den Punkt A, dann schiebt er C nach rechts über den Punkt B)*
22	S2:	*(liest)* Zu dem Zeitpunkt, wenn der Punkt C überwunden wird, nimmt die Steigung stetig
23		ab. Das liegt daran, dass das Dreieck an dieser Stelle am höchsten ist und damit am
24		meisten Flächeninhalt hat.
25	S1:	Naja, am meisten Flächeninhalt ha- *(S1 wendet sich nach hinten zu den Mädels und gibt einen kurzen Hinweis zur Handhabung der Applets)*
26	S1:	Aber wenn er direkt unter C liegt der Punkt D, dann heißt es ja nicht, dass es am meisten
27		Flächeninhalt hat. Am meisten Flächeninhalt hat er, wenn das alles ausgefüllt ist. *(S1 blickt zu S2. S2 verschiebt die Punkte B und C so, dass C weder über A noch B liegt)*
28	S1:	Den größtmöglichen Zuwachs an Flächeninhalt, meinst Du.
29	S2:	Naja, ist ja das Gleiche.
30	S1:	Nee.
31	S2:	Doch.
32	S1:	Größter Flächeninhalt ist, wenn D jetzt da ist. *(zeigt mit dem Finger auf den Bildschirm)* Dann ist alles *(S2 verschiebt D ein wenig)*
33	S2:	Ja, ok. *(beide schreiben)*
34	S1:	*(bewegt D)* So, und ab dem schwarzen Punkt. Also über C ist ja der ( )
35	S2:	Ja, da wird's, da nimmt's ab.
36	S1:	Ja.
37	S2:	Weil da kein (.) weil der Zuwachs nicht mehr so groß sein kann
38	S1:	Weil dann der größtmögliche Zuwachs an Flächeninhalt
39	S2:	erreicht ist
40	S1:	Ja. *(S2 schreibt)*

Abbildung 5.1: Dreiecksfläche, Gymnasium 2, Schüler mit Noten im 1er-2er-Bereich.

Abbildung 5.1 zeigt einen Ausschnitt zur Bearbeitung der Aufgabe *Warum hat der Graph* *diese Gestalt?*

Zu Beginn übernimmt der Schüler S1 die Maus und schiebt den Punkt C einmal ganz nach rechts und links (19-21). S2 liest seinen begonnenen Antwortsatz vor (22-24) und formuliert in der Sprache des Funktionsgraphen mathematisch korrekt: *wenn der Punkt C überwunden wird, nimmt die Steigung stetig ab*[1]. In der Sprache der Situation spricht er aber davon, dass der Bestand an Flächeninhalt am größten sei, wenn D unter C liegt (23/24). S1 widerspricht und macht ihn auf seinen Fehler aufmerksam (26-28): *Den größtmöglichen Zuwachs meinst Du*. S2 findet somit in der Situation eine geeignete Beschreibung des Änderungsverhaltens durch Verwendung des Begriffs *Zuwachs*. Der Rest des Transkriptes zeigt, dass S2 nochmals Punkt D bewegt (32-34) und schließlich die Beschreibung von S1 akzeptiert, indem er den Sachverhalt in eigene Worte fasst (37-40).

Die beiden Schüler finden im Verlauf Begrifflichkeiten, um das Änderungsverhalten bzw. den Wechsel in der Qualität des Änderungsverhaltens an der Wendestelle zu beschreiben. Dabei fällt es zunächst schwerer, dies in der Situation begrifflich zu fassen als auf graphischer Seite. In der Situation werden Bestand und Änderung von S2 anfangs (begrifflich) verwechselt.

Es scheint als würde S1 zu Beginn *Metavariation* nutzen, indem er die Randsituationen (C über A und B) einstellt. Tatsächlich wäre solch ein Vorgehen hilfreich, da man dadurch den Wechsel von konvex nach konkav deutlich visualisieren und voneinander abgrenzen kann. S1 nutzt in (32) *Variation in der Situation*, nachdem ihn S2 auf seinen Irrtum bezüglich der Beschreibung des Änderungsverhaltens in der Situation aufmerksam gemacht hat. Beispielsweise ist die Monotonie der Flächeninhaltsfunktion durch Variation der Situation direkt erlebbar, da „immer mehr blau hinzukommt“. S1 scheint durch Bewegung von D die Aussagen nochmals zu überprüfen, zumal er danach die Beschreibung des Änderungsverhaltens in eigene Worte zu fassen vermag.

Der Transkriptauszug in Abbildung 5.2 zeigt einen Ausschnitt einer längeren Diskussion zweier Schülerinnen zur Frage: *Warum hat der Graph diese Gestalt?* Abbildung 5.4 zeigt die Weiterführung dieser Diskussion unter Benutzung der Applikation und in Abbildung 5.3 ist die dazugehörige Antwort der beiden Schülerinnen auf dem Arbeitsbogen zu sehen. Die Szenen wurden ausgewählt, weil die beiden Schülerinnen besonders heftig um die Begriffe rangen und diskutierten.

Die Diskussion hatte ihren Ausgangspunkt in der Behauptung von Schülerin S1, dass der Graph *anfangs steigt* und *sobald der Punkt C überschritten ist, wieder sinkt* (22-24). S2 stimmt dem nicht zu. Sie behauptet, dass es um den Punkt C herum viel stärker steigt als davor: *das geht da viel stärker hoch als [...] bis zum Punkt C [...] da steigt es doch fast linear an* (29/30). S2 erkennt also, dass das Wachstum im Bereich der Wendestelle am größten ist. Sie beschreibt

[1]Für eine bessere Lesbarkeit werden bei der Analyse Zitate aus den Transkripten nicht in Anführungszeichen gesetzt, sondern kursiv geschrieben.

22	S1:	Ähm, anfangs steigt. Sobald der C Punkt, sobald der Punkt C überschritten ist-
23	S2:	das stimmt irgendwie nicht
24	S1:	[wieder sinkt. Doch. Kuck. *(zeigt auf den Monitor)* Die wird immer größer, die wird an
25		sich immer größer, deswegen wird das hier auch immer mehr, aber das hier, das im Verhältnis, das
26		wird auch mehr, aber das wird, ach verstehst Du?
27	S2:	Nee.
28	S1:	Naja, kuck mal-
29	S2:	Ich versteh nicht, wie Du meinst der Punkt C, wieso sinkt das da wieder, das geht da viel stärker
30		hoch als von (.) als bis zum Punkt C. Hier *(zeigt auf Monitor)* steigt es nur so ein bisschen und da
		steigt es doch fast linear an. Ich versteh nicht, warum Du sagst, das sinkt wieder.
31	S1:	[Nein, es sinkt, es sinkt. *(zeigt auf Monitor)*
		Siehst Du das nicht?
		[...]
37	S1:	Es geht doch so. *(skizziert auf dem AB den Graphen des Applets, markiert dabei die Wendstelle*
38		*besonders und zeichnet den Abschnitt nach der Wendestelle dicker)* Es geht so, und hier ist der
39		Punkt C, das heißt hier sinkt es-
40	S2:	Nein. Es geht so. So, dann geht es so und dann sinkt es *(skizziert auf dem AB den Graphen des*
41		*Applets und setzt ihn über den rechten Rand fort, so dass ein inneres Maximum entsteht)* und es
42		sinkt erst ab dem Punkt da. Für mich sinkt es erst ab dem Punkt da.
		[...]
67	S2:	Aber für mich sinkt er nicht, der steigt doch eindeutig.
68	S1:	Aber der, siehste das- *(zeigt auf Monitor)*
69	S2:	Wenn er, wenn er sinken würde, würde es doch so wieder runter gehen *(zeigt auf Monitor)*
70	S1:	Er muss nicht-
71	S2:	[Das ist sinken.
72	S1:	Nein, er nimmt aber ab. Das Verhältnis nimmt doch ab.
73	S2:	[Nein.
74	S1:	Kuck mal, wenn es so runtergeht
75	S2:	[Ja, dann sagen wir ‚das Verhältnis nimmt ab', aber hier *(zeigt auf Monitor)* steigt er doch
76		noch. Der steigt auch da und auch da
77	S1:	[Ja, das ist doch immer das Verhältnis. Der Graph ist doch das Verhältnis.
78	S2:	Nee (.) Ja, ok, der Graph kann das Verhältnis sein, aber sinkt da *(zeigt auf Monitor)* auf keinen
79		Fall. Der steigt noch. *(lacht nach vorne)* Ja, ok.
80	S1:	Aber im Verhältnis nimmt er ab.
81	S2:	*(beginnt zu schreiben)* dann im Verhältnis
82	J:	*(von vorne)* Wie wär's, wenn Ihr sagt ‚die Steigung nimmt ab'.
83	S1:	*(lächelt)* Stimmt. Ist gut.
84	S2:	Mir ist warm. *(beide lachen, S2 zieht den Pullover aus)*

Abbildung 5.2: Dreiecksfläche, Gymnasium 2, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

dies durch *da steigt es doch fast linear an*, da um C herum der Graph einer Geraden ähnelt[2]. S1 bleibt bei ihrer Position, dass der Graph nach C anfängt zu sinken. Beide versuchen nun ihre Aussagen durch Skizzen auf dem Arbeitsbogen der jeweils anderen plausibel zu machen (37-42). Die Skizzen sind in Abbildung 5.3 oben zu sehen. Der obere Graph stammt von S1. Dabei ist die Wendestelle besonders markiert und es wird deutlich, dass S1 eine Krümmungsänderung meint, also einen Wechsel in der Qualität des Wachstums, dies aber nicht geeignet ausdrücken kann. S2 verwendet den Begriff „sinken“ für den Bestand an Flächeninhalt und zeichnet zur Untermauerung den Graphen weiter, so dass ein Maximum zu sehen ist, nach welchem der Graph dann tatsächlich sinkt. Insofern erkennt S2 die strenge Monotonie des Graphen, die sich aus einer Bestandssicht heraus begründen lässt (der Bestand nimmt bis zum Ende zu!). Bis zu (71) versucht S1 auf graphischer Seite das Änderungsverhalten zu beschreiben und es findet keine Einigung statt. Ab (72) schwenkt S1 zur Situation über und spricht davon, dass sich das „Verhältnis“ aber ändere, wenn C überschritten wird. Welches Verhältnis sie meint, geht aus ihrer Aussage nicht hervor. S2 lässt sich darauf ein und beginnt zu schreiben (78-81). Schließlich mischt sich ein Mitschüler von vorne ein: *Wie wär's, wenn ihr sagt ‚die Steigung nimmt ab'*. Damit ist die begriffliche Beschreibung auf graphischer Seite gelungen und die beiden schließen ihre Diskussion (vorerst) ab.

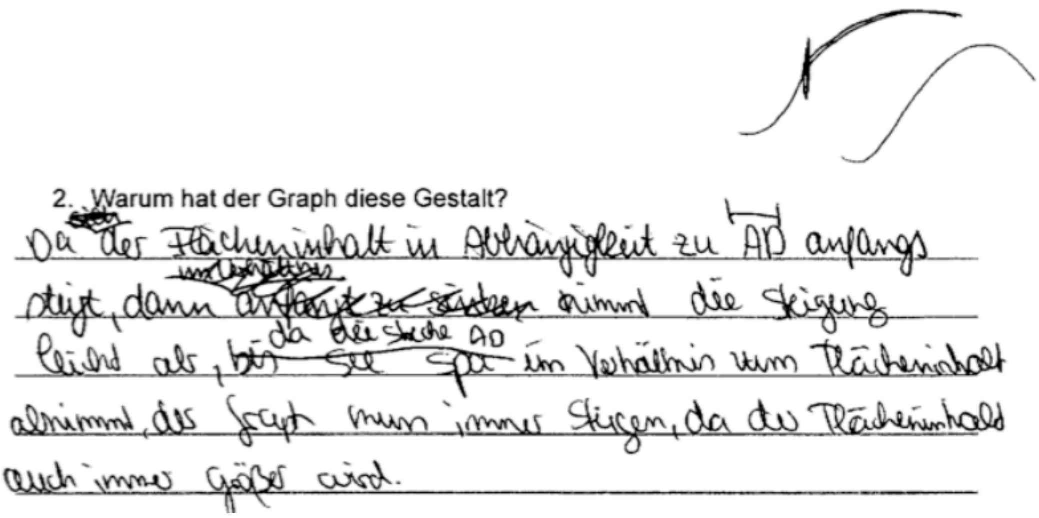
Die Diskussion zeigt, dass für S2 der Graph den Bestand an Flächeninhalt repräsentiert, wohingegen S1 versucht Informationen über die Änderung des Flächeninhalts zu finden. Am Ende gelingt es durch Hilfe eines Mitschülers, die Änderung auf graphischer Seite zu beschreiben, indem der Begriff „Steigung“ benutzt wird. In der Situation gelingt eine Beschreibung des Änderungsverhaltens nicht. S1 spricht davon, dass „das Verhältnis abnimmt“. Sie spezifiziert dieses Verhältnis aber nicht, sieht aber wohl, dass sich das Krümmungsverhalten des Graphen in C ändert.

Die Antwort der beiden Schülerinnen auf dem Arbeitsbogen (Abbildung 5.3) bestätigt diese Beobachtung: *Da der Flächeninhalt in Abhängigkeit zu AD anfangs steigt, dann nimmt die Steigung leicht ab, da die Strecke AD im Verhältnis zum Flächeninhalt abnimmt, der Graph muss immer steigen, da der Flächeninhalt auch immer größer wird.*

Auf graphischer Seite gelingt die Beschreibung der Änderung. Auch das Monotonieverhalten ist auf graphischer als auch auf Situationsseite korrekt dargestellt. Der Versuch, von einem „Verhältnis“ zu sprechen ist zunächst ein guter Anfang, wenn man an Änderungsraten denkt. Aber den beiden gelingt es nicht, dies korrekt zu beschreiben. Die Antwort auf dem Arbeitsbogen lässt vermuten, dass sie das Verhältnis von *Abstand A-D* zu *Flächeninhalt abhängig vom Abstand A-D* meinen. Dies ist aber falsch, da bei Überschreiten des Punktes C dieses Verhältnis zunächst steigt. Wie schon beim ersten Transkriptauszug (Abbildung 5.1) scheint die Beschreibung des Änderungsverhaltens in der Situation schwieriger zu sein als im Graphen.

Von einem mathematikdidaktischen Standpunkt aus birgt die Trennung von Bestand und

[2]Es ist bemerkenswert, dass S2 lineares Wachstum als besonders starkes Wachstum bezeichnet und das obwohl sie in den Wochen zuvor Exponentialfunktionen behandelt hatten.



2. Warum hat der Graph diese Gestalt?

Da der Flächeninhalt in Abhängigkeit zu AD anfangs steigt, dann ~~anfängt zu sinken~~ nimmt die Steigung leicht ab, ~~bis sie~~ da die Strecke AD im Verhältnis zum Flächeninhalt abnimmt, das Graph muss immer steigen, da der Flächeninhalt auch immer größer wird.

Abbildung 5.3: Dreiecksfläche: Arbeitsbogenausschnitt der Schülerinnen aus dem Transkript in Abbildung 5.2 und Abbildung 5.4.

Änderung gewisse Schwierigkeiten (siehe auch Abschnitt 3.1): Tatsächlich zeigt die Applikation den Bestandsgraphen (Flächeninhaltsfunktion) gleichzeitig mit dem dazugehörigen Änderungsgraphen (Dreieck als stückweise lineare Funktion interpretiert). Der Bestandsgraph ist monoton wachsend, während die qualitative Änderung des Wachstums an der Wendestelle im Änderungsgraphen simultan als monotones Fallen sichtbar ist. Mit anderen Worten ist die *Änderung im Bestandsgraph* als *Bestand im Änderungsgraph* sichtbar. Bestand und Änderung sind dynamisch verbunden und deswegen mental in intuitiver und impliziter Weise zugänglich.

In der Diskussion in Abbildung 5.2 haben die Schülerinnen zu keinem Zeitpunkt die Möglichkeit genutzt, die Punkte B, C und D zu bewegen, da ihnen diese Möglichkeit nicht aufgefallen war. Im Transkript in Abbildung 5.4 ist zu verfolgen, wie sie aber zu einem späteren Zeitpunkt Metavariation nutzten und die Diskussion um Bestand und Änderung nochmals aufgriffen. S2 stellt zunächst durch Metavariation ein gleichschenkliges Dreieck ein, was S1 dazu bringt ihre erste Behauptung *Da steigt's, da sinkt's* nochmals zu wiederholen (91-94). S2 scheint nun visuell nachvollziehen zu können, dass S1 die Änderung des Krümmungsverhaltens meint und sagt *Ja, ok, für mich heißt das hier nicht sinken. Das ist einfach nur schwächer [...]* (95/96). Dann übernimmt S1 die Maus und versucht eine Situation durch Metavariation einzustellen, die ihre Sichtweise visuell verdeutlicht und sagt dann: *Siehste das jetzt, dass das [...]?* (97-109). Sie einigen sich nun auf dieser (visuellen) Basis nochmals auf den Begriff der „Steigung". Letztlich endet es aber damit, dass S1 die Änderung des Krümmungsverhaltens immer noch nicht korrekt in Worte zu fassen vermag: *Ja, wenn die Steigung sinkt, dann sinkt der Graph ja auch. Also er sinkt nicht so (Handbewegung nach unten).*

91	S2:	Wir müssen das hier (andere Länge). *(bewegt Mauszeiger von A zu D)* Das sind 1, 2, 3, 4, 5
92		Kästchen *(verschiebt B nach rechts bis ein gleichschenkliges Dreieck entsteht und D unter C*
93		*liegt)* Also schau mal, jetzt haben wir hier genau die Hälfte, nä? *(fährt mit Mauszeiger den Graphen von links nach rechts ab)*
94	S1:	Da steigt's, da sinkt's.
95	S2:	*(betrachtet den Monitor)* Ja, ok, für mich heißt das hier nicht sinken. Das ist einfach nur dann
96		schwächer, aber ( ).
97	S1:	Mach doch mal- Darf ich mal? *(übernimmt Maus)*
98	S2:	Bitte.
99	S1:	*(schiebt C wieder weiter nach links)*
100	S2:	Da hatten wir es doch schon.
101	S1:	Ja, ich will jetzt zeigen, dass er- *(versucht den blauen Punkt auf dem Graphen nach rechts zu schieben)*
		[...]
107	S1:	*(verschiebt C nach links, so dass der erste Abschnitt des Graphen bis zur Wendstelle kleiner ist als*
108		*der Abschnitt danach)* Das (soll jetzt) möglichst klein, nä? *(schiebt C noch weiter nach links)*
109		Siehste das jetzt, dass das (..) da genauso ist, dass das so geht?
110	S2:	Ja klar seh ich das, aber (.) der sinkt doch hier nicht.
111	S1:	Ja, die Steigung sinkt-
112	S2:	Ja.
113	S1:	nimmt ab. Ja ok, das meinte ich ( )
114	S2:	[Ja, ok, aber Du hast am Anfang gesagt ‚der Graph sinkt' und das habe ich überhaupt nicht gesehen
115	S1:	[Ja, wenn die Steigung sinkt, dann sinkt der Graph ja auch. Also er sinkt nicht so *(macht eine Handbewegung nach unten)*

Abbildung 5.4: Dreiecksfläche, Gymnasium 2, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

Tatsächlich benutzen die Schülerinnen bei ihrer Diskussion die Möglichkeit der Metavariation, um Grapheneigenschaften zu verdeutlichen (hier: die Änderung des Krümmungsverhaltens). S1 weist auch darauf hin, dass die Existenz einer Wendestelle invariant unter Metavariation ist, indem sie sagt: *Siehste, dass das da genauso ist?* (109). Dies ermöglicht in gewisser Weise eine *visuelle Kommunikation*, die noch recht informell ist und von Enaktion mit der Applikation geprägt ist. Eine letztliche korrekte Einigung wird bis zum Schluss nicht erreicht. Dennoch tauchen viele Aspekte in der Diskussion auf, die sich in einem Unterrichtsgespräch aufgreifen und fortführen ließen.

Zum Abschluss dieses Abschnittes werden einige Antworten von Schülerinnen und Schülern auf den Arbeitsbögen wiedergegeben, die zeigen in welcher Art und Weise Begriffe und Vorstellungen von Bestand und Änderung erfolgreich formuliert wurden (Abbildung 5.5). Hervorzuheben ist hierbei, dass die Antworten von einer dynamischen Sicht auf den funktionalen Zusammenhang geprägt sind, also der Änderungsaspekt im Vordergrund steht. Interessant für eine Weiterführung im Unterricht ist beispielsweise die erste Antwort: *Das Dreieck hat auf der linken Seite eine größere Fläche, die nach rechts zu Punkt B spitz zuläuft. Der zu addierende Flächeninhalt sinkt also, je weiter die blaue Fläche sich B nähert.* Die Dominanz des Änderungsaspektes zeigt sich hier in der Formulierung, dass immer mehr Flächeninhalt „hinzuaddiert wird". Implizit beinhaltet diese Aussage das Konzept von Integration als kumu-

Das Dreieck hat auf der linken Seite eine größere Fläche, die nach rechts zu Punkt B spitz zuläuft. Der zu addierende Flächeninhalt sinkt also ~~[illegible]~~ je weiter die blaue Fläche sich B nähert.

2. Warum hat der Graph diese Gestalt?

Weil der Flächeninhalt ~~bis~~ mit wachsendem D ansteigt, kann der Graph nicht sinken. Ab C nimmt der Flächeninhalt etwas weiter zu, aber nach und nach mit kleinerem Wachstum, weshalb der Graph nicht so stark steigt.

2. Warum hat der Graph diese Gestalt?

Je näher ~~[illegible]~~ an C D liegt, desto steiler ist es. Das liegt daran, dass bei ~~gm~~ dem „hohen" Teil des Dreiecks der Flächeninhalt schneller pro Einheit steigt.

3. Was geschieht bzw. ändert sich am schwarzen Punkt über C?

„Nach" dem schwarzen Punkt hört der Graph auf, ~~konstant~~ so steil zu steigen. Ab hier beginnt er, flacher zu werden. Denn der Punkt markiert sozusagen die Spitze d. Dreiecks, und danach nimmt der Flächeninhalt ja nicht mehr so schnell zu!

Abbildung 5.5: Dreiecksfläche: Einige erfolgreiche Antworten auf den Arbeitsbögen.

latives Wachstum aus dynamischer Sicht, was letztlich bei der Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wieder aufgegriffen werden könnte. Insofern ist diese Formulierung gerade im Hinblick auf den in Kapitel 1, Abbildung 1.3 beschriebenen Fehler von Interesse, da dort das Konzept der Integration „statisch“ verwendet wurde und mit einem Graph-als-Bild Fehler verbunden war.

5.2.2 „Dreiecksfläche“ – Metavariation und deren Auswirkungen

Im vorigen Abschnitt 5.2.1 wurde anhand der Transkripte begründet, dass Metavariation gewisse Eigenschaften des Graphen betont. Diese Betonung kann zu einem Erklärungszwang dieser Eigenschaften führen. Zum Beispiel wird das Krümmungsverhalten des Graphen dadurch betont, dass es „beinahe“ invariant unter Metavariation ist, wodurch die Schülerinnen aus Transkript 5.4 ihre Diskussion um geeignete Beschreibungen fortsetzen und vertiefen. Die Szene in Abbildung 5.6 bestätigt diese Beobachtungen nochmals.

S2: *(verschiebt C horizontal)* Nee, aber guck mal, wenn ich, wenn ich C zum Beispiel verschiebe ändert sich das doch.
S1: *(schaut auf)* Ja, aber der Flächeninhalt ändert sich aber nicht. Es ist ja trotzdem monoton wachsend bis dahin. *(zeigt auf Monitor)*
S2: Stimmt. *(schiebt C nach rechts über B)* (Ich mein’,) dann ist es aber kein Sinus mehr.
S1: Nee, so nicht, weil es so ääh (.) rechtwinklig ist.
S2: *(schiebt C horizontal hin und her)* Ja. (Weiß ich doch).
S1: Mach es mal so, wie es vorher war. *(schreibt)*
S2: *(verschiebt C weiter nach links)* Hmm, so?
S1: Ja, ungefähr. (..) *(schreibend)* zum x-Wert von Punkt B ist der Graph monoton wachsend (..) monoton wachsend, genau, er fällt da noch nicht, da ist dann kein Graph dabei.
S2: ( ) nee, das Dreieck ist dann ja zuende (..) Und in Abhängigkeit von A *(verschiebt D)* steigt das halt. (Oder) je weiter A und D auseinander sind desto-

Abbildung 5.6: Dreiecksfläche, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

Hierbei handelt es sich um einen Ausschnitt bei der Bearbeitung der Aufgabe: *Beschreibe die Form des Graphen möglichst genau!* Der Auszug wurde ausgewählt, da hier die Wirkung von Metavariation gut zu beobachten ist, und die beiden Schülerinnen die Form des Graphen nicht nur beschreiben, sondern gleichzeitig beginnen nach Begründungen suchen. In (6/7) verschiebt S2 den Punkt C horizontal und bemerkt, dass sich dadurch die Verhältnisse in der Situation ändern. S1 erwidert daraufhin, dass sich die Eigenschaft der Monotonie aber niemals ändert (8/9) – sie bemerkt also, dass Monotonie unter Metavariation invariant ist. Dann schiebt S2 den Punkt C ganz nach rechts über B, so dass die Wendestelle verschwindet (10) und äußert, dass es so kein „Sinus“ mehr sei (Vor Beginn dieser Szene haben sich beide darauf geeinigt, dass die Form des Graphen der einer Sinusfunktion ähnelt.) S1 versucht dies mit *Nee, so nicht, weil es rechtwinklig ist* zu begründen, bleibt damit allerdings oberflächlich (11). Sie schieben anschließend C wieder in eine Position zwischen A und B (13/14) und festigen ihre Behauptung der Monotonie (15-18) bis zu der Aussage: *Und in Abhängigkeit von A steigt das halt. (Oder) je weiter A und D auseinander sind* (17/18), wobei sie hierbei den Punkt D verschieben, also Variation innerhalb der Situation nutzen.

In diesem Auszug kann man verfolgen, wie durch Metavariation die Eigenschaft „Monotonie" verdeutlicht wird und die Schülerinnen gleichzeitig in einen „Erklärungszwang" geraten und schließlich am Ende die Abhängigkeit der Zunahme an Flächeninhalt abhängig vom Abstand A-D formulieren. Es ist bemerkenswert, dass am Ende nochmals der Punkt D innerhalb der Situation bewegt wird, um diese Abhängigkeit in dynamischer Art und Weise zu fassen. Auch die Beschreibung der Funktion als „Sinus" ist produktiv nutzbar – hat doch die Sinusfunktion auf einem geeigneten Intervall qualitativ ähnliche Eigenschaften wie die vorliegende Flächeninhaltsfunktion, wenn man an deren Krümmungsverhalten denkt. Hier hat man die Möglichkeit weiterzugehen und die Eigenschaften einer Sinusfunktion von denen einer Polynomfunktionen bzw. quadratischen Funktionen abzugrenzen. Man hat dabei die Chance, die Entstehung dieser Funktionen dynamisch zu verfolgen: Die Entstehung der Sinusfunktion lässt sich dynamisch am Einheitskreis, und die Entstehung einer zusammengesetzten quadratischen Funktion mit der Applikation der Lernumgebung visualisieren.

Interessant ist auch, dass die Randposition (C über B) zuerst zu einer Verwirrung zu führen scheint, denn die Wendestelle verschwindet hier. In diesem Fall lösen die Schülerinnen diese Verwirrung auf, indem sie C wieder zurückschieben. Im Verlaufe eines Unterrichts kann man diese Verwirrung aber nutzen und erörtern, warum die Randpositionen sich unterscheiden und was genau den Unterschied ausmacht.

Neben den eben dargestellten Auswirkungen von Metavariation, kam es aber auch zu eher ungünstigen Effekten. Da Metavariation (Bewegung der Punkte B und C) visuell viel dominanter als Variation innerhalb der Situation (Bewegung von D) ist, haben sich die Schülerinnen und Schüler oft zuerst an einer Erklärung der Veränderungen unter Metavariation versucht. Oft verdeckte Metavariation die Variation innerhalb der Situation von Anfang an und die Schülerinnen und Schüler mussten von der Lehrkraft darauf hingewiesen werden, zunächst den funktionalen Zusammenhang zwischen Abstand A-D und dem Flächeninhalt zu reflektieren. Nach Abschluss der Studie wurde deswegen die Lernumgebung nochmals variiert und die folgende Aufgabe vorangestellt: *Beschreibe in eigenen Worten, welcher funktionale Zusammenhang hier dargestellt ist*. Die veränderte Lernumgebung ist als *Dreiecksfläche, Version 2* ebenfalls auf der Seite `http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp/` mit dazugehörigem Arbeitsmaterial verfügbar.

Ein paar Erklärungen, die diese ungünstigen Effekte wiederspiegeln, sind in Abbildung 5.7 zu sehen. Die Antworten dieser Schülerinnen und Schüler sind oberflächlich beschreibend im Sinne von „wenn ich hier etwas bewege, dann bewegt sich an anderer Stelle etwas mit". Es scheint so, als würden in diesem Fall nur die Objekte bewegt bzw. manipuliert, aber keine Einsichten über funktionale Abhängigkeiten erkannt werden. Tatsächlich ist es gerade bei Metavariation schwer diese funktional zu beschreiben. Metavariation bedeutet eine Variation des

3. Was geschieht bzw. ändert sich am schwarzen Punkt über C? Und warum?

Der Punkt verschiebt sich entlang des Graph und verändert gleichzeitig dessen Form. Dabei ändert sich Punkt „C" und die ∢ α und β, was die Änderung des Graphen bedingt.

2. Warum hat der Graph diese Gestalt?

Weil er in Abhängigkeit zu dem Flächeninhalt des Dreiecks steht. Würde man die Punkte C oder D verschieben so würde sich auch der Graph verändern.

3. Was geschieht bzw. ändert sich am schwarzen Punkt über C?

Ab dem Punkt über C fällt die Steigung ab.

Abbildung 5.7: Dreiecksfläche: Auswirkungen von Metavariation.

Inputs in den Integraloperator, also jenes Operators, welcher der Situation des Dreiecks den Flächeninhaltsgraphen zuordnet.

Im Verlaufe des Einsatzes der Lernumgebung wurden deswegen diversen Schülerpaaren bei der Arbeit am Computer verschiedene Impulse gegeben, sobald auffiel, dass hier Probleme auftraten. Diese bestanden in Bemerkungen wie: *Beschreibe den funktionalen Zusammenhang in eigenen Worten!* oder *Ihr sagt, der Graph muss monoton wachsend sein, dann könnte er aber auch eine Gerade sein, oder?* und sollten dazu führen, dass die Beschreibungen nicht an der Oberfläche bleiben.

5.2.3 „Die Reise" und das dynamische Erleben der Zeitvariable

In Abschnitt 1.2.1.2 wurden typische Fehler von Schülerinnen und Schülern im Zusammhang mit der Interpretation von Weg-Zeit-Graphen dargestellt. Beispielsweise tritt häufig der Graph-als-Bild Fehler auf, was sich darin äußert, dass Weg-Zeit-Graphen als direkte Bewegung in der Ebene interpretiert werden. Dabei wird nicht erkannt, dass der zurückgelegte Weg von der verstrichenen Zeit abhängt. Mit anderen Worten fehlt bzw. wird eine korrekte dynamische Vorstellung des Zusammenhanges zwischen Weg und Zeit nicht aktiviert.

Die folgenden Transkriptauszüge sind Beispiele dafür, wie Schülerinnen und Schüler bei der Nutzung von Applikation eins in der Lernumgebung „Die Reise“(Abbildung 3.1 links) eine Änderungssicht aktivieren, indem sie die Zeitvariable dynamisch erleben.

S1: Das ist Play *(zeigt auf Monitor, S2 startet die Animation durch Drücken der Playtaste und stoppt kurz vor B)* Aha. Ok, also wir brauchen nach *(wendet sich zum AB, 3 sek)* nach ca. einer Stunde ist er zwischen B und C. Lass mal eine Stunde durchlaufen.
S2: *(startet Animation)* Ah! *(stoppt Animation bei C)*
S1: Na, ok, jetzt ist er bei C.
S2: Also kurz <u>nach</u> einer Stunde.
S1: Musste gucken. Wenn er da bei C ist, dann können wir das Auto ( )
S2: *(bewegt Fähnchen C auf die entsprechende Position)* ( ) Ach so, der bewegt sich auch, das habe ich noch gar nicht gesehen (.) Ok. Jetzt gucken wir, wann er bei D ist, ja? *(startet Animation)*
S1: Bei B. Stopp!
S2: *(S2 will stoppen, startet aber aus Versehen die Animation von vorne)* Ah! Ich muss auf Stopp drücken *(stoppt Auto kurz vor B)*
S1: Nee ( ) noch weiter. *(S2 startet Animation von vorne)* Ich sage stopp. Stopp! *(S2 stoppt bei B)*
S2: Da (haben wir) aber jetzt C.
S1: Na, da ist aber B auch. (..)
S2: Ach so, stimmt, da macht er wahrscheinlich eine Pause. *(steckt Fähnchen B zu Fähnchen C)* Aber schau mal, da ist er nach 50 Minuten und äh *(weist mit Maus auf Position B/C in der Landkarte)*
S1: *(wendet sich gemeinsam mit S1 nach hinten)* Der macht dann Pause. *(beide wenden sich wieder nach vorne)*

Abbildung 5.8: Die Reise, Gymnasium 2, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

Der Transkriptauszug in Abbildung 5.8 zeigt die Arbeit zweier Schülerinnen an der Aufgabe: *Markiere die Stationen A bis F der Fahrt auf der Landkarte.* Dazu nutzen sie nicht den Zugmodus, sondern die Animation und stoppen diese an bestimmten Stellen. Das Transkript beginnt mit der Benutzung der Playtaste und der Behauptung, dass das Auto nach einer Stunde zwischen B und C sei (1-3). In (5/6) äußern die Schülerinnen, dass das Auto folgemässig kurz *nach* einer Stunde bei C sein müsste. Sie erkennen demnach die Pause nicht und machen spontan zunächst einen Graph-als-Bild Fehler. Ab (8) suchen sie die genaue Position von B und C, indem sie versuchen die Animation jeweils an diesen Punkten zu stoppen. Da die Pause sehr kurz ist, muss man bei dieser Vorgehensweise sehr schnell reagieren, da sonst das Auto schon über die Pause hinweg geht. Dies gelingt ihnen, und sie erkennen, dass B und C an derselben Stelle liegen (14/15). Schließlich formuliert S2, dass dort vermutlich eine Pause vorliegt (16) und S1 wiederholt dies bestätigend.

Hier scheint die Animation den dynamischen Aspekt direkt erlebbar zu machen, so dass die Schülerinnen ihre erste falsche Aussage selbständig revidieren. Der nächste Transkriptauszug in Abbildung 5.9 bestätigt diese Beobachtung.

Dieser Transkriptauszug ist von besonderem Interesse, weil die beiden Schülerinnen in Ma-

S2:	*(bewegt den blauen Punkt zwischen B und C)* Was passiert zwischen Punkt B und C?
S1:	Ich weiß es auch nicht.
S2:	*(bewegt den blauen Punkt zwischen B und C hin und her)* Der bleibt doch da irgendwie, oder?
	(bewegt den blauen Punkt zwischen B und C hin und her)
S1:	Vielleicht-
S2:	Macht der eine Pause, oder so? *(lächelt)*
S1:	Nee, warte mal, wie viele Minuten vergeudet er denn?
S2:	*(schiebt den blauen Punkt auf D)* Ach so, guck mal, dann ist ja, dann sind die beide auf einem
	Punkt *(schiebt Fähnchen C auf Fähnchen B)*
S1:	Nein.
S2:	Weil guck doch mal. Die sind doch, guck mal *(schiebt den blauen Punkt zwischen B und C hin und*
	her) der ist doch immer auf der gleichen Stelle.
S1:	Ja, er bewegt sich nicht ( )
S2:	[Aber die Zeit verändert sich nur
S1:	Ach so.

Abbildung 5.9: Die Reise, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 4er-5er-Bereich.

thematik eher schwach sind und von sich aus weniger Mut und Motivation zur Untersuchung der Lernumgebungen und Applikationen hatten. Dies äußerte sich oft darin, dass sie schnell aufgaben, wenn sie eine Antwort nicht sofort geben konnten. Gerade bei dieser Lernumgebung blieben sie aber lange Phasen bei der Sache, wie auch im nächsten Abschnitt 5.2.4 zu sehen ist.

Der Szene in Abbildung 5.9 ging voraus, dass die Schülerinnen mit den Fähnchen die Stationen A-F auf der Landkarte markierten. Dabei machten sie einen Graph-als-Bild Fehler, indem sie B und C an verschiedene Stellen steckten. Im vorliegenden Ausschnitt suchen sie eine Antwort auf die Frage *Was passiert zwischen B und C?* Dazu nutzen sie Variation innerhalb der Situation, indem sie den Punkt auf dem Graphen verschieben. Es beginnt damit, dass S2 den Punkt auf dem Graphen zwischen B und C hin und her schiebt und die Aufgabenstellung vorliest (1). S1 weiß zunächst keinen Rat (2). Erst als S2 den Punkt weiterhin bewegt und sagt *Der bleibt da irgendwie, oder?* und später *Macht der eine Pause, oder so?* (6), steigt S1 in die Diskussion mit ein: *Nee, warte mal, wie viele Minuten vergeudet er denn?* (7). In (8/9) korrigiert S2 die Position der Fähnchen und schiebt beide auf dieselbe Stelle, womit S1 zunächst nicht einverstanden ist (10). Dann erklärt S2 nochmals, dass das Auto sich nicht bewegt (11/12) und fordert dazu auf, *einfach hinzusehen*. S1 bestätigt diese Beobachtung (13) und sagt *Ja, er bewegt sich nicht*, woraufhin S2 erwidert: *Aber die Zeit verändert sich nur* (15).

In dieser Szene formulieren die beiden Schülerinnen am Ende ganz klar, welches die abhängige und welches die unabhängige Größe ist. Diese Formulierung basiert auf einer dynamischen Sicht des funktionalen Zusammenhangs zwischen Weg und Zeit, welche sie durch Nutzung von Variation in der Situation erlangen. Während die beiden beim ersten Stecken der Fähnchen im Vorfeld noch den Graph-als-Bild Fehler gemacht haben, sind sie nun durch eine inhaltliche Überlegung (*Was passiert zwischen B und C?*) verbunden mit dem direkten Erleben der Dynamik in der Lage diesen Fehler zu revidieren.

Man kann an dieser Stelle durchaus kritisch anmerken, dass die Schülerinnen den Graph-als-Bild Fehler zu Beginn der Transkripte möglicherweise deswegen machen, da sie die Situation und den Weg-Zeit-Graphen als Gesamtheit gegeben haben und hier lediglich „nachvollziehen“ müssen, was passiert. Deswegen stecken sie eventuell zunächst rein mechanisch die Fähnchen ohne weiter darüber nachzudenken. Eine konstruktive Annäherung – zum Beispiel durch das Sammeln von Daten – wäre vielleicht einsichtiger. Diese Annäherung hätte dann aber wieder den Nachteil der fehlenden Dynamik. Die Entscheidung, den funktionalen Zusammenhang im dynamischen Repräsentationstransfer auf einmal zu präsentieren, ist bewusst: Schülerinnen und Schüler haben bis Ende der 10. Klasse schon mannigfache Erfahrungen mit Funktionsgraphen auf konstruktive Art und Weise durch das Sammeln und Abtragen von Daten gemacht. Der Fokus der Lernumgebung liegt auf der Interpretation von Graphen mit Betonung des dynamischen Aspektes, weswegen der erste Modellierungsschritt gegeben ist.

Bemerkenswert ist hier aber auch, dass gerade ein sehr schwaches Schülerinnenpaar selbständig immer mehr Impulse durch Nutzung der Applikation aufnimmt, die letztlich zu einer tragfähigen Formulierung des funktionalen Zusammenhangs führen. Diese Formulierung stellt sich später als brüchig heraus, da sie sich noch nicht gefestigt hat (dies kann man beispielsweise in den Transkripten in Anhang D verfolgen). An dieser Stelle könnte und müsste man im Unterricht ansetzen und dies aufgreifen – gerade wenn man die Entwicklung und Formulierung dieser Vorstellung im Sinne eines Conceptual-Change Ansatzes sieht, der graduell vonstatten geht.

5.2.4 „Die Reise“ und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In Kapitel 3, Abschnitt 3.2 wurde erörtert, dass der zweite Teil der Lernumgebung *Die Reise* der Erkundung einer idealisierten Darstellung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung dient. Dabei liegt die Applikation aus Abbildung 3.1 (rechts) zugrunde. Die folgenden beiden Transkriptauszüge zeigen, dass solch eine Erkundung selbst für schwächere Schülerinnen und Schüler möglich ist.

Bei dem Ausschnitt in Abbildung 5.10 behandeln die Schülerinnen die Aufgabe: *Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? Wie liest man das ab? Kann man dies auch nur mithilfe des Weg-Zeit-Graphen erkennen?*

Das Transkript beginnt damit, dass S2 auf dem Bildschirm auf den Abschnitt mit der höchsten Geschwindigkeit zeigt (103). S1 bezieht dies dann auf den Weg-Zeit-Graphen und charakterisiert den Abschnitt mit der höchsten Geschwindigkeit qualitativ als den Abschnitt mit dem größten Anstieg im Weg-Zeit-Graphen (104). Dann kontrollieren die Schülerinnen nochmals alle anderen Abschnitte im Vergleich zum Abschnitt E-F, um sicher zu gehen (106-111). Beim Vergleich des Abschnitts D-E mit E-F merken sie an, dass bei E-F eine *viel längere Strecke in viel kürzerer Zeit* vorhanden sei (112/113). Sie halten schließlich ihr richtiges Ergebnis fest und begründen dies mit dem Argument, dass zwischen E und F ein *größerer Weg bei kleinerer Zeit* zurückgelegt wird.

S2: Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? (.) Da, oder? *(zeigt auf Monitor)*
S1: Naja, wenn der Anstieg am größten ist *(fährt mit Maus den Abschnitt EF im st-Graph ab)*
S2: Stimmt, also *(will schreiben)* (.) Wann ist die Geschwindigkeit am größten? Von E zu F?
S1: Und das sieht man ja. Guck mal hier. A und B geht nicht *(fährt mit Maus den Abschnitt AB im st-Graph ab)*, also A und B-
S2: Ja, weiß ich doch.
S1: C und D ist aber wieder kleiner *(fährt mit Maus den Abschnitt CD im st-Graph ab)*, bei B und C ist ja gar nicht, bewegt sich das Auto nicht *(fährt Abschnitt BC ab)*, bei D und E kann man nicht genau *(Maus auf Abschnitt DE im st-Graph)*-
S2: Die Strecke ist auch viel länger, oder? (..) Das ist doch eine viel längere Strecke in viel kürzerer Zeit *(zeigt auf Monitor)*
S1: *(gähnt)* Ach, schreib auf.
S2: Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? E zu F. *(schreibt)* Wie liest man das ab?
S1: Die Steigung der Gerade ist am höchsten.
S2: *(schreibend)* Steigung der Geraden ist am größten. (.) Ähm, größerer Weg bei kleinerer Zeit, oder?
S1: Längerer Weg (..) in kurzer Zeit. *(S2 schreibt)*

Abbildung 5.10: Die Reise, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 4er-5er-Bereich.

Zu Beginn verbinden die beiden Schülerinnen den Begriff „Anstieg im Weg-Zeit-Graph“ mit dem Begriff „Geschwindigkeit“. Damit beschreiben sie im Prinzip die eine Richtung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung qualitativ: Die Steigung im Bestandsgraph (Weg-Zeit-Graph) führt auf den Änderungsgraphen (Geschwindigkeit-Zeit-Graph). Obwohl diese Schülerinnen eher unmotiviert sind, was Mathematik anbelangt (das zeigte sich im Laufe der Transkripte immer wieder durch diverse ablehnende Bemerkungen, was das Fach anbelangt), überprüfen sie ihre Aussage durch Vergleich mit den anderen Abschnitten der Fahrt. Dabei gelangen sie zu der Formulierung, dass zwischen E und F eine *viel längere Strecke in viel kürzerer Zeit* zurückgelegt wird. An dieser Stelle lässt sich vermuten, dass bei dieser Formulierung ein Graph-als-Bild Fehler zugrunde liegt und sie mit *längere Strecke* tatsächlich die Kurvenlänge des Streckenabschnitts des Weg-Zeit-Graphen meinen. Diese Fehlvorstellung wird eventuell dadurch gefördert, dass die Punkte A-F, welche die Stationen der Fahrt markieren, auf dem Weg-Zeit-Graphen liegen. Alternativ könnte man die Punkte auf die y-Achse setzen, hätte dann aber das Problem, dass sie nicht die Stationen der Fahrt markieren, da ihnen die Zeitkomponente fehlt. Jede Station zeichnet sich ja durch eine Weg- und eine Zeit-Komponente aus. An dieser Stelle muss man als Lehrperson also wachsam sein und diese Überlegungen produktiv in den Unterricht einbauen. Eine passende Aufgabe bezüglich des Graph-als-Bild Fehlers der beiden Schülerinnen könnte in etwa so wie in Abbildung 5.11 aussehen.

Der Transkriptauszug in Abbildung 5.12 zeigt eine Szene derselben Schülerinnen zur Aufgabe: *Kann man mit dem Geschwindigkeit-Zeit-Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist? Wenn ja, wie müsste man vorgehen?*

Beide Schülerinnen vermuten sofort, dass dies möglich ist (139). Bei ihren Überlegungen nutzen sie aber nicht die Applikation, sondern greifen auf eine Formel der Art „$\frac{\text{km}}{\text{h}} =$ Geschwindigkeit“ zurück. Diese stellen sie nach „km“ um. Tatsächlich benötigen sie einige

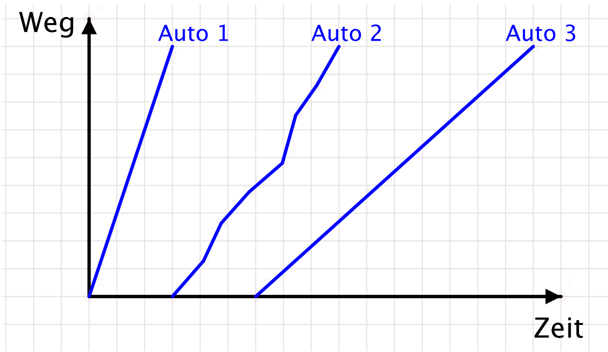


Abbildung 5.11: Aufgabe: In diesem Koordinatensystem siehst Du die Weg-Zeit-Graphen dreier verschiedener Autos wiedergegeben, die zu verschiedenen Zeitpunkten starten. Vergleiche die Fahrten anhand des Graphen und entscheide, welches Auto schneller/langsamer bzw. welches Auto weiter/weniger weit gefahren ist.

Zeit, um diese Umstellung „im Kopf“ durchzuführen (151). Dann wenden sie sich wieder der Aufgabe zu und überlegen, welche Zahlen denn nun in die umgestellte Formel einzusetzen sind: *was für ne Kilometer pro Stunde-Anzahl wollen wir denn nehmen?* (154/155). S2 schlägt vor die konkrete Rechnung nur für einen einzelnen Abschnitt des Graphen durchzuführen und sie entscheiden sich für den ersten Abschnitt von A nach B (156-160). S1 ist nicht ganz zufrieden, da die Aufgabe lautet, man solle die Gesamtstrecke herausfinden und nicht nur einen Streckenabschnitt (163-166). Im weiteren Verlauf testen sie ihr Vorgehen am Abschnitt A-B und fahren mit der Maus die Daten ab, die sie dafür benoẗigen (60 km/h-Balken und verstrichene Zeit auf der x-Achse) (176-180). Sie errechnen dann 48 km als zurückgelegte Wegstrecke zwischen A-B und überprüfen und bestätigen dies anhand des Weg-Zeit-Graphen (190-192). Am Ende fomulieren sie korrekt, wie man theoretisch die Gesamtwegstrecke errechnen könnte: Indem man dieses Vorgehen auf jeden Abschnitt anwendet und die Ergebnisse addiert.

Im Sinne eines Conceptual-Change-Ansatzes ist es interessant, dass die Schülerinnen zu Beginn lieber ihr Wissen um Formeln aktivieren, als anhand der Graphen Überlegungen anzustellen. Im Unterrichtsgespräch wäre es an dieser Stelle wichtig zu erfragen, welche Lösungswege die Schülerinnen und Schüler genommen haben, welche Vor- und Nachteile diese haben, und die verschiedenen Wege miteinander zu vernetzen. Bemerkenswert an der Szene ist das exemplarische Berechnen eines Streckenabschnitts und die Verallgemeinerung des Vorgehens für das Herausfinden der Gesamtstrecke, ohne diese konkret zu berechnen (was auch nicht verlangt war). Bei der Berechnung der Wegstrecke von A nach B wird dies mithilfe des Weg-Zeit-Graphen kontrolliert. Sie beziehen die beiden Graphen also aufeinander und nutzen die simultane Visualisierung von Bestand- und Änderungsgraph zur Bestätigung ihres Vorgehens. Letztendlich formulieren sie intuitiv das Konzept von Integration. Ihre Formulierungen sind darüber hinaus inhaltlich-qualitativ mit den Begriffen von Weg-Zeit und Geschwindigkeit-Zeit

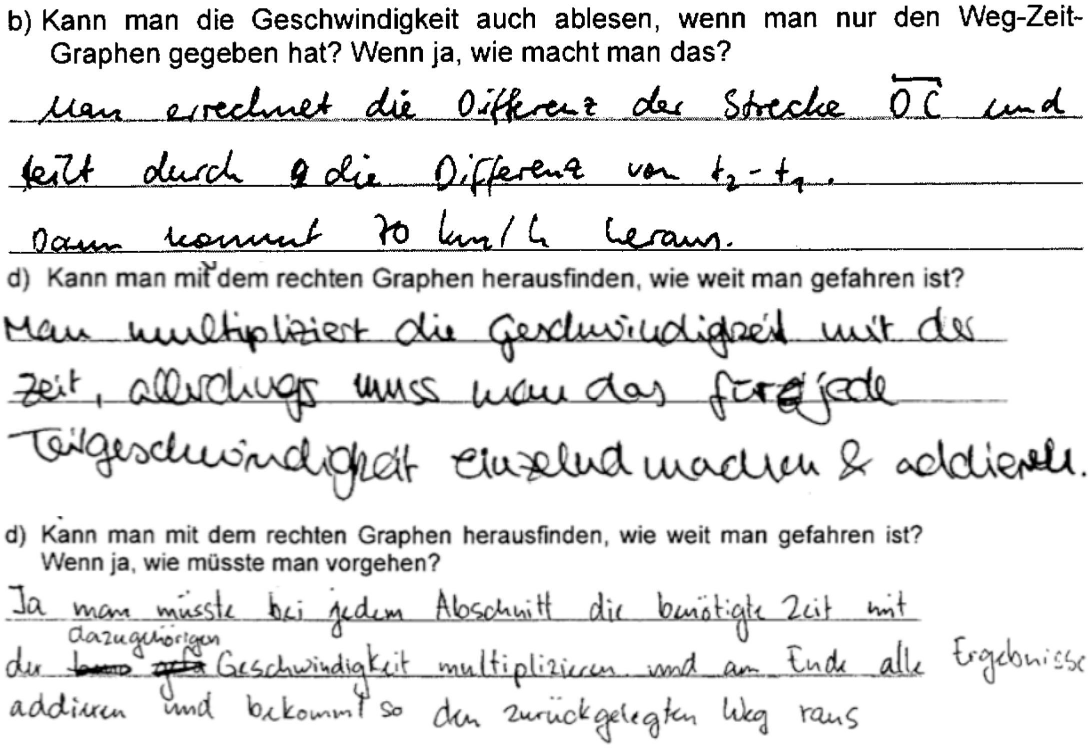
139	S2:	Natürlich *(zeigt auf Monitor)* Da muss man doch nur umstellen (..) Das.
140	S1:	Naja. Die Kilometer pro Stunde (.) Wie rechnet man nochmal das andere aus? (.) Kilometer <u>durch</u>
141		Stunde.
142	S2:	Mhm.
143	S1:	Warte, dann heißt das also (..) ähm Kilometer durch Stunde (.) Gott, muss ich mal gerade
144		überlegen. Das ist ja das Ergebnis *(4 sek)* Moment (.) Genau, Kilometer pro Stunde mal die
145		Stunde.
		[...]
151	S2:	Ja, ist doch, also Kilometer pro Stunde mal Stunde.
		[...]
154	S1:	[die höchste- ja, aber wie denn, was für ´ne Kilometer
155		pro Stunde-Anzahl wollen wir denn nehmen?
156	S2:	Ja, wollen wir ein Beispiel nehmen?
157	S1:	Ja, aber wir sollen ja-
158	S2:	Nimm mal eine Strecke, irgend eine. (..)
159	S1:	Hmm, warte mal *(Maus auf Balken eins im vt-Graph)* 60 (.)
160	S2:	Na, von A zu B nehmen wir jetzt mal, ja?
		[...]
163	S1:	[Aber wir können es doch gar nicht wissen. (.) Wir können es nicht so machen,
164		weil wir wollen ja die Gesamtstrecke wissen *(Mauszeiger auf F in st-Graph)*, wie weit wir
165		gefahren sind, also von A nach *(weist mit Maus von A nach F im st-Graph)* F. Also müssen wir
166		alles eigentlich wissen. *(weist mit Maus auf die Balken im vt-Graph)*
		[...]
174	S2:	[Ok, jetzt machen wir erstmal A zu
175		B. Was ist das jetzt? Also, die Kilometer pro Stunde-
176	S1:	[60 Kilometer *(Mauszeiger auf Balken 60 km/h)* und zwar
177		innerhalb von *(Mauszeiger auf x-Achse)* eins Komma (.) nee null Komma (.) ich sag dir gleich die
178		Stundenanzahl *(beugt sich zum Monitor nach vorne)*
179	S2:	acht?
180	S1:	Null Komma (.) acht, genau.
190	S1:	Macht 60 mal 0,8 *(benutzt Taschenrechner)* (.) 48 (.) 48 Kilometer ist man gefahren.
191	S2:	Ist man? *(sieht auf Monitor)* (.) Ja.
192	S1:	[Ja.
193	S2:	Naja, und das muss man jetzt (.) und dann muss man es für jede Strecke ausrechnen und die
194	S1:	[für jede Strecke machen
194	S2:	ganzen Strecken dann zusammen rechnen.

Abbildung 5.12: Die Reise, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 4er-5er-Bereich.

verbunden. Die hier entwickelten Vorstellungen lassen sich im Unterricht wunderbar aufgreifen, wenn es um die Idee des Riemann-Integrals geht. Eine Möglichkeit der Fortsetzung wird in Abschnitt 6.3 besprochen.

In Abbildung 5.13 sind Antworten von Schülerinnen und Schülern auf den Arbeitsbögen zu sehen, die zeigen, wie der Zusammenhang zwischen Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Graph und damit letztendlich die Grundidee des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf intuitive Art und Weise beschrieben wurde.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass es eventuell zu lapidar ist zu sagen, die Schülerinnen und Schüler hätten den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung entdeckt. Genauer ist damit gemeint, dass auf qualitativ-intuitiver Basis entdeckt wurde, dass Differentiation und Inte-


b) Kann man die Geschwindigkeit auch ablesen, wenn man nur den Weg-Zeit-Graphen gegeben hat? Wenn ja, wie macht man das?

Man errechnet die Differenz der Strecke $\overline{OC}$ und teilt durch ~~a~~ die Differenz von $t_2 - t_1$. Dann kommt 70 km/h heraus.

d) Kann man mit dem rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist?

Man multipliziert die Geschwindigkeit mit der Zeit, allerdings muss man das für jede Teilgeschwindigkeit einzeln machen & addieren.

d) Kann man mit dem rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist? Wenn ja, wie müsste man vorgehen?

Ja man müsste bei jedem Abschnitt die benötigte Zeit mit der dazugehörigen Geschwindigkeit multiplizieren und am Ende alle Ergebnisse addieren und bekommt so den zurückgelegten Weg raus

Abbildung 5.13: Antworten auf dem Arbeitsbogen zum Zusammenhang zwischen Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Graph in der Lernumgebung *Die Reise*.

gration inverse Prozesse sind, indem der Zusammenhang zwischen Bestands- und Änderungsgraph in beide Richtungen entdeckt wurde. Ein Aufgreifen dieser Entdeckung kann im weiteren Unterrichtsverlauf sehr lohnend sein, denn wie schon in Kapitel 1, Abschnitt 1.2.2.4 dargestellt wurde, betrachten Schülerinnen und Schüler Differentiation und Integration oft als komplett verschiedene Prozeduren ohne Zusammenhang, für welche jeweils ein spezielles Kalkül beherrscht werden müsse.

5.2.5 „Die Reise" und Metavariation

Bei der Lernumgebung *Die Reise* war die Möglichkeit der Metavariation erst in Aufgabenteil drei (Abbildung 3.2) gegeben. Es zeigte sich, dass es durch diese Trennung in Applikationen *ohne* Metavariation und Applikation *mit* Metavariation leichter war, dies für die Schülerinnen und Schüler zu erfassen und zu beschreiben als bei den anderen Lernumgebungen. Erleichtert wurde die Beschreibung aber auch dadurch, dass Begriffe wie „Weg" und „Geschwindigkeit" zur Verfügung standen und die Graphen durch ihre Idealisierung leichter zu erfassen waren.

Das Transkript aus Abbildung 5.14 zeigt einen Ausschnitt aus der Bearbeitung der Aufgabe: *Beschreibe, wie sich der Weg-Zeit-Graph verändert, wenn man die Balken im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen ändert.* Bei dieser Szene diskutieren die Schülerinnen, wie sich das Verändern der Balkenbreite auf den Weg-Zeit-Graphen auswirkt. Die Auswirkung der Veränderung der Balkenhöhe haben beide schon zu einem früheren Zeitpunkt beschrieben durch: *Wenn man den Balken nach oben verschiebt, wird der Weg-Zeit-Graph steiler und das Auto fährt schneller und umgekehrt.* Die Antwort der Schülerinnen ist auch in Abbildung 5.15 zu sehen. Schon bei dieser Antwort wird deutlich, dass die Schülerinnen den Zusammenhang zwischen Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Graph qualitativ beschreiben, indem sie erkennen, dass die Steigung im Weg-Zeit-Graphen der Geschwindigkeit entspricht. Sie verbinden dies zusätzlich mit der Situation (*Auto fährt schneller*), haben also außer der Verbindung zwischen Bestand und Änderung auch eine inhaltliche Perspektive.

Da die beiden Schülerinnen zunächst nicht in der Lage waren eine geeignete Beschreibung für das Verändern der Balkenbreite zu finden, haben sie dies auf einen späteren Zeitpunkt verlegt und gehen diese Aufgaben in der folgenden Szene an.

S1: Die Steigung des Graphen verändert sich.
S2: Ne, die Steigung des Graphen verändert sich nicht. Wenn ich das hier mache *(verbreitert Balken eins maximal)* Bleibt einfach die ganze Zeit konstant.
S1: Nee, aber wenn ich das hier hoch und runter mache.
S2: Ach so. Ja, dann ja. *(verschiebt den Balken vertikal hoch und runter)*
S1: Die Steigung des Graphen verändert sich und
S2: *(schaut auf den AB)* ( ) *(liest)* Wenn man den Balken nach oben verschiebt wird der äh Weg-Zeit Graph steiler und äh dann (.) das fährt
[...]
S2: *(liest weiter)* fährt schneller und umgekehrt. (.) Ähm (.) Wenn man den Balken nach rechts verlängert, dann bleibt die Geschwindigkeit über den ganzen Weg lang gleich. *(liest weiter)* Die Steigung des Graphen verändert sich *(S2 schaut auf)*
S1: (Das mit der Steigung hab ich eigentlich schon da oben)
S2: Ja, aber die Steigung verändert sich nicht. Guck mal *(klickt auf den maximal verbreiterten Balken)* sagen wir jetzt mal, hier (..) hier *(verkürzt und verlängert Balken eins)* dadurch verändert sich die Steigung doch nicht äh in dem (.) das grenzt ja nur den Abschnitt ab.
S1: *(benutzt Tippex und entfernt die Stelle ‚Die Steigung des Graphen verändert sich' aus dem Antwortsatz)*

Abbildung 5.14: Die Reise, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

In der Szene versucht S1 eine schriftreife Formulierung für den Arbeitsbogen zu finden, welche die Veränderung der Balkenbreite beschreibt. S2 bedient die Maus und liest dabei mit, was S1 schreibt. Dabei scheint es zunächst so, als würde S1 denken, dass sich die Steigung ändert (166). S2 widerspricht dem. Sie verbreitert einen der Balken maximal, so dass nur noch ein einziger Balken zu sehen ist. Damit wird visuell deutlich, dass sich die Steigung unter der vorgenommenen Variation nicht ändert (166/167). In (169-174) formuliert S1 weiter. S2 liest die Formulierung von S1 laut vor: *Wenn man den Balken nach rechts verlängert, dann bleibt die Geschwindigkeit über den ganzen Weg lang gleich* und weiter *Die Steigung des Graphen* *verändert sich* (175-177). Mit diesem Satz ist S2 nicht einverstanden und zeigt S1 nochmals auf dem Bildschirm, dass die Steigung beim Ändern der Balkenbreite gleich bleibt und dass durch die Balkenbreite lediglich *der Abschnitt abgegrenzt wird* (181). Daraufhin korrigiert S1 die Antwort auf dem Arbeitsbogen durch Einsatz von Tipp-Ex (siehe Abbildung 5.15) und ergänzt stattdessen den Satz: *Je nach dem wie lang der Balken ist, desto länger ist der jeweilige Abschnitt.*

Tatsächlich haben auch einige andere Schülerinnen und Schüler denselben Fehler wie S1 gemacht, indem sie formuliert haben, dass „die Steigung sich bei Ändern der Balkenbreite ebenso verändert". Die Möglichkeit den Balken unter Metavariation maximal zu verlängern und sich dadurch lediglich einen einzelnen Abschnitt anzusehen, führte durch visuelle Unterstützung zu einer korrekten Antwort. Man könnte hier sogar vermuten, dass durch Metavariation ein abschnittweises Lesen der Graphen gefördert wird – eine Fähigkeit die, wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.2.1.2 beschrieben, oft Schwierigkeiten bereitet, aber für die Beschreibung von Änderungsverhalten von enormer Wichtigkeit ist. Bemerkenswert ist, dass zunächst nur Schülerin S2, die Metavariation enaktiv-virtuell erlebt hat, zu einer korrekten Äußerung kommt.

Unklar bleibt, ob den Schülerinnen nicht doch implizit ein Graph-als-Bild Fehler unterläuft, wenn sie von der Verlängerung des „Abschnitts" sprechen. Es könnte sein, dass sie dabei implizit die (Kurven-)Länge des Weg-Zeit-Graphen mit der Länge der Wegstrecke in Verbindung bringen. Damit würden sie einen ähnlichen Fehler machen, wie die Schülerinnen im vorigen Abschnitt 5.2.4. Es zeigt sich, dass man als didaktisch-handelnde Lehrkraft an dieser Stelle sehr aufmerksam sein muss.

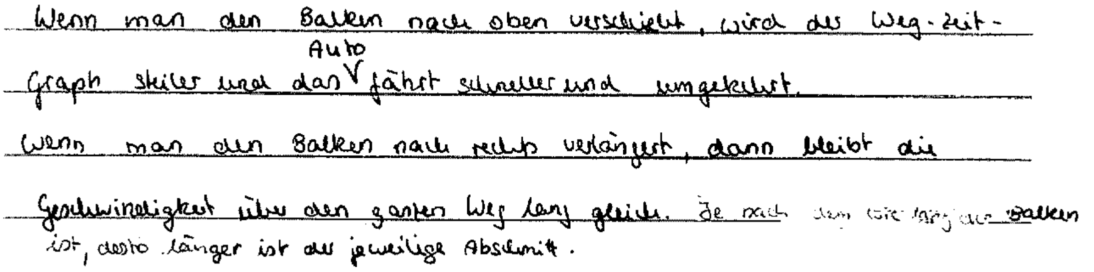

Wenn man den Balken nach oben verschiebt, wird der Weg-Zeit-Graph steiler und das Auto fährt schneller und umgekehrt.
Wenn man den Balken nach rechts verlängert, dann bleibt die Geschwindigkeit über den ganzen Weg lang gleich. Je nach dem wie lang der Balken ist, desto länger ist der jeweilige Abschnitt.

Abbildung 5.15: Antwort der beiden Schülerinnen aus Abbildung 5.14 zur Aufgabe: *Beschreibe, wie sich der Weg-Zeit-Graph verändert, wenn man die Balken im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen ändert.*

5.2.6 „Einbeschriebene Rechtecke" und dreistufiges Arbeiten

In Kapitel 3 wurde der Aufbau des ersten Teils der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* dargestellt. Die folgenden Transkriptauszüge beziehen sich auf die Arbeit mit der ersten Applikation. In Abbildung 3.3 sind drei mögliche Konstellationen innerhalb dieser Applikation dargestellt: Zunächst liegt Punkt P außerhalb von BC (1. Konstellation), schiebt man P auf BC erscheint ein einbeschriebenes Rechteck (2. Konstellation), und durch Fixierung von P auf BC kann P nur noch auf der Strecke BC bewegt werden. Durch Nutzung des Hinweis-Buttons lassen sich zusätzlich die Koordinaten von P und die Werte des dazugehörigen Flächeninhalts einblenden (3. Konstellation).

Der Transkriptauszug in Abbildung 5.17 zeigt, wie die beiden eher schwachen Mathematikschülerinnen mit dieser Applikation arbeiten. In der ausgewählten Szene bearbeiten sie die Frage: *Welche Werte kann der Flächeninhalt annehmen? Auch 100?*

20	S2:	*(bewegt P auf BC)* Woher sollen wir das denn wissen?
21	S1:	Naja, zehn mal zehn würde es dann gehen. Aber dann müsste das (.) das geht gar nicht (.) *(S2*
22		*versucht P in Richtung (10|10) zu bewegen)* In dem Fall nicht *(liest)* Welche Werte kann der
23		Flächeninhalt annehmen? *(auf Monitor blickend, wo S2 den Punkt P in der Gegend von P.x=5)*
24		Na, der höchste ist (..)
25	S2:	Bei der Hälfte, oder?
26	S1:	[Ich muss ja immer das mal das rechnen, oder? *(zeigt auf Monitor)*
27	S2:	Ist der höchste nicht bei der Hälfte irgendwie? *(bewegt P um die Mitte hin und her und entfernt*
28		*sich dabei ein wenig weiter von der Mitte)*
29	S1:	Zeig mal einfach irgendwelche. *(S2 stellt (2|12) ein, rastet ein)* Ganz oben, zwölf und (.) zwei.
		[...]
31	S1:	Zwölf mal zwei macht vierundzwanzig. *(S2 schiebt P auf P(9|1,5))* Neun mal eins Komma fünf (.)
32		macht (.) vier Komma fünf (.) Nee
		[...]
35	S2:	*(stellt P(6|6) ein)* Sechs mal sechs macht sechsunddreißig. *(schiebt P weiter)*
36	S1:	Ich glaube der höchste ist vierundzwanzig.
37	S2:	Geht doch nicht. Sechs mal sechs ist sechsunddreißig. *(stellt P(6|6) ein)* Guck mal. *(S1 schaut auf*
38		*den Monitor)*
39	J:	Ihr könnt das doch unten einstellen, um das zu sehen.
40	S1:	Wo? (.) Ach, Hinweis einblenden, oder? *(blendet Hinweis ein)*
41	J:	Dann könnt ihr unten den Flächeninhalt ablesen.
		[...]
44	S2:	*(P bewegend)* Siebenunddreißig *(bewegt P langsam von B ausgehend in Richtung P.x=5)*
45	S1:	Ja, bei der Hälfte.
46	S2:	Das geht bis siebenunddreißig Komma (.) *(versucht P auf genau P.x=5 zu stellen und trifft*
47		*schließlich genau den Punkt P(5|7,5))* Bis siebenunddreißig Komma fünf.

Abbildung 5.16: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 4er-5er-Bereich.

Das Transkript beginnt, nachdem S2 die Aufgabenstellung laut vorgelesen hat. S2 bewegt zunächst P auf BC, so dass ein einbeschriebenes Rechteck erscheint und sagt – scheinbar resignierend – *Woher sollen wir denn das wissen?* (20). S1 bemerkt, dass man *dann 10 mal 10 haben müsste*, was *aber nicht geht*. S2 versucht P in Richtung des Punktes $(10|10)$ zu verschieben, also aus der zu untersuchenden Situation herauszuschieben (21-23). Im weiteren Verlauf wollen sie herausfinden, welche Werte überhaupt angenommen werden können (Bestimmung des Wertebereichs). Dazu suchen sie zunächst den maximalen Flächeninhaltswert. S2 vermutet das Maximum in der Mitte. Sie nutzt dazu die Applikation, indem sie P um die Mitte herum verschiebt und sich einen visuellen Eindruck verschafft (22-28). S1 fordert auf „einfach mal irgendwelche Werte auszuprobieren“ und sie beginnen zunächst mit der Einstellung von ganzzahligen Werten (29-35). Dies führt zu verschiedenen Vermutungen über den Wert des Maximums. S1 erwägt zunächst den Wert 24, wird aber von S2 darauf hingewiesen, dass *6 mal 6 gleich 36* größer sei (36-38). Nach einem Hinweis von J blenden die beiden schließlich die Werte für die Koordinaten von P und den Flächeninhalt ein und kommen auf den korrekten Maximalwert 37,5. Dies bestätigt ihre Anfangsvermutung, dass das Maximum in der Mitte liegt: *Ja, bei der Hälfte* (39-47).

Die Szene zeigt, dass durch den Aufbau der Applikation ein dreistufiges Arbeiten erfolgt. Auf der *ersten Stufe* wird P in die Situation hineinbewegt, so dass ein einbeschriebenes Rechteck erscheint. Die Schülerinnen grenzen dadurch gewissermaßen die zu untersuchende Situation von der Nicht-Situation ab, indem sie feststellen, dass beispielsweise der Punkt $(10|10)$ nicht auf BC liegt. Dies konnte man auch bei anderen Schülerinnen und Schülern beobachten. Das Transkript in Abbildung 5.17 ist ein weiteres Beispiel für die Abgrenzung von „Situation versus Nicht-Situation“. Es wird nicht weiter analysiert und soll lediglich untermauern, dass das eben beschriebene Phänomen nicht nur einmal auftrat. Die Abgrenzung zwischen Situation und Nicht-Situation ist durchaus bemerkenswert, wenn man an Modellierung denkt und in gewissen Situationen entscheiden muss, welche Fälle und Werte überhaupt auftreten können und warum. Hier stellt man fest, dass die Strecke BC die Wertemenge bestimmt.

S2: *(liest)* Welche Werte kann der Flächeninhalt annehmen? Auch hundert? Nein. *(4 sek)*
S1: Aber warum?
S2: Na, weil die Werte dafür nicht gegeben sind. Weil man dann irgendwie zehn mal zehn bräuchte oder so. Und dafür das Dreieck einfach zu klein ist. (..) Oder fünfzig mal zwei. Oder fünf mal (.) fünfundzwanzig.
S1: Ja, aber guck mal. Ja, zehn mal zehn geht nicht, weil *(bewegt P auf P(10|10))*
S2: Das sind einfach (.) das Dreieck ist einfach zu klein dafür.

Abbildung 5.17: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 2, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

Die *zweite Stufe* ist davon geprägt, dass Daten gesammelt und Vermutungen über Funktionseigenschaften (zum Beispiel über die Lage des Maximums) angestellt werden. Durch Testen der Vermutungen anhand der Daten machen sich die Schülerinnen ein Bild von der vorliegenden Situation. In einer *dritten Stufe* wird der Hinweis mit den Daten eingeblendet, so dass die zuvor angestellten Vermutungen geprüft, verworfen, gefestigt und begründet werden können.

Im eben beschriebenen Sinne fördert also der Aufbau der Applikation mit den drei Konstellationen mathematisches Arbeiten. Hervorzuheben ist dabei, dass dies auch bei den eher schwachen Schülerinnen zu beobachten ist. Im Transkript beginnen sie Daten zu sammeln, was durch die Aufforderung von S2 eingeleitet wird: *Zeig einfach mal irgendwelche.* (29). Das Sammeln der Daten und Ausprobieren kann ohne negative Konsequenzen bei Irrtum durchgeführt werden, so dass sich selbst schwächere Schülerinnen und Schüler an die Exploration der Situation heranwagen.

Das Transkript in Abbildung 5.18 bestätigt diese Beobachtungen und zeigt, welche weiteren Entdeckungen durch das Arbeiten mit der Applikation aus Abbildung 3.3 gemacht wurden. Die Szene bezieht sich auf die Bearbeitung der Aufgabe: *Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt des Rechtecks verändert, wenn man P auf BC von B nach C bewegt.*

S1: *(bewegt P auf P.x=9 und dann auf P.y=1 und wählt schließlich eine Position, wo P(9|1) ungefähr erreicht ist. Anmerkung: Der Punkt P(9|1) ist nicht genau zu erreichen: Entweder man stellt P(9|1,5) oder P(9,3|1) ein. Der Schüler wählt eine mittlere Position.)* So, hier ist es ungefähr (.) neun. *(Er bewegt P auf die (ungefähren) Koordinaten P(8,5|2,3))* Hier ist es ungefähr (.) achtzehn. (..) Der Flächeninhalt verdoppelt sich. *(Stellt P(8|3) ein)* Drei mal acht vierundzwanzig. *(3 sek)* Willst du das nicht aufschreiben?
S2: Was?
S1: Wie der sich verändert. *(bewegt P in Richtung C)*
S2: Ja, dann sag mir was.
S1: Ähm (.) anfänglich (.) wird er noch größer. *(bewegt P auf B und dann in Richtung C)* Der größtmögliche Flächeninhalt ist erreicht, wenn (.) ähm *(bewegt P zwischen P.x=5,5 und 6,5 und lässt ihn bei P.x=6,5 stehen)* wenn die größte-
S2: Orthogonale
S1: Nee, wenn die, wenn ‚h' gebildet wird.
[...]
S1: Na, die Orthogonale durch den Punkt A.
S2: Ja. *(beginnt zu schreiben)*
S1: *(diktierend)* Flächeninhalt (.) wächst
S2: *(schreibend)* Flächeninhalt am größten bei der Orthogonale durch A
S1: Und wächst unproportional.
S2: Dazu müsste man mal einen Graphen sehen, wa?

Abbildung 5.18: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 2, Schüler mit Noten im 1er-2er-Bereich.

Die Schüler arbeiten in der 2. Konstellation, so dass der Hinweis mit den Werten für den Flächeninhalt und die Koordinaten von P nicht eingeblendet sind. Zunächst versucht S1 den Punkt P immer um eine Einheit auf der y-Achse weiter nach oben zu verschieben. Er berechnet dann ungefähre Werte und kommt zunächst zu dem Schluss, dass sich der Flächeninhalt bei Verschieben des y-Wertes von P von 1 auf 2 verdoppelt (22-26). In (45) zeigt sich, dass er zunächst wohl vermutete, dass es sich um ein proportionales Wachstum handelt und dies anhand der Daten testet. Er verwirft dies, als er für P den y-Wert 3 einstellt und den dazugehörigen Flächeninhalt berechnet (26). In (27-30) fordert er S2 zum Mitschreiben auf. Er diktiert, dass der Flächeninhalt zunächst bis zu einem maximalen Wert wächst (31-33). Ab (34) versuchen die beiden die Lage des Maximums herauszufinden und vermuten zunächst, dass das Maximum erreicht ist, wenn P den Schnittpunkt der Höhe durch A auf die Seite BC des Dreiecks ABC erreicht (*Orthogonale*, *wenn ‚h' gebildet wird*) (34-42). Diese falsche Vermutung revidieren sie erst zu einem späteren Zeitpunkt (siehe Transkripte im Anhang D). Am Ende äußern sie, dass sie dazu „gerne mal einen Graphen sehen" würden (46).

Auch hier ist zu sehen, wie die Dreistufigkeit mathematisches Arbeiten, wie in obigem Sinne beschrieben, fördert. Durch das Sammeln von Daten verschaffen sich die Schüler einen Überblick über die Situation und stellen diverse Vermutungen über die Eigenschaften des funktionalen Zusammenhangs an. Beispielsweise finden sie korrekterweise heraus, dass es sich hierbei nicht um eine Proportionalität handeln kann. Auch wenn der Schüler fälschlicherweise die Flächeninhaltsfunktion F als von y statt von x abhängig betrachtet, ist das Vorgehen prinzipiell durchaus sinnvoll. Dies ist insofern bemerkenswert, als dass viele Schülerinnen und Schüler sehr wohl beschreiben konnten, dass der Flächeninhaltsgraph zunächst wächst und dann fällt, aber keine Aussage über die Art des Wachstum machten. Deswegen gab die Forscherin an dieser Stelle oft einen Impuls folgender Art: „Warum besteht der Graph nicht aus zwei Geraden, die sich in einem Maximum treffen?“.

Interessanterweise äußern die Schüler, dass es hilfreich wäre, hierzu den Funktionsgraphen zu sehen. Ein Funktionsgraph würde ihnen den funktionalen Zusammenhang mit den wichtigsten Eigenschaften auf einen Blick zeigen. Eigenschaften wie Symmetrie, Lage des Maximums und Nicht-Proportionalität wären direkt sichtbar als Objekteigenschaften. Somit erkennen sie den Vorteil eines Funktionsgraphen gegenüber dem Sammeln von Daten, wenn es darum geht sich einen schnellen Überblick über den funktionalen Zusammenhang zu machen.

5.2.7 „Einbeschriebene Rechtecke“ –Metavariation und prädikatives Denken

In Kapitel 3, Abschnitt 3.3 wurde begründet, dass die Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* aus kognitiver Sicht sowohl prädikatives als auch funktionales Denken im Sinne der Arbeiten von Schwank [Sch99, Sch01] erlaubt. Die folgende Analyse zeigt, inwiefern diese Denkweisen im Zusammenhang mit der Möglichkeit der Metavariation beim Einsatz im Unterricht eine Rolle gespielt hat.

Im ersten Transkriptauszug bearbeiten die Schülerinnen die Aufgabe: *Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist.*

S1 äußert, dass für diese Aufgabe gerechnet werden muss (192). S2 verweist darauf, dass die Werte doch alle eingeblendet sind, worauf S1 erwidert, dass die eingeblendeten Werte aber nicht unbedingt dem maximalen Wert entsprechen. Sie vermutet, dass der Satz von Pythagoras verwendet werden muss, um diese Aufgabe zu lösen (194-196). Mit diesem Ansatz scheitern sie aber (197-199). Deswegen versuchen sie eine Lösung mithilfe der Applikation zu finden. Dabei ist das Dreieck mit den Seitenlängen $|AB| = 8$ und $|AC| = 11$ eingestellt (der maximale Flächeninhalt beträgt in diesem Fall dementsprechend $4 \cdot 5,5 = 22$). Anstatt Metavariation zu benutzen, verschieben sie Punkt P so, dass der eingeblendete Flächeninhaltswert ca. 15 beträgt (200-203). S1 bemerkt korrekterweise, dass dies aber nicht dem maximalen Flächeninhalt entspricht (da P in diesem Falle nicht in der Mitte liegt) und S2 erkennt ihren Irrtum (204/205). S1 bleibt bei ihrem vergeblichen Versuch P zu bewegen, um die Aufgabe zu lösen (ohne die

S1: *(nimmt Maus und lässt sie wieder los)* Au, da müssen wir ja rechnen.
S2: Das steht doch da unten *(zeigt auf Monitor)*
S1: Ja, aber dann w- hab ich immer noch nicht den größten (.) weißt du, dann muss ich ja erstmal in die Mitte gehen *(weist mit Maus auf P)* (..) Wir müss- können wir mit dem Pythagoras ausrechnen. x ist gleich (..)
S2: Rechne acht mal elf *(Bemerkung: es ist B.x=8 und C.y=11 eingestellt)* (..) ach Quadrat (muss ja auch Quadrat) (..)
S1: (Wir haben) wie kann man das denn rechnen?
S2: Wir müssen doch einfach *(5 sek)* Mach doch einfach hier, ist doch scheißegal *(bewegt P)* Das steht doch da drunter *(bewegt P, so dass als Flächeninhaltswert ca. 15 erscheint)*
S1: [Stimmt (der höchste) ist drei mal fünf, drei mal fünf
S2: Das steht doch da drunter.
S1: Ja, aber dann ist es nicht der <u>maximale</u> (.) Flächeninhalt.
S2: Er soll aber *(schaut auf den AB)* ach so.
S1: *(bewegt P, und versucht die Seiten auf 3 und 5 einzustellen, was aber in der Konstellation nicht funktioniert, 6 sek)*
S2: Es geht nicht.
S1: Dann muss ich das hier verändern *(bewegt B, sie versucht nun B so zu schieben, dass der Punkt P(5|3) auf der Strecke BC liegt, dabei achtet sie nicht darauf, dass P in ihrem Fall nicht im Maximum liegt, 12 sek)*
S2: Hier (.) wie findet man diese Dreiecke *(zeigt auf AB)*
S1: *(eingestellte Konstellation: B.x=ca.7, C.y=ca.11, P(5|3))* So (.) jetzt ist trotzdem der höchste Punkt nicht <u>da</u> *(weist mit Maus auf den Scheitelpunkt der Parabel) (3 sek)*

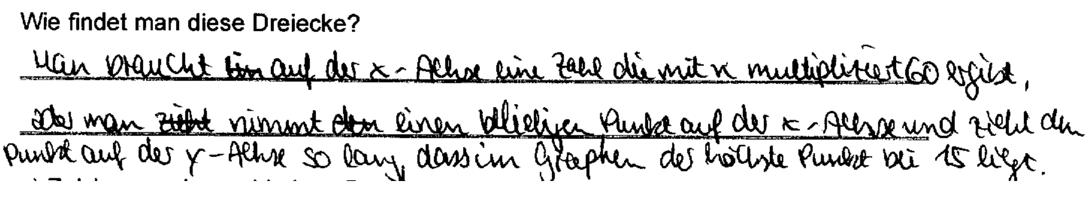
Abbildung 5.19: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 2, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

Punkte B und C zu verschieben) (206-208). Da dies nicht zum Ziel führt, verschiebt sie B, allerdings mit dem Ziel, dass P, welcher nicht in der Mitte der Strecke BC liegt, genau die Koordinaten $P(5|3)$ erhält (209-211). Schließlich erreicht sie eine Konstellation, in der P die Koordinaten $P(5|3)$ hat. Allerdings liegt P nicht in der Mitte zwischen B und C, und S1 stellt fest, dass damit zwar der Flächeninhalt 15 erreicht ist, aber dieser Wert nicht dem Maximum entspricht (213/214).

Die Schülerinnen versuchen zunächst mithilfe des Satzes von Pythagoras eine prädikative Lösung zu finden. Als ihnen dies erwartetermaßen nicht gelingt, benutzen sie die Applikation und suchen nach einer funktional-dynamischen Lösung. Tatsächlich ist Metavariation aber funktional-dynamisch schwer zu verstehen, und der Transkriptauszug bestätigt dies. Im Prinzip liegt der Metavariation eine mehrdimensionale Funktion zugrunde, die von der x-Variable von B und der y-Variable von C abhängt. Im Grunde genommen sind in der zu explorierenden Applikation drei funktionale Zusammenhänge gemeinsam dargestellt, nämlich der lineare Zusammenhang zwischen der x-Variable von P und der y-Variable von P, der quadratische Zusammenhang zwischen der x-Variable von P und dem Flächeninhalt $F(x)$ und der eben beschriebene mehrdimensionale Zusammenhang, welcher der Metavariation zugrunde liegt. Daraus resultiert die Verwirrung der beiden Schülerinnen, die nicht in der Lage sind gedanklich zwischen Variation innerhalb der Situation und Metavariation zu unterscheiden.

Um die Aufgabe zu lösen und das Vorgehen unter Metavariation zu beschreiben, ist eine prädikative Sicht hilfreicher und einfacher. Eine prädikative Lösung mit Beschreibung der Invarianten führt letztlich zu einer Objektsicht des funktionalen Zusammenhangs (siehe unten). Es kann durchaus als applikationsspezifische Hürde angesehen werden, dass durch die Dynamik ein Denken in Handlungsabfolgen suggeriert wird, so dass man zunächst eher nach einer funktional-dynamischen Lösung suchen möchte.

Im weiteren Verlauf scheitern die Schülerinnen und nehmen letztendlich die Hilfe eines Mitschülers in Anspruch. Dessen Anregungen nachvollziehend notieren sie letztlich auf die Frage: *Wie findet man diese Dreiecke?* folgende Antwort: *Man braucht auf der x-Achse eine Zahl die mit n multipliziert 60 ergibt, oder man nimmt einen beliebigen Punkt auf der x-Achse und zieht den Punkt auf der y-Achse so lang, dass im Graphen der höchste Punkt bei 15 liegt.* (siehe Abbildung 5.20).


Wie findet man diese Dreiecke?

Man braucht ~~Ein~~ auf der x-Achse eine Zahl die mit n multipliziert 60 ergibt, oder man ~~zieht~~ nimmt ~~den~~ einen beliebigen Punkt auf der x-Achse und zieht den Punkt auf der y-Achse so lang, dass im Graphen der höchste Punkt bei 15 liegt.

Abbildung 5.20: Antwort der beiden Schülerinnen aus Abbildung 5.19 zur Aufgabe: *Wie findet man Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist?*

Die Antwort der Schülerinnen enthält beides: eine prädikative und eine funktional-dynamische Herangehensweise. Hinter der prädikativen Lösung steckt die Tatsache, dass einer Situation, welche die geforderte Bedingung erfüllen soll, ein Dreieck ABC zugrunde liegen muss, dessen doppelter Flächeninhalt gerade 60 beträgt (das Dreieck wird zu einem Rechteck mit Flächeninhalt 60 ergänzt). Deswegen ist lediglich dafür zu sorgen, dass der x-Wert von B multipliziert mit dem y-Wert von C genau 60 beträgt. Funktional-dynamisch geben die Schülerinnen lediglich eine Abfolge von Schritten an, mit denen man mithilfe der Applikation kochrezeptmäßig eine gewünschte Situation herstellen kann. Vergleicht man die beiden Herangehensweisen, so ist die erstere insofern mit mehr Einsicht und Allgemeinheit verbunden, als dass sie sich von der Applikation löst. Letztere verweist darauf, wie die Applikation zu bedienen ist, um zu einer Lösung zu gelangen. Dennoch hat sie als erster Schritt einen wichtigen Stellenwert und es ist bemerkenswert, dass beide Lösungen gefunden und formuliert wurden.

Der nächste Transkriptauszug bezieht sich wiederum auf die Aufgabe: *Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist. Wie findet man diese Dreiecke?*

Die Schüler denken zunächst „vorwärts", indem sie ausgehend von einem Punkt P, der das Maximum repräsentiert, zum maximalen Flächeninhalt durch Multiplikation der Koordinaten

208	S1:	Indem man wieder (.) Ja, man muss den Punkt P heraus haben, dass man, wenn man die Pu-
209		Koordinaten miteinander multipliziert der Flächeninhalt rauskommt. Und den Punkt P findet man
210		heraus, indem man die Strecke AC und BC jeweils durch zwei teilt. Dadurch kriegt man die x- und
211		y-Koordinate raus.
212	S2:	Ok.
		[...]
217	S2:	Man kann (.) man sagt jetzt zum Beispiel fünfzehn durch (.) drei (.) ja
218	S1:	Mhm.
219	S2:	Dann nimmt man den (.) dann hat man fünf raus. Dann nimmt man fünf mal zwei und drei mal
220		zwei. Und dann hat man (.) die beiden Werte hier *(zeigt auf Monitor)*

Abbildung 5.21: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 2, Schüler mit Noten im 1er-2er-Bereich.

kommen (208/209). Sie stellen fest, dass die Koordinaten solch eines Punktes P genau in der Mitte zwischen AB und AC zu finden seien (210/211). Dann denken sie „rückwärts“, indem sie vom gewünschten maximalen Flächeninhalt 15 ausgehen. Diesen erreicht man zum Beispiel durch $5 \cdot 3$ (217). Die Eckpunkte B und C des Dreiecks ergeben sich durch Verdopplung dieser Zahlen (219/220).

Die Schüler haben eine prädikative Sicht entwickelt, die sie dazu befähigt reversibel – im Sinne Piagets [Pia72] – zu denken. Zunächst überlegen sie, wie man den Flächeninhalt ausgehend von einer gewünschten Konstellation berechnen würde. Dann machen sie alle zugrunde liegenden Operationen mental rückgängig (denken reversibel) und gelangen so zu einer Beschreibung, wie die gewünschten Dreiecke aufzufinden sind.

5.3 Analysen und Ergebnisse zu Forschungsfrage 3

Die dritte Forschungsfrage bezieht sich auf epistemologische Hürden im Zusammenhang mit Konzepten der Analysis, die im Verlaufe der Transkriptanalysen sichtbar wurden. Diese Forschungsfrage stand keineswegs am Anfang, sondern ergab sich erst durch den Prozess der Analyse. Sie ist somit ein Beispiel dafür, wie durch interpretative Unterrichtsforschung Einsichten in den Mikrokosmos Unterricht gewonnen werden können und wie sich dies auf den theoretischen Kontext der Forschung auswirkt. Insofern treten Theorie und Analyse gemeinsam in einen sich gegenseitig beeinflussenden Prozess ein. Der genaue Wortlaut der Forschungsfrage lautet:

Forschungsfrage 3: Welche spontanen Konzepte und eventuell damit verbundene epistemologische Denkhürden lassen sich identifizieren?

Im Folgenden wird auf drei besonders auffällige und für den Analysisunterricht relevante spontane Konzepte bzw. daraus resultierende etwaige epistemologische Hürden eingegangen.

5.3.1 Epistemologische Hürde „Illusion of linearity“ und „Steigung in einem Punkt“

In Abschnitt 1.2.2.2 wurde die epistemologische Hürde „Illusion of linearity“ beschrieben. In den Transkripten kann man sehen, dass diese Hürde auch bei der Arbeit mit den Lernumgebungen eine Rolle spielt. Es zeigt sich auf verschiedene Art und Weise, dass für einige Schülerinnen und Schüler lineare Zusammenhänge bevorrechtigte Arten von funktionalen Abhängigkeiten darstellen. In diesem Kontext ist auch der folgende Transkriptauszug zu sehen. Abbildung 5.22 zeigt eine Szene aus der Arbeit mit der Lernumgebung *Dreiecksfläche*. Die beiden Schülerinnen bearbeiten die Aufgabe: *Beschreibe die Form des Graphen möglichst genau!*. Dabei gehen sie auf die Eigenschaften der Funktion genauer ein.

33	S1:	*(schreibend)* Sobald man Punkt C. Ach, mann, verschrieben *(benutzt Tipex)*. Seitlich verschiebt *(schreibend)*
34	S2:	ändert sich auch die Funktion
35	S1:	ändert sich ähm, ich würde sagen ‚der Anstieg der Funktion’ (..) ändert sich
36	S2:	Ne,ne, der Anstieg, die Funktion hat keinen Anstieg *(weist mit Mauszeiger auf Graph)*, weil, wenn
37		sie einen Anstieg hätte, wäre sie gerade
38	S1:	[Verschieb mal.
39	S2:	*(verschiebt C horizontal ein paar Mal hin und her)* Der guck mal, weil der das ääh, da gibt es
40		keinen Anstieg, weil der Anstieg ist überall unterschiedlich. Es gibt keinen genauen Anstieg und
41		schon gar nicht hier *(schiebt C in die Mitte über AB)*.

Abbildung 5.22: Dreiecksfläche, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

Zur Beschreibung der Form des Graphen benutzen sie die Möglichkeit der Metavariation und verschieben Punkt C horizontal. Sie formulieren zunächst, dass sich die Funktion unter dieser Variation ändert (33/34). S1 versucht sich dann an einer genaueren Aussage und behauptet: *der Anstieg der Funktion ändert sich* (35). S2 ist damit nicht einverstanden, da sie den Begriff „Anstieg“ nicht zutreffend findet. Für S2 können nur lineare Funktionen einen Anstieg haben (36/37). S1 fordert dazu auf Punkt C nochmals zu verschieben (38). S2 folgt dieser Aufforderung und äußert daraufhin: *da gibt es keinen Anstieg, weil der Anstieg ist überall unterschiedlich* bzw. *es gibt keinen genauen Anstieg* (39-41).

Bis zu diesem Zeitpunkt scheint der Begriff „Anstieg“ im Mathematikunterricht nur für lineare Funktionen im Zusammenhang mit der Bestimmung von Geradensteigungen verwendet worden zu sein. Deswegen akzeptiert S2 diesen Begriff nicht für die vorliegende stückweise quadratische Funktion. Insofern liegt hier eine Denkhürde oder epistemologische Hürde für die Schülerin vor, die aus dem bisherigen inhaltlichen Aufbau des Mathematikunterrichts resultiert. Als S2 dann aber Punkt C bewegt, kommt sie zu der Aussage, dass der Anstieg überall unterschiedlich sei. Mit anderen Worten formuliert sie intuitiv die Notwendigkeit eines Konzeptes für „momentane Änderung“ oder „Steigung in einem Punkt“. Es scheint als würde dies durch den visuellen Eindruck unter Metavariation bedingt werden. Die Schülerin formuliert hier also die Notwendigkeit der Erweiterung des Konzeptes „Steigung“ von linearen Funktionen auf differenzierbare Funktionen selbständig. Dies ist ein Moment, der produktiv im Unterricht aufgegriffen und im Sinne eines Conceptual-Change-Ansatzes genutzt werden könnte.

Auch die Szene in Abbildung 5.2 (29/30) lässt vermuten, dass die Schülerinnen den Begriff „Anstieg“ zunächst nur mit linearen Funktionen verbinden, wenn sie sagen: *das geht da viel stärker hoch als bis zum Punkt C. Hier steigt es nur so ein bisschen und da steigt es doch fast linear an*. Zumindest wird hier deutlich, dass die Schülerin einen linearen Anstieg als besonders starken Anstieg erachtet. Auch dies kann man produktiv aufgreifen, wenn man das Konzept von Steigung im weiteren Unterrichtsverlauf erweitert und sich beispielsweise mit Wachstumverhalten beschäftigt.

Letztendlich kann man obige Beobachtungen auch als ein Resultat der epistemologischen Hürde „Illusion of linearity“ betrachten. Lineare Funktionen und deren Untersuchung spielen lange Zeit eine große Rolle im Unterricht. In den Beobachtungen zeigte sich sogar, dass es Schülerinnen gab, die dachten, dass nur Geraden in Koordinatensystemen die Bezeichnung „Graph“ tragen können. Der folgende Transkriptauszug in Abbildung 5.23 bestätigt dies. Es handelt sich hierbei um eine Szene aus der Arbeit mit der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke*. Die Schülerinnen bearbeiten die Aufgabe: *Beschreibe anhand des Graphen, welche Flächeninhaltswerte einmal, zweimal bzw. keinmal vorkommen* und benutzen dabei die Applikation aus Abbildung 3.4, links.

S1: *(lesend)* Erkläre anhand- wie soll, wie soll ich denn anhand des Graphen das bitte machen?
(S2 spielt weiter mit dem Applet und verweilt dabei bei den Punkten B und C ein wenig länger)
S2: *(P schnell bewegend)* Wie cool das aussieht. *(3 sek)*
S1: *(nach vorne fragend)* Jenny, sag mal, muss da ein Graph rauskommen?
J: Eine Parabel ( ) eine Parabel.
S1: Naja, aber das ist ja kein Graph (.) Graph ist doch immer (.) das *(zeigt J ihren AB, auf dem ein Gerade gezeichnet ist)*

Abbildung 5.23: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 4er-5er-Bereich.

S1 ist zunächst nicht klar, wie sie die Aufgabe bearbeiten soll (91). Während S2 mit der Applikation herumspielt (92/93), wendet sich S1 an eine Mitschülerin (J) und fragt, ob *da ein Graph herauskommen muss*. J nennt den Begriff Parabel, woraufhin S1 erwidert, dass eine Parabel kein Graph sei und auf ihren Arbeitsbogen verweist, auf dem ihrer Meinung nach ein Graph gezeichnet ist. Auf dem Arbeitsbogen ist zu diesem Zeitpunkt eine Gerade gezeichnet und erst danach zeichnen die Schülerinnen eine Parabel. Abbildung 5.24 gibt die Zeichnung der Schülerinnen auf dem Arbeitsbogen wieder.

Hier ist also nicht nur der Begriff „Anstieg“ für Geraden reserviert, sondern sogar der Begriff „Graph“. Dies bildet für S1 eine echte Denkhürde bei der Exploration des funktionalen Zusammenhangs.

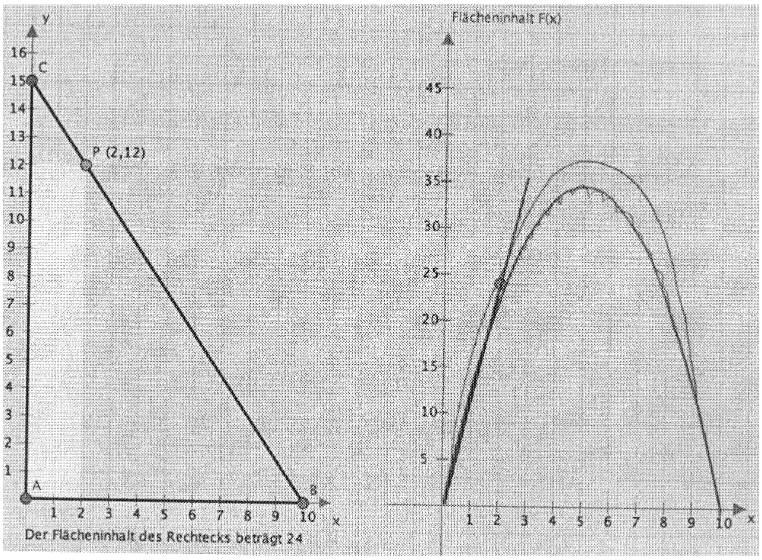


Abbildung 5.24: Zeichnung des Flächeninhaltsgraphen auf dem Arbeitsbogen zur Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* der Schülerinnen aus Transkript 5.23.

5.3.2 Epistemologische Hürde „Kontinuierlicher Durchschnittsbegriff“

Die folgende Analyse bezieht sich auf die Lernumgebung *Die Reise*. Der erste Transkriptauszug zeigt zunächst eine Szene zur Bearbeitung der Aufgabe: *Wie hoch ist die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit?*

S2: Wie lange hat er gebraucht? Vier Stunden Dreißig.
S1: Also, er fährt 270 Kilometer
S2: auf 4 Stunden 30.
S1: pro 4 Stunden (.) also jetzt runterre- (.) ach so (..) *(schreibend)* Vier Komma fünf Stunden (..). dann fährt er
S2: [und dann hast du auf (.) einem Kilometer *(es entsteht eine Pause, da S1 einen Taschenrechner benötigt)* Dann fährt er doch auf einem Kilometer (..)
S1: Nee, nicht auf einem Kilom- (..) Dann fährt er *(bedient den Taschenrechner)* Pro, pro halbe Stunde können wir ausrechnen.
S2: Ja.
S1: Ja, aber wir müssen ja pro Stunde ausrechnen.
S2: Du kannst einfach ausrechnen 270 (.) durch (.) 4,5. Dann haben wir es doch *(S1 bedient den Taschenrechner)* Na, und dann noch mal (.) sechzig.

Abbildung 5.25: Die Reise, Gymnasium 2, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

Zunächst stellen die beiden Schülerinnen fest, dass 4,5 Stunden benötigt und dabei 270 km zurückgelegt wurden (59-61). S1 spricht dann davon, dass sie etwas *von 4 Stunden runterrechnen möchte* (62/63), wohingegen S2 denkt, dass zu berechnen sei, wieviel man *auf einem*

Kilometer hat (64/65). S1 widerspricht und versucht zu berechnen wie weit man *pro halbe Stunde* kommt, sie scheint aber nicht recht zu wissen, wie man dann auf den Wert *pro Stunde* kommt (66-69). Schließlich schlägt S2 korrekterweise vor *270 durch 4,5* zu berechnen. Als der Wert 60 auf dem Taschenrechner erscheint, äußert sie dann aber spontan, das Ergebnis *mal 60* zu nehmen. Letztendlich notieren die beiden Schülerinnen das korrekte Ergebnis auf dem Arbeitsbogen.

Bei dieser Sequenz ist es erstaunlich, wie viele Schwierigkeiten die relativ guten Schülerinnen bei der Berechnung der durchschnittlichen Geschwindigkeit haben. Eine erste Hürde spiegelt sich darin wieder, dass S2 etwas „auf einen Kilometer“ ausrechnen möchte. Dies hat wahrscheinlich seine Ursache in der umgangssprachlichen Formulierung „Stundenkilometer“. Tatsächlich haben die beiden auf dem Arbeitsbogen oft fälschlicherweise „Std/km“ statt „km/Std“ geschrieben.

Eine andere Hürde stellt sich für S1, als sie die gefahrenen Kilometer pro einer Stunde ausrechnen möchte, sich aber nun mit einer Fahrzeit von 4,5 Stunden konfrontiert sieht. Sie glaubt daraus zunächst nur die gefahrenen Kilometer pro halber Stunde ausrechnen zu können. Letztendlich ist ihr scheinbar nicht klar, dass durch die Rechnung $270/4,5$ das gewünschte Ergebnis erreicht wird. Wahrscheinlich liegt an dieser Stelle ein *Problem der Verkürzung* vor. Die Formel $v = \frac{s}{t}$ ist den beiden Schülerinnen bekannt. Es ist aber nicht klar, dass hier eine Proportionalität zugrunde liegt, denn die Formel stellt eine Verkürzung folgender Aussage dar:

Bewegt sich ein Körper gleichförmig fort und legt er in der Zeit t den Weg s zurück, so ergibt sich seine Geschwindigkeit v aus dem Quotienten $v = \frac{s}{t}$.[3]

Diese Proportionaliät äußert sich in der Quotientengleichheit $v = \frac{270}{4{,}5} = \frac{60}{1}$. Anders ausgedrückt ist die Durchschnittsgeschwindigkeit diejenige Geschwindigkeit, die man fahren müsste, wenn man in derselben Zeit (4,5 Stunden) dieselbe Wegstrecke (270 km) zurücklegen möchte und dabei mit konstanter Geschwindigkeit (60 km/h) fährt. Damit könnte man dies auch graphisch repräsentieren, indem man die Steigung der Geraden durch $(0|0)$ und $(4,5|270)$ berechnet. Dass diese Verkürzung ein Problem darstellt, wird auch in der physikdidaktischen Literatur beschrieben wie zum Beispiel in [WH02].

Einen tieferen Grund für die beschriebenen Schwierigkeiten kann man darin sehen, dass der Durchschnittsbegriff hier kontinuierlicher Natur ist. In der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler dominiert die Vorstellung von Durchschnitt als arithmetisches Mittel. Im Verlaufe des Unterrichtsgespräches zur Lernumgebung wurde deutlich, dass einige Schülerinnen und Schüler mit einer Aufgabe folgender Form Probleme haben:

[3]Ein typisches Beispiel einer Verkürzung aus der Geometrie stellt die Aussage dar, der Satz von Pythagoras laute: $a^2 + b^2 = c^2$. Diese Verkürzung vernachlässigt, dass der Satz von Pythagoras eine Implikation darstellt, die besagt, dass „falls ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt, so gilt....“. Eine kleine Anekdote dazu erzählte mir Herr Ziegenbalg, der an solch einer Stelle in Prüfungen grundsätzlich fragte, wie denn dann die Umkehrung des Satzes laute und als Antwort erhielt: $c^2 = a^2 + b^2$.

Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn man 1 Stunde lang 30 km/h und 4 Stunden lang 100 km/h fährt?

Eine spontane (falsche) Antwort, die auf der Vorstellung vom arithmetischen Mittel beruht, wäre

$$\frac{(30+100)}{2}.$$

Korrekt ist aber

$$\frac{(1 \cdot 30 + 4 \cdot 100)}{5},$$

also die Bildung eines gewichteten arithmetischen Mittels.

Dieses gewichtete Mittel kann man aber auch interpretieren als

$$\frac{\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t}{5-0}.$$

Mit anderen Worten ist das kontinuierliche Analogon zum arithmetischen Mittel gerade der Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe auch [Rei74]), der besagt:

Ist v auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, dann gibt es ein $t_0 \in [a, b]$ mit

$$\frac{\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t}{b-a} = v(t_0).$$

Die gefahrene Wegstrecke ergibt sich somit aus Multiplikation der Durchschnittsgeschwindigkeit mit der verbrauchten Zeit. Genau dies haben zwei Schülerinnen auch berechnet, als sie die Aufgabe *Kann man die zurückgelegte Wegstrecke auch mithilfe des Geschwindigkeit-Zeit-Graphen bestimmen?* gelöst haben. Wie man dem Transkriptauszug in Abbildung 5.26 entnehmen kann, gingen sie davon aus, dass man durch den Geschwindigkeit-Zeit-Graphen die Durchschnittsgeschwindigkeit habe und stellten im Grunde genommen einfach die Formel zur Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit nach s um.

Die Aufgabe war so natürlich nicht gemeint, aber die Lösung führt mathematikdidaktisch auf die Idee, dass man das Integral auch durch Mittelwertbildung über eine kontinuierliche Funktion einführen könnte. Das Integral selbst wäre dann das Produkt aus Mittelwert und der Intervalllänge (siehe auch [BT83], S. 165/166). In [BT83] wird darauf verwiesen, dass Mittelwerte in der Stochastik fundamentale Größen darstellen, und solch ein Vorgehen durchaus seine Berechtigung hätte. Sie verweisen darauf, dass

> „einerseits an elementare Kenntnisse über die Mittelbildung, die schon auf einer sehr frühen Stufe vorhanden sind, angeknüpft werden kann; andererseits wird der

> Integralbegriff von einer allzu festen Anbindung an das Flächeninhaltsproblem gelöst, und die methodischen Schwierigkeiten, die mit der Betrachtung orientierter Flächeninhalte verbunden sind, treten aus inhaltlichen Gründen nicht auf. “
> [BT83], S.166

S2: Und bei dem letzten. Ja, indem man die Geschwindigkeit mal äh (.) mal die äh Stundenanzahl nimmt.
S1: *(schreibend)* indem (.) man (.) die Geschwindigkeit? Die oder die Durchschnittgeschwindigkeit? *(schaut auf, weil sie sich verschrieben hat)*
S2: Streich doch einfach durch.
S1: *(schreibt und schaut dann auf)* Mhm.
S2: Äh, *(liest)* indem man die Durchschnitt *(diktierend)* mal
S1: *(schreibt und schaut dann auf)* mit also mit der Dingsbums multipliziert. Mit was multipliziert?
S2: Mit der Stundenanzahl.
S1: *(schreibt und schaut dann auf)* oder mit der Stundenanzahl (.) Stundenanzahl (.) Stundenanzahl? Ich würde eher Zeit nehmen.
S2: Ja. *(S1 schreibt)*

Abbildung 5.26: Die Reise, Gymnasium 1, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

Ich bin mir nicht sicher, ob ich solch einen Zugang favorisieren würde. Zwar hat das Riemann-Integral einen großen begrifflichen Overhead, andererseits ist es intuitiv leicht zugänglich. Der in [BT83] beschriebene Zugang sollte aber wenigstens dazu führen, dass versucht wird, Integration und die Vorstellung von kontinuierlicher Mittelwertbildung zu vernetzen. Eine Möglichkeit hierzu bieten die Anknüpfungspunkte, die in der obigen Analyse beschrieben wurden.

5.3.3 Epistemologische Hürde „Kontinuität“

Das „Konzept von Kontinuität“ ist eng mit den Eigenschaften der reellen Zahlen verbunden. Dazu gehören Vorstellungen von Vollständigkeit, Überabzählbarkeit, Stetigkeit und die „Idee der Approximation“. Bei der Arbeit mit der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* ergaben sich verschiedenartige Situationen, in denen die Schülerinnen und Schüler Beobachtungen machten, die mentale Vorstellungen bezüglich des Konzeptes von Kontinuität erforderten.

Der Transkriptauszug in Abbildung 5.27 zeigt eine Szene aus der Bearbeitung der Aufgabe: *Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt des Rechtecks verändert, wenn man P auf BC von B nach C bewegt.* Die Schülerinnen nutzen dabei die zweite Konstellation der ersten Applikation zur Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* (Abbildung 3.3).

S2 stellt durch Bewegung von P auf BC fest, dass der Flächeninhalt zunächst Null beträgt und anschließend größer wird (23-25). Auf die Frage von S1, warum der Flächeninhalt

S2: Ok, also der Flächeninhalt *(bewegt P auf B, P ist noch nicht auf BC fixiert)* ist bei B gleich Null *(bewegt P auf BC langsam von B ausgehend in Richtung C)* dann wird er immer größer *(bewegt P weiter in Richtung C und kommt ab und zu ab von der Strecke BC)*
S1: Warum wird er denn immer größer?
S2: Naja, weil er von hier, *(bewegt P auf B und dann langsam in Richtung C)* hier ist er ja Null und dann wird er ja erstmal größer.
S1: Woher weißt du denn, dass der größer ist. Der ist bloß nicht so lang.
S2: [Ja, er ist auf jeden Fall größer als Null. (.) Also wird er ja erstmal größer. *(S1 grinst)* Ja, ist doch so. *(bewegt P auf P(8|3))* Und jetzt müssen wir messen, oder?
S1: Nee, ist der (.) ich glaub der Flächeninhalt ist immer gleich.

Abbildung 5.27: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 2, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

immer größer wird, antwortet sie, dass er ja zuerst Null sei und dementsprechend größer werden müsse. Dieses Argument wiederholt S2 nochmals, da S1 dies noch nicht einsieht (27-32). Schließlich sagt S1: *Nee, ich glaub der Flächeninhalt ist immer gleich* (33).

Die Tatsache, dass der Flächeninhalt sich *stetig* oder *kontinuierlich* verändert, ist für S1 spontan nicht klar. Für S1 bleibt der Flächeninhalt gleich, was eine Sprungstelle an den Stellen 0 und 10 bedeuten würde. Dagegen geht S2 intuitiv von einer kontinuierlichen Veränderung aus. Tatsächlich ist die kontinuierliche Veränderung in der Situation der Applikation nicht wirklich sichtbar. Rein visuell ist an den Stellen 0 und 10 keine grüne Rechtecksfläche vorhanden, aber sobald man sich von diesen Punkten wegbewegt, ist eine grüne Rechtecksfläche sichtbar. Kontinuität ist in diesem Fall besser durch einen Funktionsgraphen repräsentiert, auf dem sich der Punkt „stetig bewegt". Der Graph steht in der ersten Applikation aber noch nicht zur Verfügung.

Das folgende Transkript (Abbildung 5.28) zeigt die Fortsetzung der eben analysierten Szene. Dabei wird deutlich, inwiefern die Entwicklung von Vorstellungen zur Kontinuität mit der Idee der Approximation zusammenhängen. In der folgenden Szene beginnen die Schülerinnen damit Daten zu sammeln, mit denen sie Aussagen über die Flächeninhaltsfunktion treffen können.

S2 schiebt P auf $P(8|3)$ und berechnet den Flächeninhalt $3 \cdot 8 = 24$. Dann schiebt sie P um einen Einheit auf der y-Achse weiter nach oben, so dass P ungefähr bei $P(7,2|4,2)$ liegt und berechnet $4 \cdot 7 = 21$. Dazu merkt sie an, dass der Flächeninhalt also tatsächlich größer wird. Die nächste Lage von P beträgt ungefähr $P(6,68|4,98)$, welches zu $5 \cdot 6,5 = 30$ berechnet wird, wobei ihr ein Rechenfehler unterläuft (34-38). S1, die noch zuvor davon sprach, dass der Flächeninhalt immer gleich bliebe (Abbildung 5.27, Zeile 33) sieht nun ein, dass der Flächeninhalt immer größer wird (39/40) und sie versuchen im Folgenden das Maximum herauszufinden. S2 wähnt das Maximum bei $P(6|6)$ mit dem Wert 36. S2 verfährt weiter, indem sie P jeweils um eine Einheit auf der y-Achse nach oben schiebt. Als nächsten Punkt erhält sie ungefähr $P(5,2|7,1)$ und berechnet, dass $7 \cdot 5$ kleiner als 36 ist (41-43). S1 fragt, ob

S2: Jetzt haben wir drei zu acht. Drei mal acht ist achtzehn. *(schiebt P auf ca. P(7,2|4,2))* Jetzt haben wir (..) vier mal sieben ist einundzwanzig, jetzt ist er zum Beispiel größer. Jetzt haben wir *(schiebt P auf ca. P(6,68|4,98))* fünf mal sechseinhalb sind (.)
S1: Dreißig.
S2: Über dreißig. *(schiebt P auf P(6|6))*
S1: Sechs mal sechs sechsunddreißig. Er wird immer größer *(beginnt zu schreiben)*
S2: Ja, bis sechs mal sechsunddreißig wird er größer *(stellt P auf ca. P(5,2|7,1))* Jetzt haben wir sieben mal fünf ist dreißig, also bis *(stellt P(6|6) ein)* zu dem Punkt sechs sechs
S1: [bis zur Mitte, oder? Ach so-
S2: Bis Punkt sechs sechs steigt er an (.) und dann fällt er wieder ab.
S1: [Kann man vielleicht sagen, dass er dass er bis zur Mitte des- *(schiebt P auf ca. P(5,2|7,1))*
S2: Nein.
S1: der Geraden?-
S2: Nein, jetzt haben wir nämlich wieder sieben mal fünf (.) sieben mal fünf, ach fünfunddreißig. Er nimmt wieder ab (.) Bis zum Punkt sechs mal sechs steigt er (.) und dann sinkt er. *(S1 schreibt)*

Abbildung 5.28: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 2, Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich.

das Maximum in der Mitte liege und meint damit die Mitte der Seite BC (was korrekt wäre). S1 widerspricht dem, indem sie ihre eben gesammelten Daten wiederholt (44-49). Sie notieren letztendlich auf dem Arbeitsbogen, dass das Maximum beim Punkt $P(6|6)$ mit dem Wert 36 angenommen wird.

Bei der Suche nach dem Maximum sammelten die meisten Schülerinnen und Schüler ungefähre bzw. grobe Daten. Dabei waren sie sich, wie in diesem Transkript sichtbar, oft nicht bewusst, dass man bei der Approximation des Maximums umso genauere Daten zugrunde legen muss, je näher man der zu approximierenden Stelle kommt. Das tatsächliche Maximum liegt an der Stelle $P(5|7,5)$ und der Punkt $P(5|7)$ existiert nicht. S2 stellt ungefähr $P(5,2|7,1)$ ein und erkennt nicht, dass $5,2 \cdot 7,1 = 36,92$ einen Wert größer als 36 ergibt. Approximation bedeutet das Hinzufügen von Dezimalstellen. Deswegen ist in diesem Zusammenhang die Vorstellung von reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche geeigneter. Natürlich kann man reelle Zahlen auch algebraisch als vollständigen geordneten Körper oder geometrisch als Zahlenstrahl repräsentieren. Die Vorstellung von reellen Zahlen, die der Approximation zugrunde liegt, ist aber die Dezimalbruchdarstellung, und Approximation bedeutet das Hinzufügen von Dezimalstellen. Beim Umgang mit reellen Zahlen und verwandten Konzepten müssen dementsprechend je nach Situation und Problemstellung geeignete Vorstellungen vorhanden sein bzw. entwickelt werden, die situationsadäquat im Sinne des Conceptual-Change-Ansatzes aktiviert werden können. An dieser Stelle ließe sich der Irrtum der beiden Schülerinnen leicht nutzen, indem man sie darauf aufmerksam macht, dass der Punkt $P(5|7)$ nicht existiert und sich bei der Berechnung des Flächeninhalts mit genaueren Daten ein Wert größer als 36 ergibt. Dies führt auf die Idee der Approximation und ist als produktiver Einstieg zur Entwicklung geeigneter Vorstellungen denkbar.

Interessant an obigem Transkriptauszug ist auch, dass die Schülerinnen bei der Suche nach dem Maximum, den Punkt P immer um eine Einheit verschieben und den Wert nehmen, der sich bei dieser Prozedur als der größte herausstellt. Sie kommen nicht auf die Idee, dass das Maximum auch zwischen zwei der von ihnen bestimmten Werten liegen könnte. Dies könnte seine Ursache in einer Gewohnheit haben, bei Wertetabellen immer ganzzahlig vorzugehen. Es bestätigt aber auch, dass die Vorstellungen von reellen Zahlen insofern nicht ausgebildet sind, als dass eine Sicht aktiviert würde, die besagt, dass auch alle Werte „dazwischen" relevant sind.

Der nächste Transkriptauszug (Abbildung 5.29) zeigt, dass Schülerinnen und Schüler durch die Arbeit mit den Applikationen in der Lage waren, Aspekte des Konzeptes von Kontinuität in eigene Worte zu fassen und dabei eine intuitive Basis für dieses Konzept entwickelten. In der folgenden Szene wird die Aufgabe bearbeitet: *Erkläre anhand des Graphen, welche Flächeninhaltswerte einmal, zweimal, bzw. keinmal vorkommen.* Die Schüler nutzen zur Bearbeitung der Aufgabe die Applikation aus Abbildung 3.4, links.

S1: Der Wert siebenunddreißig Koma fünf kommt einmal vor.
S2: *(schreibend)* einmal, Komma, da er (.) der größte Wert ist.
S1: Mhm.
S2: Dann hat-
S1: Keinmal kommen die Werte außerhalb dieser Kurve *(bewegt P schnell zwischen B und C hin und her)* vor.
S2: *(blickt auf Monitor, während S1 P bewegt)* Na also, oder unter Null. Größer siebenunddreißig Komma fünf oder unter null (.) kleiner null.
S1: Mhm. *(S2 schreibt und S1 bewegt P weiter)*
S2: *(schreibend)* Die Werte größer ( )
S1: [*(P bewegend)* Na, der Wert fünfundzwanzig kommt ja auch nie vor.
S2: Natürlich.
S1: Mmh. Guck. *(bewegt P)* Hier nicht *(Es erscheint der Wert 25,1 als Flächeninhaltsangabe auf dem Monitor)* Ja, fünfundzwanzig eins- hmm na ok ich ( )
S2: [( ) irgendwann kommt der bestimmt vor.
S1: *(versucht den Flächeninhaltswert 25 einzustellen und erreicht mit P(2,12|11,82) der Wert F(2,12)=25,085)* Hier kommt ja auch fünfundzwanzig vor.
[...]
S2: So, wunderbar. Und was kommt zweimal vor? Werte-
S1: Null.
S2: Ja, Werte wie Null *(beginnt zu schreiben)* Jeder Wert kommt eigentlich zweimal vor. *(bewegt P hin und her)* Man kann den Punkt immer um ein Kleinstel verschieben.

Abbildung 5.29: Einbeschriebene Rechtecke, Gymnasium 2, Schüler mit Noten im 1er-2er-Bereich.

Sie einigen sich schnell darauf, dass das Maximum $37,5$ einmal vorkommt und die Werte außerhalb des Graphen keinmal (123-130).Während S2 schreibt, bewegt S1 den Punkt P und sagt, dass der Wert 25 ebenfalls nicht vorkomme (133). S2 widerspricht und meint, dass der Wert 25 *natürlich* auch irgendwann erreicht wird (134-137). In (135/136) wird deutlich, dass S1 versucht, den Wert 25 so einzustellen, dass die Ziffer 25 als Flächeninhaltswert unter dem Koordinatensystem erscheint. Dies gelingt ihm aber nicht exakt. S2 ist überzeugt, dass der

Wert 25 *irgendwann bestimmt vorkommt* (137). Daraufhin versucht S1 nochmals die Ziffer 25 als Flächeninhaltswert einzustellen (138/139) und äußert schließlich: *Hier kommt ja auch 25 vor* (139). Es ist unklar, ob er an dieser Stelle auf den Funktionsgraphen verweist oder nicht. Wenig später notieren sie ihre Ergebnisse und formulieren, dass *jeder Wert zweimal vorkommt* und unter Bewegung von P, dass man *den Punkt immer um ein Kleinstel verschieben* könne (148/149).

Die Behauptung von S1, dass der Wert 25 nie erreicht wird, mag zunächst erstaunen. Offenbar basiert seine Aussage aber auf der Beobachtung, dass der Dezimalbruch 25.0 als Ziffer in der Applikation nicht einzustellen war. Bei Bewegung des Punktes P beobachtet er also die Veränderung der Ziffern, aber nicht die Veränderungen im dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen. In der Tat eignen sich die Daten der Dezimalbrüche auch denkbar schlecht, um Kontinuität wiederzuspiegeln. In der Darstellung sind nämlich höchstens vier Nachkommastellen zu sehen. Endliche Dezimalbrüche erlauben aber nur eine diskrete Sicht auf die Situation, wohingegen der Funktionsgraph einen geometrischen Zugang durch eine kontinuierliche Bewegung ermöglicht. Es ist deswegen wahrscheinlich, dass S1 auf den Graphen verweist, wenn er sagt: *Hier kommt ja auch* 25 *vor.* Insofern revidiert S1 seine erste Aussage durch Nutzung des dynamischen Repräsentationstransfers. Interessanterweise scheint der Zwischenwertsatz, der als Satz über stetige Funktionen doch recht natürlich wirkt, nicht intuitiv bewusst zu sein, sondern muss erst durch verschiedene Erfahrungen zugänglich gemacht werden.

Am Ende der Szene formuliert S2 sogar seinen Begriff von Kontinuität durch: *Man kann den Punkt immer um ein Kleinstel verschieben* (149). Diese Formulierung ist handlungsbasiert und beruht auf der Möglichkeit der Variation innerhalb der Situation, weswegen sie sich durch eine dynamische Sicht auszeichnet. Sie kann als intuitive Basis für ein dynamisches Grenzwertkonzept dienen.

5.4 Fragebögen

Zum Abschluss der Analyse werden zur Abrundung einige Antworten und Anmerkungen der Schülerinnen und Schüler auf den Fragebögen vorgestellt. Die Fragebögen sind in Anhang C zu finden. Zwischen den Studien in den beiden Versuchsklassen wurde der Fragebogen nochmals abgeändert. Der erste Fragebogen enthielt noch Fragen, in denen sich die Schülerinnen und Schüler dazu äußern sollten, ob sie denken, dass ihnen der Computer beim Verstehen der einzelnen Aufgaben geholfen hat und was genau sie durch den Computer besser verstanden haben. Ich hatte die Hoffnung dadurch herauszufinden, welche Bestandteile und Merkmale der Applikationen besonders hilfreich sind. Tatsächlich ließen sich die Aussagen der Schülerinnen und Schüler nicht gewinnbringend deuten. Das liegt natürlich daran, dass es für Schülerinnen und Schüler schwierig ist auf einer Metaebene ihr eigenes Denken zu reflektieren, aber es war einen Versuch wert. Einige Antworten auf diese Fragen findet man am Ende der vollständigen

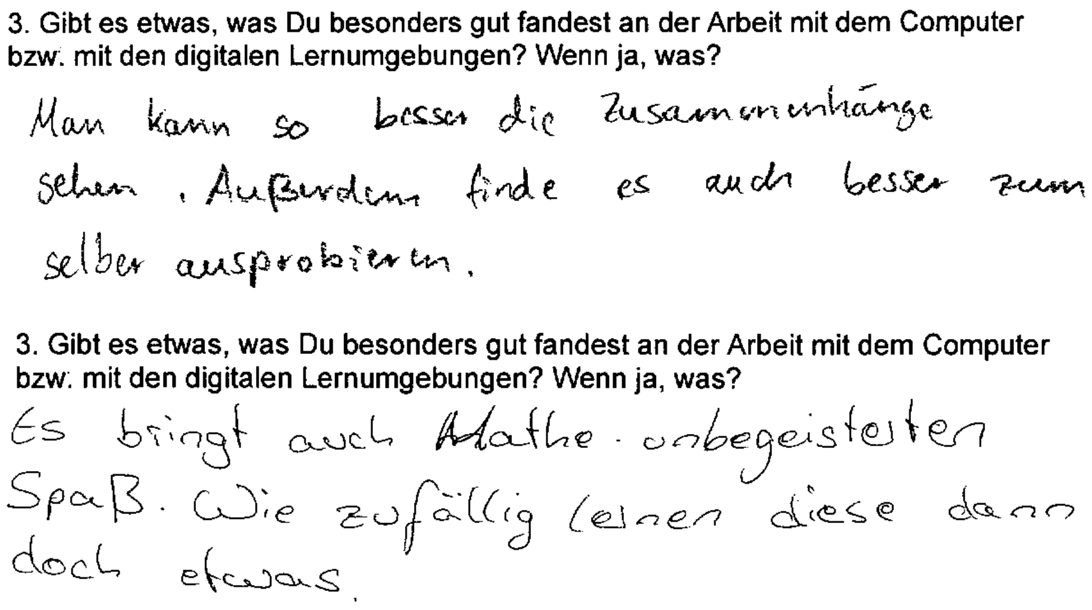
Transkripte in Anhang D. Beim Einsatz des Fragebogens in der zweiten Versuchsklasse wurden diese Fragen herausgenommen und stattdessen die Möglichkeit gegeben einen Kommentar zur Unterrichtsreihe zu schreiben.

Ein paar interessante und abrundende Aspekte brachten die Antworten auf die beiden Fragen:

- *Gibt es etwas, was Du besonders gut fandest an der Arbeit mit dem Computer bzw. mit den digitalen Lernumgebungen? Wenn ja, was?*
- *Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?*

Deswegen werden im Folgenden einige Antworten der Schülerinnen und Schüler auf diese Fragen wiedergegeben. Sie sollen lediglich ein Stimmungs- bzw. Meinungsbild einfangen und ein paar Aspekte allgemeinerer Natur mit ins Spiel bringen. Die folgende Darstellung ist dementsprechend nicht im Sinne einer wissenschaftlichen Auswertung zu verstehen.

Abbildung 5.30 zeigt Antworten zur ersten Frage und Abbildung 5.31 zur zweiten Frage.


3. Gibt es etwas, was Du besonders gut fandest an der Arbeit mit dem Computer bzw. mit den digitalen Lernumgebungen? Wenn ja, was?

Man kann so besser die Zusammenhänge sehen. Außerdem finde es auch besser zum selber ausprobieren.

3. Gibt es etwas, was Du besonders gut fandest an der Arbeit mit dem Computer bzw. mit den digitalen Lernumgebungen? Wenn ja, was?

Es bringt auch Mathe-unbegeisterten Spaß. Wie zufällig lernen diese dann doch etwas.

Abbildung 5.30: Antworten auf dem Fragebogen zur Frage: *Gibt es etwas, was Du besonders gut fandest an der Arbeit mit dem Computer bzw. mit den digitalen Lernumgebungen? Wenn ja, was?*

Es wurde positiv angemerkt, dass man die Zusammenhänge durch die Visualisierung besser verstehen konnte, und die Möglichkeit hatte selbst zu experimentieren bzw. auszuprobieren.

Auch eine gesteigerte Motivation durch die Arbeit mit den Lernumgebungen wurde genannt. Sehr schön ist die Aussage: *Es bringt auch Mathe-Unbegeisterten Spaß. Wie zufällig lernen diese dann doch etwas.*

4. Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?

Man kann ohne großes Zeichnen gleich mehrere ~~Va~~ Varianten ausprobieren. Auch ist es genauer. Ich zeichne nicht gerne, deswegen finde ich solche Aufgaben am PC besser.

4. Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?

Man muss nicht immer wieder neue Skizzen anfertigen und kann Veränderungen, wenn man zB. ein Punkt verschiebt besser darstellen.

4. Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?

Das ich am Computer viele verschiedene Möglichkeiten ausprobieren kann und so schneller zu einem Ergebnis komme.

Abbildung 5.31: Antworten auf dem Fragebogen zur Frage: *Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?*

Allgemein wurde positiv hervorgehoben, dass man durch die Arbeit mit dem Computer mehrere Varianten ausprobieren kann, ohne selbst zu zeichnen. Damit bleibt mehr Raum und Zeit, um andere Schwerpunkte zu setzen. Variieren, ausprobieren, experimentieren ohne lästiges Zeichnen und in einer graphisch angenehmen und genauen Form wurden sehr häufig positiv genannt.

Hervorheben möchte ich die Antworten der beiden eher schwächeren Mathematikschülerinnen aus den Transkriptanalysen, die in Abbildung 5.32 zu sehen sind.

In den Videoaufnahmen dieser beiden Schülerinnen wurde immer wieder deutlich, dass sie bezüglich des Faches Mathematik wenig Begeisterung und Motivation aufbrachten. Auch ihre Selbstwirksamkeitserwartung, also deren Überzeugung von sich selbst mathematische Handlungen erfolgreich durchführen zu können [Ban97], war sehr gering. In der Analyse hatte ich den Eindruck, dass sich die Selbstwirksamkeitserwartung steigerte und sie sich immer mehr zutrauten die Lernumgebungen selbständig zu erkunden. Ein Beispiel hierfür kann man in Transkript in Abbildung 5.16 sehen. S1 sagt in Zeile 29: *Zeig mal einfach irgendwelche*. Damit fordert sie dazu auf erst einmal Daten zu sammeln und auszuprobieren, auch wenn noch unklar ist, wohin es führt. Die Antworten der beiden Schülerinnen auf den Fragebögen scheinen diesen Eindruck zu bestätigen.

Zum einen äußert eine der Schülerinnen, dass sie sich von mal zu mal leichter in die Aufgaben hineindenken konnte und somit die Applikation gewinnbringender nutzen konnte. Vor allem ihre Aussage, dass man letztendlich immer auf die Lösung kommt, da man mithilfe des Computers mehr Denkmöglichkeiten hat, deutet auf eine erhöhte Selbstwirksamkeitserwartung hin. Weiterhin wurde die Anschaulichkeit und eine damit einhergehende erhöhte Motivation (*das Arbeiten am Computer war interessanter*) hervorgehoben. Interessant ist, dass gerade die schwächeren Schülerinnen das selbständige Arbeiten als positiv empfanden, da man doch vermuten könnte, dass gerade diese Schülerinnen mehr „Führung“ haben wollen. Im Hinblick auf eine Erhöhung der Selbstwirksamkeitserwartung macht dies aber Sinn, denn diese erhöht sich unter anderem dadurch, dass man selbst eine mathematischen Handlung erfolgreich durchführt.

3. Gibt es etwas, was Du besonders gut fandest an der Arbeit mit dem Computer bzw. mit den digitalen Lernumgebungen? Wenn ja, was?

Ich hab ja an dem Laptop gearbeitet. Gut daran fand ich das man die Abbildungen verschieben bzw. bewegen konnte. Letzendlich fiel es mir von mal zu mal leichter, mich in die Aufgaben reinzudenken.

4. Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?

Irgendwie kommt man letzendlich doch auf die Lösung. Mit dem Computer kann es als erstes ausprobieren und dann überlegen, ob man noch anders auf die Lösung kommt

3. Gibt es etwas, was Du besonders gut fandest an der Arbeit mit dem Computer bzw. mit den digitalen Lernumgebungen? Wenn ja, was?

Ich fand es gut, das wir in 2er Gruppen arbeiten konnten. Auch das selbstständige Arbeiten fand ich gut.

4. Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?

Ich finde das Arbeiten am Computer interessanter, als wenn ich Aufgaben im Mathebuch machen müsste. Es ist einfach besser anschaulich.

Abbildung 5.32: Antworten der eher schwächeren Mathematikschülerinnen auf dem Fragebogen.

5.5 Zusammenfassung und Folgerungen

Dieses Unterkapitel dient der Zusammenfassung der Analysen aus den vorigen Abschnitten und der Darstellung von Folgerungen. Außerdem wird ein möglicher Ausblick auf weitere Arbeiten gegeben, der in Kapitel 6 weiter verfolgt wird.

Zunächst möchte ich darauf verweisen, dass es in der Natur des Ansatzes der interpretativen Forschung liegt, dass die Ergebnisse keinen „Allgemeinheitscharakter" haben. Schlussfolgerungen der Art „wenn man in dieser Art und Weise arbeitet und gewisse Tätigkeiten ausführt, so kann man Folgendes erwarten" sind dementsprechend nicht möglich bzw. werden nicht angestrebt, und es ist die Frage, ob durch andere Forschungsansätze Aussagen dieser Art überhaupt möglich wären.

Die Ergebnisse stellen vielmehr Beobachtungen dar, die in dem beschriebenen Kontext mit den in diesen Situationen beteiligten Personen und Rahmenbedingungen gemacht wurden. Dabei wurde versucht „zu verstehen", was passiert. Die Analysen können als Korrektiv für Unterricht bzw. für die entwickelten Lernumgebungen und deren Einsatz wirken. Es ergaben sich einige Punkte, an denen die didaktische Wahrnehmung geschärft und die Sensibilisierung für Situationen erhöht wurden. Gleichzeitig konnten im Verlaufe der Entwicklung und der Analysen weitere Ideen für einen qualitativ-inhaltlichen Ansatz im Analysisunterricht entwickelt werden (Kapitel 6).

Zunächst soll an die in Abschnitt 1.3 formulierte Grundfrage erinnert werden. Es wurde gefragt, ob die Lernumgebungen, so wie sie gestaltet sind und eingesetzt wurden, tatsächlich einen Beitrag zur Konzeptualisierung im propädeutischen Analysisunterricht leisten können, oder ob die Schülerinnen und Schüler lediglich geometrische Objekte sehen und manipulieren. Dieser Grundfrage wurde vor allem mit den Forschungsfragen 1 und 2 (Abschnitt 4.1.2) nachgegangen.

Tatsächlich zeigen die Transkripte und deren Analyse, dass die Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit den Lernumgebungen vielfältige Vorstellungen bezüglich propädeutischer Analysis-Konzepte entwickelt und formuliert haben. Dabei spielte die Art der Aufgabenstellungen, die die Schülerinnen und Schüler stets zu Verbalisierungen ihrer Beobachtungen und Begründungen aufforderten, eine wichtige Rolle. Beispielsweise wurden bei der Bearbeitung der Lernumgebung *Dreiecksfläche* Diskussionen um die Konzepte von *Bestand und Änderung* geführt. Dabei wurde um Begriffe gerungen, um dies in Situation und Graph geeignet zu beschreiben. Selbst bei Diskussionen, die nicht erfolgreich waren, taten sich viele Anknüpfungspunkte auf, die man im Unterricht aufgreifen und weiter diskutieren könnte. Bei der Lernumgebung *Die Reise* wurde auf intuitive Art und Weise der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung entdeckt, indem Weg-Zeit-Abhängigkeiten und Geschwindigkeit-Zeit-Abhängigkeiten als „invers" zueinander beschrieben wurden. Außerdem waren selbst schwächere Schülerinnen und Schüler in der Lage einen Zugang zum *Konzept der Integration* zu entdecken und zu formulieren. Die Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* führte bei einem Schülerpaar zur selbständigen Formulierung eines intuitiven Zugangs zum *Konzept von Kontinuität*.

Die Möglichkeit der *Variation innerhalb der Situation* führte zu einer Betonung des dynamischen Aspektes der funktionalen Abhängigkeiten. Dabei war die Entdeckung von Funktionseigenschaften von virtueller Enaktivität geprägt. Beispielsweise war die Monotonie der Flächeninhaltsfunktion in der Lernumgebung *Dreiecksfläche* „virtuell erlebbar". Aber auch die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der verstrichenen Zeit in *Die Reise* wurde insbesondere von dem schwächeren Schülerinnenpaar entdeckt und klar fomuliert: *Ja, er bewegt sich nicht [...] Aber die Zeit verändert sich nur* (Abbildung 5.9). Auch die Formulierung des *Konzeptes von Kontinuität* als *Man kann den Punkt immer um ein Kleinstel verschieben* in Abbildung 5.29 ist in diesem Zusammenhang zu sehen. Insofern bieten die Lernumgebungen eine Möglichkeit sich Konzepten der Analysis auf enaktiv-visueller Ebene im Sinne von Tall [Tal96] (siehe Abbildung 2.1) zu nähern.

Bei der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* führte die Enaktivität mit der ersten dreistufigen Visualisierung zu typischem mathematischem Arbeiten in der Art, dass Daten gesammelt, Vemutungen angestellt, überprüft, verworfen oder bestätigt wurden.

Die Möglichkeit der *Metavariation* erfordert spezielle Aufmerksamkeit. Es ist positiv zu vermerken, dass Metavariation zu einer mathematisch tiefergehenden Beschäftigung mit den funktionalen Abhängigkeiten führen kann, indem gewisse Funktionseigenschaften unter Metavariation betont werden und somit einen Erklärungszwang bewirken (zum Beispiel in der Lernumgebung *Dreiecksfläche* bei der qualitativen Beschreibung der Wendestelle). Auch in der Lernumgebung *Die Reise* führte Metavariation zu einer dezidierteren Beschreibung des Zusammenhanges zwischen Weg-Zeit und Geschwindigkeit-Zeit-Graph.

Dennoch erfordert Metavariation erhöhte Aufmerksamkeit. Beispielsweise hat sich bei der *Dreiecksfläche* gezeigt, dass Metavariation visuell dominanter als Variation innerhalb der Situation ist. Deswegen haben Schülerinnen und Schüler oft sehr früh Metavariation genutzt und versucht Erklärungen hierfür zu finden, bevor die Variation innhalb der Situation durchdacht war. Im Nachhinein wurden deswegen die Fragen zur Lernumgebung leicht verändert und die folgende Aufgabe vorgeschaltet: *Beschreibe in eigenen Worten, welcher funktionale Zusammenhang hier dargestellt ist.* Die Lernumgebung in dieser zweiten Version wurde im Anschluss an die Studie in einem Workshop im Dezember 2009, zu dem ich eingeladen war, mit Schülerinnen und Schüler eines Gymnasiums in Berlin-Prenzlauer Berg verwendet. Die Erfahrungen mit dieser Version sind subjektiv als erfolgreich zu werten. Gleichzeitig bot dieser Workshop die Möglichkeit, Ideen zur Fortsetzung auszuprobieren (siehe Kapitel 6).

Bei der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* schien Metavariation eine applikationsspezifische Hürde zu bewirken und zwar bei der Aufgabe, verschiedene Konstellationen aufzufinden, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gerade 15 beträgt. Metavariation suggerierte das Auffinden einer funktional-dynamischen Lösung, wohingegen eine prädikative Lösung in diesem Fall sinnvoller und einfacher war. Andererseits wurden prädikative Lösungen durchaus gefunden und ein Schülerpaar war in der Lage reversibel zu denken und dabei auf struktureller Basis mithilfe von Invarianten zu argumentieren.

Dadurch, dass Metavariation von mathematischer Seite her schwieriger zu begründen ist, blieben die Beschreibungen der Schülerinnen und Schüler diesbezüglich oft oberflächlich. In der Analyse wurde deswegen an entsprechenden Stellen darauf verwiesen, welche Impulse nötig waren bzw. gegeben werden können, um dem entgegen zu wirken. In diesem Sinne wirkt der interpretative Ansatz hier als Korrektiv bezüglich des Einsatzes im Unterricht.

Nach meiner Einschätzung bietet Metavariation die Chance auf tieferes und elaborierteres Verständnis, birgt aber auch die Gefahr, die in Abschnitt 2.3 beschrieben wurde: Visualisierungen können dazu führen, dass der menschliche Verstand implizite Eigenschaften der Bilder aufnimmt und diese ins *concept image* mit einschließt [Tal94].

Als besonders wertvoll für einen Konzeptualisierungsprozess im Sinne des Conceptual-Change-Ansatzes ist die Aufdeckung von *epistemologischen Hürden* zu betrachten. An verschiedenen Stellen in der Analyse wurde darauf verwiesen, dass eine Diskussion und produktive Nutzung dieser Denkhürden und vorunterrichtlichen Vorstellungen im Unterricht fruchtbar und sinnvoll wäre. Gerade bei den epistemologischen Hürden wird deutlich, dass die Sensibilisierung im Hinblick auf didaktische Wahrnehmung durch interpretative Unterrichtsforschung einen wichtigen Beitrag im Unterrichtsalltag leisten kann. So wurde die Notwendigkeit der *Erweiterung des Konzeptes von Steigung* auf nicht-lineare Funktionen von einer Schülerin selbst formuliert. Die Schwierigkeiten mit dem *kontinuierlichen Durchschnittsbegriff* führten zur Idee, die Verbindung von Integration und kontinuierlicher Mittelwertbildung stärker zu betonen. Denkhürden im Zusammenhang mit dem *Konzept von Kontinuität* geben beispielsweise Hinweise zur Gestaltung interaktiver Lernumgebungen: Als Entwickler sollte man dafür sorgen, dass auf dem Bildschirm stetige (und nicht „hüpfende“) Veränderungen sichtbar sind, damit die Entwicklung von dynamischen Vorstellungen in diesem Zusammenhang nicht verhindert wird.

Allgemein lässt sich auch nach Durchsicht der Fragebögen sagen, dass die Schülerinnen und Schüler in der Lage waren selbständig mit den Lernumgebungen zu arbeiten, und diese Selbständigkeit auch positiv hervorgehoben wurde. Insofern war das Designprinzip eines *geringen technischen Overheads* erfolgreich. Das Design der Lernumgebungen schien darüber hinaus auch schwächeren Schülerinnen und Schülern die Entdeckung von funktionalen Abhängigkeiten im angestrebten Sinne zu ermöglichen und deren Zutrauen in ihre eigenen mathematischen Fähigkeiten zu erhöhen.

Die Analysen und Ergebnisse lassen verschiedene Folgerungen zu: Zum einen ergeben sich Folgerungen zu einem konkreten Einsatz im Unterricht, welche im Verlauf der Analysen schon beschrieben wurden (zum Beispiel Impulse bei der Arbeit mit den Lernumgebungen). Zum anderen ergeben sich Ideen für weitere Fragestellungen. Beispielsweise wäre es lohnend der

Frage nachzugehen, wie interaktive Lernumgebungen gestaltet sein müssen, damit insbesondere schwächere Schülerinnen und Schüler davon profitieren. Eventuell wäre hierfür eine Vergleichsstudie interessant, in der schwächere und stärkere Schülerinnen und Schüler verglichen werden.

Denkbar wäre auch eine Untersuchung, die darauf abzielt, den Umgang mit derartigen interaktiven Lernumgebungen in der Progression zu beobachten. Inwiefern gewöhnen sich Schülerinnen und Schüler an die Arbeit mit derartigen Visualisierungen, und wie wirkt sich dies auf das Lernen aus?

Nach eigener Einschätzung können die interaktiven Lernumgebungen und deren Erkundung einen wichtigen Beitrag zu der Fortsetzung des Analysisunterrichts mit einer Betonung des qualitativ-inhaltlichen Aspektes bilden. Die Visualisierungen bieten die Möglichkeit im Sinne von Supplantation als bewegtes mentales Bild zu späteren Zeitpunkten abrufbar zu sein. So wäre es beispielsweise bei der Lernumgebung *Dreiecksfläche* denkbar die Visualisierung im Verlaufe des Unterrichts aufzugreifen, wenn das Kalkül zur Auffindung einer Wendestelle behandelt wird und dadurch die Notwendigkeit der inhaltlich-qualitativen Vorstellung von Wendestelle zu betonen: Die Wendestelle bei der *Dreiecksfläche* lässt sich nicht mit dem Kalkül auffinden. Die Visualisierung kann dennoch als Bild dafür dienen, dass eine Änderung im Krümmungsverhalten der Bestandsfunktion eine Änderung im Monotonieverhalten der Änderungsfunktion bedeutet. Durch Supplantation bzw. mentale Simulation ist eine Diskussion des Kalküls und der Begriffe aus dynamischer Sicht möglich.

Genauso kann Metavariation zu einem späteren Zeitpunkt wieder aufgegriffen und genauer untersucht werden, indem zum Beispiel ein rechnerischer Ansatz zur Beschreibung von Metavariation gewählt und durch die Visualisierung gestützt wird.

Insgesamt ist es sicherlich lohnend, den gesamten Analysisunterricht zu durchkämmen und diejenigen Stellen ausfindig zu machen, an denen eine qualitativ-inhaltliche Annäherung und Behandlung möglich ist oder schon durchgeführt wird. Ein Großziel wäre der Aufbau eines Analysisunterrichts mit qualitativ-inhaltlichen Fokus, in dem zum Beispiel die entwickelten Lernumgebungen integriert sind bzw. weitere Lernumgebungen digitaler und nicht-digitaler Natur entwickelt werden.

Zum Abschluss der Arbeit werden diesem Großziel entsprechend in Kapitel 6 einige Ideen zu einer Fortführung des Unterrichts in dem eben beschriebenen Sinne vorgestellt. Die Ideen haben sich im Laufe der Analysetätigkeiten aus dem interpretativen Ansatz heraus ergeben bzw. haben sich mit dem Ansatz gemeinsam entwickelt.

Kapitel 6

Fortsetzungsideen und Weiterführung

In diesem Kapitel werden einige Ideen zur unterrichtlichen Weiterführung vorgestellt. Die Ideen haben sich aus der Entwicklung der Lernumgebungen und den Analysen beim Einsatz in der Studie ergeben. Einige Ideen entwickelten sich auch aus Vorstudien. Jede Lernumgebung wurde im Rahmen einer Vorstudie einmalig im Unterricht eingesetzt und im Anschluss an den Einsatz überarbeitet. Dabei wurden allerdings keine Videoaufnahmen gemacht, sondern lediglich subjektive Eindrücke gewonnen bzw. der Unterricht subjektiv reflektiert. Die Vorstudien wurden im Verlauf dieser Arbeit bisher nicht erwähnt, da sie nicht im Fokus der entwickelten Theorie und Analysen standen. Sie dienten lediglich einer ersten Überprüfung und Überarbeitung der Lernumgebungen.

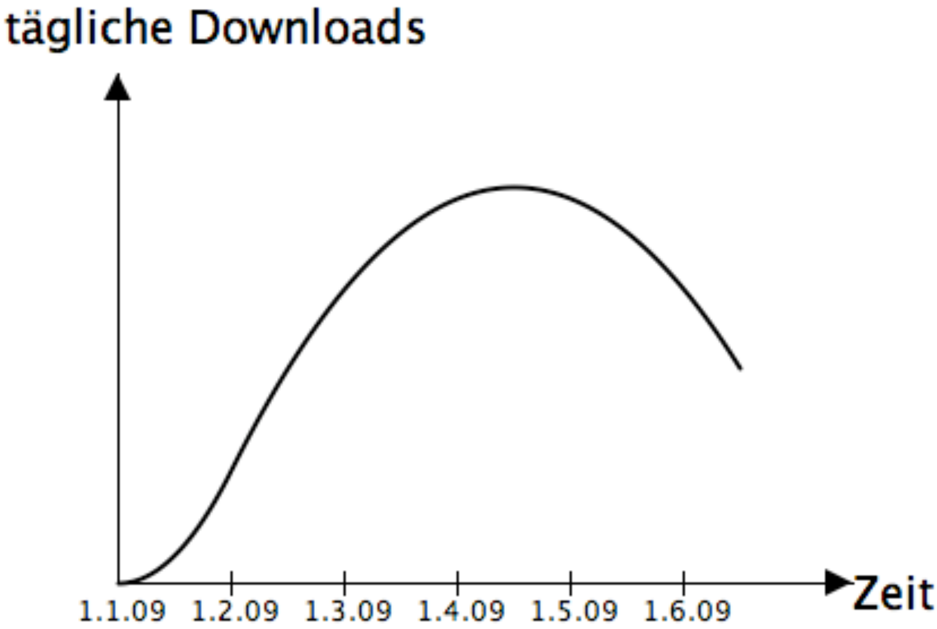
6.1 Downloadaufgabe

Eine Idee, die sich bei der Entwicklung und ersten Erprobung der Lernumgebung *Dreiecksfläche* ergeben hat, ist die sogenannte *Downloadaufgabe*. Abbildung 6.1 zeigt den dazugehörigen Arbeitsbogen mit den Aufgabenstellungen. Die Aufgaben zielen auf eine Fortsetzung der Diskussion um die Begriffe Bestand und Änderung und auf graphische Differentiation einer gegebenen Bestandsfunktion. Insofern bleiben die Aufgabenstellungen auf einer qualitativ-inhaltlichen Ebene und können in einem propädeutischen Analysisunterricht zum Einsatz kommen. Die *Downloadaufgabe* ist adaptiert nach einer Idee von Hahn & Prediger [HP08]. Die Aufgabenteile a) und b) beziehen sich auf den Unterschied zwischen *Bestand an Downloads* und *Änderung der Downloadmenge*. Aufgabe c) verbindet den Graphen und seine lokalen und globalen Eigenschaften mit inhaltlichen Überlegungen und in Teil d) soll ein *Änderungsgraph* skizziert werden.

In einer der beiden Versuchsklassen hatte ich die Möglichkeit, den Arbeitsbogen im Anschluss an die Arbeit mit der Lernumgebung *Dreiecksfläche* in den letzten verbliebenen 10-15

Name:	Aufgabe: Downloadverhalten	Datum:

Stelle Dir vor, Du bist Manager(in) einer Band, die ihre neue Single auf iTunes veröffentlicht hat. Release war am 1. Januar 2009. Was Du im Graphen siehst, sind die Downloads pro Tag vom Release bis Mitte Juni 2009.



a) Wann ungefähr ist die Anzahl der Downloads am größten?
b) Wann ungefähr ist die *Zunahme* der täglichen Downloads am größten?
c) Teile das Downloadverhalten anhand des Graphen in inhaltlich bedeutsame Phasen ein! Zwei Phasen sind sehr einfach zu finden. Findest Du mehr? Sei ruhig kreativ!
d) Beschreibe die *Änderung der täglichen Downloads* über die Zeit und versuche einen Graphen zu zeichnen, der die Änderung bzw. Zunahme wiedergibt!

Abbildung 6.1: Arbeitsbogen: Die Downloadaufgabe.

Minuten der Doppelstunde in die Klasse zu geben. Abbildung 6.2 zeigt zwei Lösungen von Schülerinnen und Schülern zu Aufgabenteil d): *Beschreibe die Änderung der täglichen Downloads über die Zeit und versuche, einen Graphen zu zeichnen, der die Änderung bzw. Zunahme wiedergibt!*

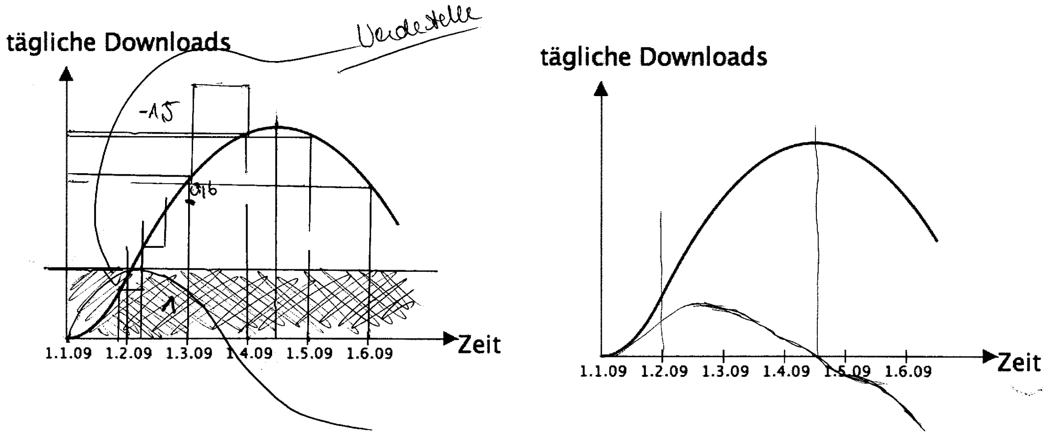


Abbildung 6.2: Graphische Differentiation von Schülerinnen und Schülern bei der *Downloadaufgabe*.

Die Lösungen zeigen, dass Schülerinnen und Schüler der 10. Klasse durchaus in der Lage sind graphisch zu differenzieren bzw. das Änderungsverhalten qualitativ durch Skizzierung eines Änderungsgraphen zu beschreiben. Dabei wurde die Wendestelle als Stelle des größten Wachstums und das Maximum als Nullstelle der Änderungsfunktion erkannt. Der Begriff „Wendestelle" war den Schülerinnen und Schülern aus dem Unterrichtsgespräch zur Lernumgebung *Dreiecksfläche* bekannt. Im Unterrichtsgespräch wurden die Schülerinnen und Schüler, nachdem die Wendestelle in der Applikation qualitativ charakterisiert worden war, gefragt, welche Bezeichnung man einer solchen Stelle geben könne. Dabei nannten sie selbst Begriffe wie *Umkehrpunkt* oder *Wechselpunkt*.

6.2 Formen und Graphen

Eine direkte Weiterführung der Lernumgebung *Dreiecksfläche* ist auch durch Aufgabenstellungen denkbar, wie sie in den Abbildungen 6.3 und 6.4 zu sehen sind. Insbesondere der Aufgabenteil, der in Abbildung 6.4 zu sehen ist, ist als Folge der Analyse zur epistemologischen Hürde *Steigung in einem Punkt* entstanden (siehe auch Abschnitt 5.3.1). Dieser Arbeitsbogen wurde nach Abschluss der Studie in einem Workshop an einem Gymnasium in Berlin-Prenzlauer Berg im Dezember 2009 eingesetzt, nachdem die Schülerinnen und Schüler im Workshop mit der Lernumgebung *Dreiecksfläche* gearbeitet hatten. Dabei wurden die „Feinheiten“ der graphischen Darstellungen und Formen bezüglich Steigungsunterschieden, Wendestellen, Krümmungsverhalten usw. gemeinsam erarbeitet.

In Abbildung 6.3 ist beispielsweise die Flächeninhaltsfunktion F bei 1. eine stückweise lineare Funktion, bei 2. hat F qualitativ gesehen ähnliche Eigenschaften wie die Flächeninhaltsfunktion der Lernumgebung *Dreiecksfläche*[1]. In 3. ist F aus einer quadratischen und einer linearen Funktion zusammengesetzt.

Aufgabe 4. in Abbildung 6.4 bietet die Möglichkeit sich der Idee von *Steigung in einem Punkt* zu nähern, indem man zunächst den Unterschied zwischen den oberen beiden Graphen herausarbeitet. Der erste Graph hat einen konstanten „Wendebereich“, in dem die Steigung Null beträgt, während der zweite Graph nur an einem Punkt die Steigung Null besitzt. Der dritte Graph hat ebenfalls eine Wendestelle, an welcher die Steigung jedoch positiv ist. Auch diese Unterschiede wurden im oben genannten Workshop von den Schülerinnen und Schülern herausgearbeitet und es wurden jeweils qualitativ passende Formen gefunden.

Weiterhin wurde bei den drei Graphen das Krümmungsverhalten im Vergleich zum Flächeninhaltsgraphen der Lernumgebung *Dreiecksfläche* „umgedreht“: An der Wendestelle liegt hier ein Wechsel von konkav nach konvex vor.

In einem letzten Aufgabenteil (ohne Abbildung) waren die Schülerinnen und Schüler aufgefordert sich selbst ein Beispiel (Form und Graph) auszudenken.

6.3 Fahrtenschreiberaufgabe

Bei der Lernumgebung *Die Reise* wurde in den Analysen gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler Grundideen des *Konzeptes der Integration* entwickelt haben. Diese Grundideen lassen sich aufgreifen und weiterführen. Eine Möglichkeit der Weiterführung besteht beispielsweise in

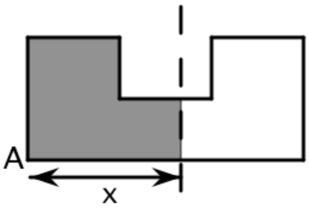
[1] Tatsächlich ist die Flächeninhaltsfunktion aus trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt und man erhält sie beispielsweise dadurch, dass man das Integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ durch Substitution und partielle Integration berechnet.

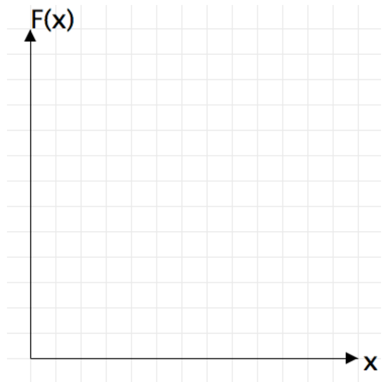
Name:	Funktionale Abhängigkeiten graphisch darstellen	Datum:

Bei den folgenden Formen wird die gestrichelte Linie vom Punkt A um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Wert F(x) gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an.

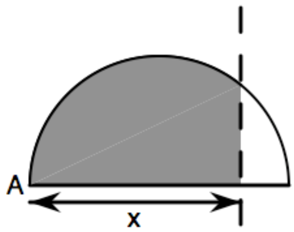
Zeichne in die Koordinatensysteme passende Graphen ein! Auf genaue Zahlenwerte kommt es dabei nicht an.

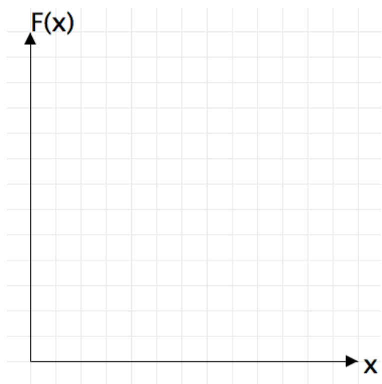
1.



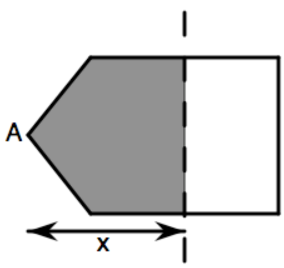


2.





3.



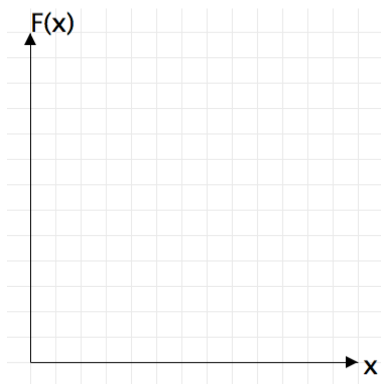


Abbildung 6.3: Arbeitsbogen: Weitere Formen und Flächeninhaltsgraphen (Seite 1).

4. Welche Form könnte zu den folgenden Flächeninhaltsgraphen gehören? Schau Dir die Unterschiede zwischen den Graphen genau an und zeichne eine passende Form.

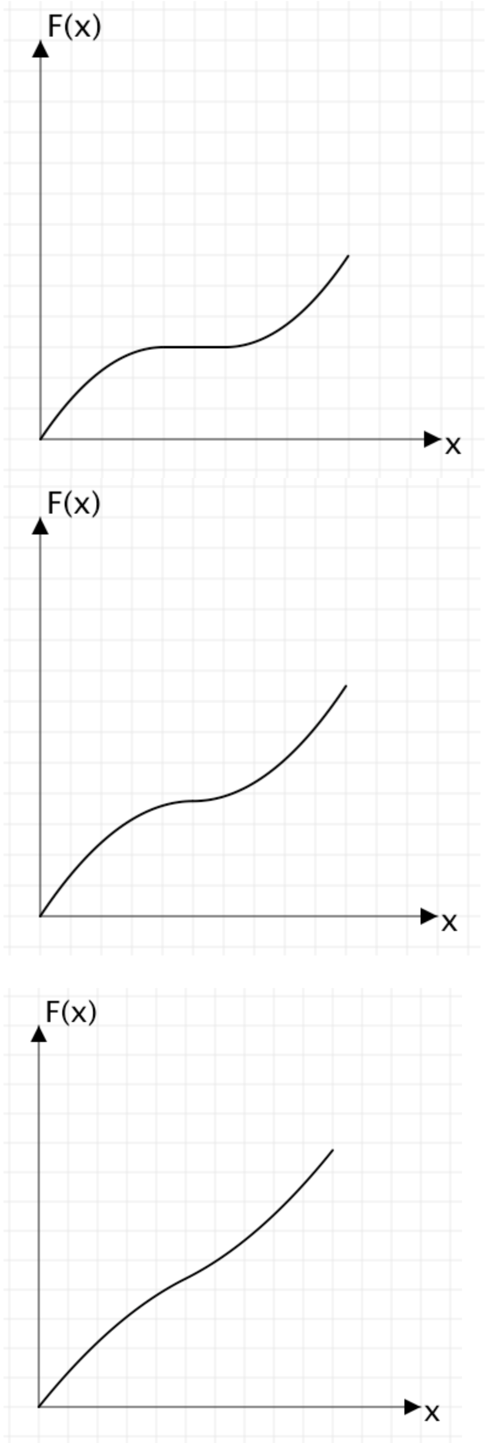


Abbildung 6.4: Arbeitsbogen: Weitere Formen und Flächeninhaltsgraphen (Seite 2).

der Bearbeitung von Aufgaben wie in Abbildung 6.5 dargestellt. Dieser Arbeitsbogen entstand aus den Erfahrungen mit der Lernumgebung innerhalb der Vorstudien. In einer der Versuchsklassen wurde die Möglichkeit genutzt den Arbeitsbogen in den verbliebenen 15 Minuten der Doppelstunde zur Lernumgebung *Die Reise* in die Klasse zu geben. Dabei lag wegen der Kürze der Zeit der Fokus auf der Bearbeitung des Aufgabenteils b): *Wie kann man (annähernd) die zurückgelegte Wegstrecke bestimmen?*

Name:	Aufgabe: Geschwindigkeit-Zeit-Graph	Datum:

Fahrtenschreiber zeichnen die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt einer Fahrt auf. Dabei kommt ein Geschwindigkeit-Zeit-Graph heraus. Stelle Dir vor, ein Fahrtenschreiber produziert folgenden Geschwindigkeit-Zeit-Graphen.

a) Betrachte den Graphen und beschreibe, wie die Fahrt verlaufen sein könnte!
b) Wie kann man (annähernd) die zurückgelegte Wegstrecke bestimmen?

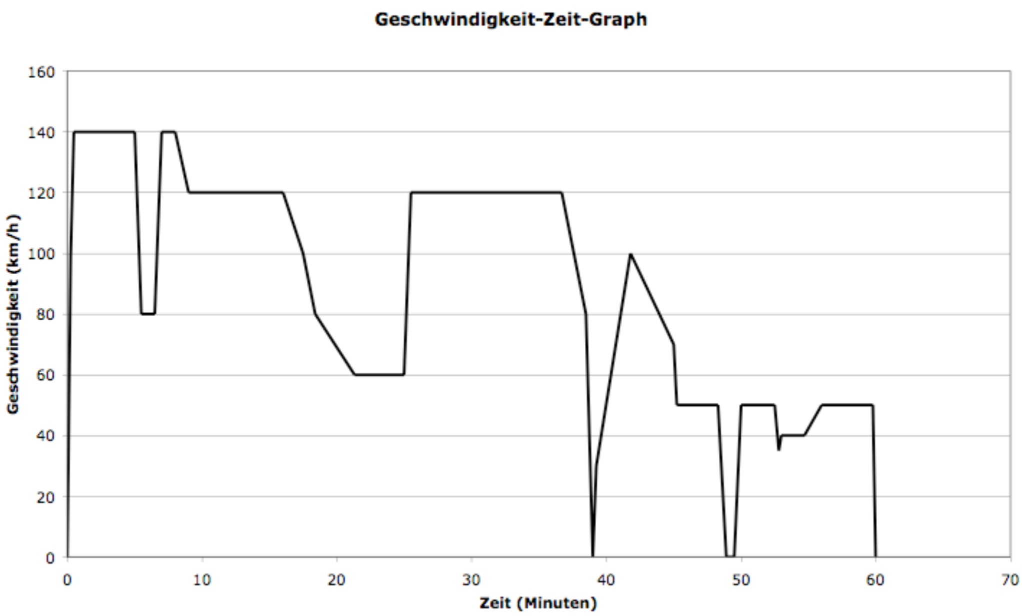


Abbildung 6.5: Arbeitsbogen: Die Fahrtenschreiberaufgabe.

Abbildung 6.6 zeigt die Lösung einer Schülerin zu diesem Aufgabenteil. Die Lösung weist zunächst darauf hin, dass die Schülerin das Problem als Prozess des Aufsummierens von Teilprodukten sieht, also mit der Vorstellung von *Kumulation* verbindet (vgl. hierzu auch das Zitat aus [Tal96] am Ende von Abschnitt 1.1.1). Hußmann [Huß01] beschreibt diese Vorstellung als essentiell für den Integralbegriff. Die Lösung zeigt aber auch, dass ein weiterer Aspekt des Integralbegriffs eine Rolle spielt, nämlich der *Mittelwertsaspekt*. Hußmann [Huß01], S.55 ff, nennt in seiner Arbeit vier Aspekte des Integralbegriffs: *Flächeninhaltsaspekt*, *Stammfunktionsaspekt*, *Mittelwertsaspekt* und *Approximationsaspekt*. Nach seiner Ansicht spielt der Mittelwertsaspekt bei der Einführung in die Integralrechnung eine eher untergeordnete Rolle, obwohl er durch eine Verschiebung der Unterrichtsinhalte in der Sekundarstufe II hin zur Stochastik eine stärkere Gewichtung bekommt. In der Analyse wurde bei der Beschreibung der epistemologischen Hürde *Kontinuierlicher Durchschnittsbegriff* (Abschnitt 5.3.2) schon einmal auf diesen Aspekt hingewiesen. Umso bemerkenswerter ist es also, dass dieser Aspekt in der Lösung der Schülerin auftaucht, indem sie schreibt: *bei Schrägen immer den Mittelwert nehmen*.

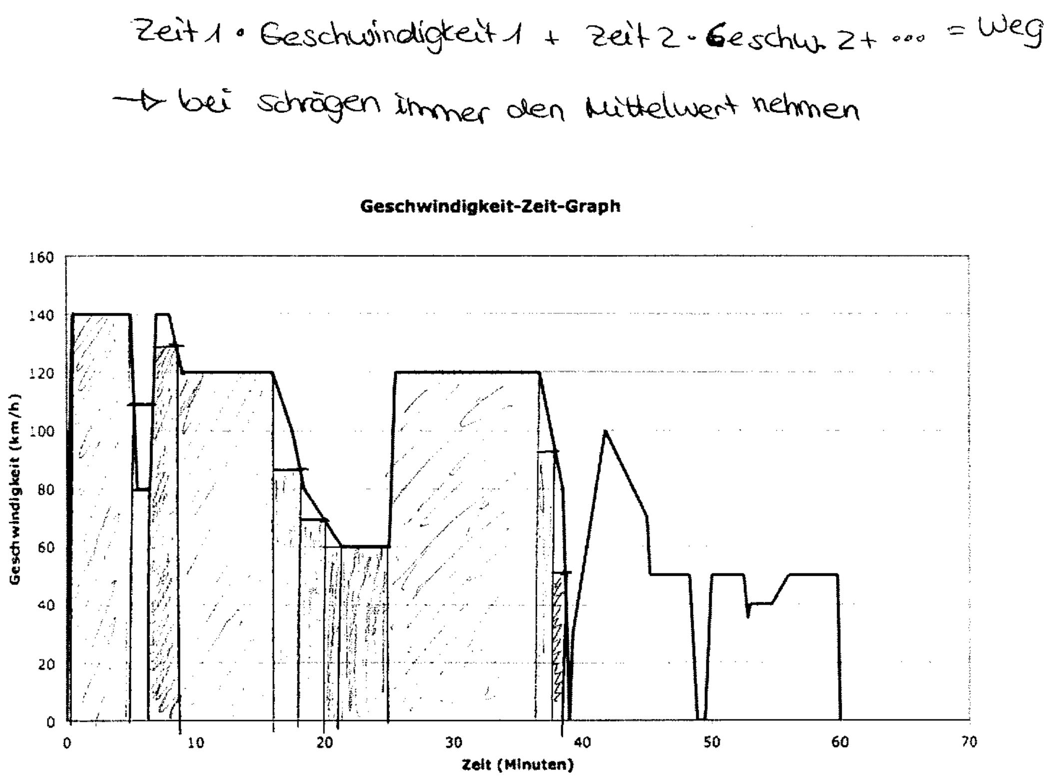


Abbildung 6.6: Lösung einer Schülerin zur Fahrtenschreiberaufgabe aus Abbildung 6.5.

Der vorliegende Geschwindigkeits-Zeit-Graph ist ebenso wie die Graphen in der Lernumgebung *Die Reise* idealisiert, da lediglich gleichmäßige Beschleunigungen auftauchen. Ich vermute, dass aber gerade diese Idealisierung die Formulierung der Idee der Integration auf Basis des Mittelwertaspektes ermöglicht hat. Bei gleichmäßiger Beschleunigung kann man besonders einfach mit Flächeninhalten von Dreiecken argumentieren, um zu begründen, dass sich in einem linearen Abschnitt die Fläche unter dem Graphen als Produkt der mittleren Geschwindigkeit mit der zurückgelegten Zeit ergibt (siehe Abbildung 6.7).

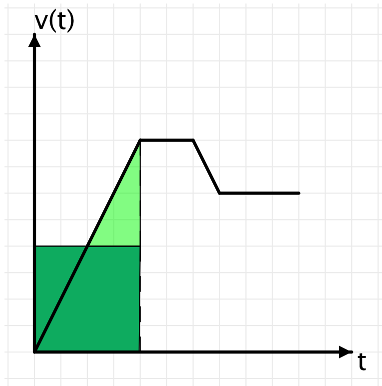


Abbildung 6.7: Mittelwertsaspekt bei der Bestimmung der zurückgelegten Wegstrecke bei gleichmäßiger Beschleunigung: Die beiden markierten Dreiecke sind kongruent!

Sehr lohnend im Zusammenhang mit der Einführung in das Konzept der Integration ist die Dissertation von Stephan Hußmann [Huß01]. Er beschreibt in seiner Studie drei „intentionale Probleme“[2] zur Einführung und Begriffsbildung beim Thema Integration in der Sekundarstufe II. Eines der Probleme ist das „Fahrtenschreiberproblem“, das als offenes Problem formuliert und von den Schülerinnen und Schülern in einer speziellen Lernumgebung erarbeitet wurde. In seiner Arbeit werden noch zwei weitere „intentionale Probleme“ beschrieben, die jeweils auf verschiedene Aspekte des Konzeptes der Integration abzielen.

6.4 Extremwertprobleme

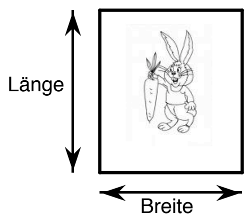
Die Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* kann in der Weiterführung zur Erkundung diverser Extremwertprobleme führen. Ein prominentes Beispiel hierfür ist in Abbildung 6.8[3] zu sehen.

In der Aufgabe wird zunächst ähnlich wie in den Lernumgebungen nach einer Verbalisierung der gegebenen Situation gefragt. Außer den Repräsentationsformen *Situation* und *Graph*, soll auch ein Funktionsterm gefunden werden und die Aufgabe für die konkreten Zahlenwerte

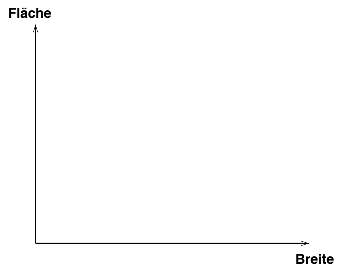
[2] „Intentionale Probleme“ sind grob gesagt solche Probleme, die dem didaktischen Prinzip der Problemorientierung folgend als Bindeglied zwischen „Vorstellungen“ bzw. Perspektiven von Schülerinnen und Schülern und denen von Lehrpersonen dienen können. Sie sollen erlauben, dass Schülerinnen und Schüler ihre individuellen Erfahrungen mit der regulären Welt des Inhalts in Beziehung setzen und verknüpfen können [Huß01].

[3] Die Formulierung der Aufgabe ist angelehnt an [S$^+$85].

Ein rechteckiges Gehege für Hasen soll mit einem 22m langen Maschendrahtzaun umzäunt werden. Der Besitzer möchte wissen, wie die Fläche des eingeschlossenen Gebietes von der Breite des Geheges abhängt.



1. Beschreibe in Worten, wie sich die Fläche des eingeschlossenen Gebietes verändert, wenn die Breite alle möglichen Werte annimmt (Berücksichtige auch große und kleine Werte für die Breite).
2. Gib die Fläche des Hasengeheges bei einer Breite von 10m an. Gib den Flächeninhalt noch für weitere Werte der Breite an.
3. Veranschauliche Deine Antwort durch die Skizze eines Graphen:



4. Bei welcher Breite und Länge ist die Fläche des Hasengeheges am größten?
5. Gib einen Funktionsterm an, der auf die Situation passt.

Abbildung 6.8: Aufgabe *Hasengehege*.

gelöst werden. In diesem Sinne kann sie also als Fortführung der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* gesehen werden.

Die Aufgabe wurde von der Autorin in der vorliegenden Formulierung im Rahmen eines Tests zum Thema *Funktionales Denken* Schülerinnen und Schülern am Ende der 10. Klasse eines Berliner Gymnasiums im Jahre 2007 gestellt. Zwei Aufgaben aus diesem Test wurden schon in Abschnitt 1.2.1 vorgestellt. Es wird wiederum davon abgesehen den ganzen Test vorzustellen. Letztlich beruht die Gestaltung der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* aber in gewissen Teilen auf den Erfahrungen, die mit dieser Aufgabe gemacht wurden. Die Grundidee der Lernumgebung stammt allerdings aus der in den Bildungstandards [Kul03] zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang" formulierten *Trapezaufgabe*, welche in Abbildung 6.9 zu sehen ist.

Gegeben sei ein Trapez durch die Punkte $ABCD$ mit den Koordinaten $A(0;0)$, $B(8;0)$, $C(8;3)$, $D(0;15)$. Jeder Punkt der Trapezseite $\overline{CD}$ ist Eckpunkt eines Rechtecks, das dem Trapez einbeschrieben ist. Die Seiten der einbeschriebenen Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachsen. Der Punkt A ist Eckpunkt eines jeden einbeschriebenen Rechtecks.

1. Der Punkt $P(2;y)$ liegt auf der Seite $\overline{CD}$ und ist somit Eckpunkt eines einbeschriebenen Rechtecks. Trage das Rechteck in die Zeichnung des Trapezes ein und bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks.
2. Bewegt sich der Punkt P auf der Strecke $\overline{CD}$, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Begründe, dass sich der Flächeninhalt F mit der Gleichung $F = x \cdot (-1,5x + 15)$ berechnen lässt, wobei x die erste Koordinate von P ist.
3. Bestimme das einbeschriebene Rechteck mit dem größten Flächeninhalt.

Abbildung 6.9: Trapezaufgabe.

Ähnlich wie die Aufgabe *Hasengehege* wäre auch diese Aufgabe im Rahmen einer Weiterführung des Unterrichts denkbar. Sie ließe sich aber basierend auf der Idee der *Metavariation* noch weiter ausbauen, indem man bei der Lernumgebung *Einbeschriebene Rechtecke* abhängig von der Lage der Dreieckspunkte B und C den Funktionsterm des Flächeninhaltsgraphen und das jeweilige Maximum bestimmt.

Tatsächlich habe ich die Trapezaufgabe aus Abbildung 6.9 im Jahr 2007 direkt in eine interaktive Lernumgebung umgesetzt und einmalig im Unterricht eines Wahlpflichtkurses Mathematik in einer 10. Klasse eines Gymnasiums in Berlin-Tempelhof eingesetzt. Dabei spielte auch das Auffinden des Funktionsterms eine zentrale Rolle. Die Möglichkeit der Metavariation war in dieser Fassung nicht gegeben. Die Lernumgebung steht auf der Internetseite der Autorin (`http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp`) gemeinsam mit Unterrichtsmaterialien zur Verfügung. Die Erfahrungen mit der Aufgabe *Hasengehege* und der Lernumgebung zur *Trapezaufgabe* wurden teilweise in [Hof07] veröffentlicht.

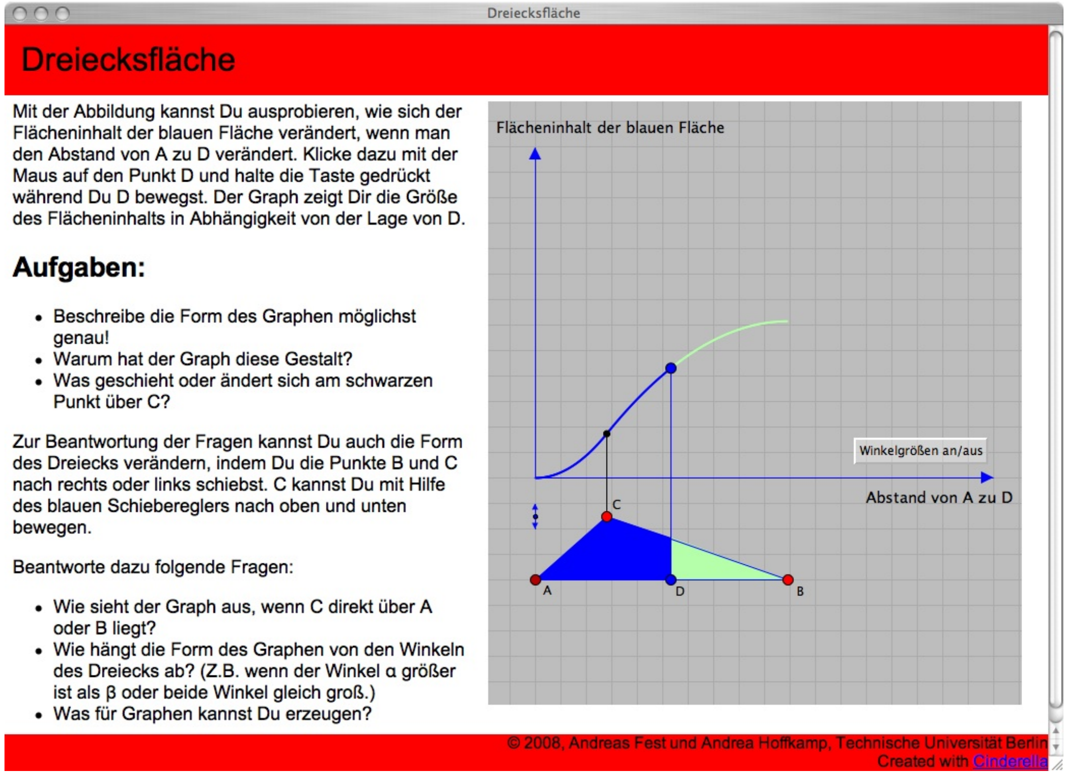
Ich möchte an dieser Stelle bemerken, dass es nicht einsichtig ist, warum in der *Trapezaufgabe* aus [Kul03] die Rechtecke einem Trapez und keinem Dreieck einbeschrieben sind. Es scheint, als hätte dies nur den Grund, einen ersten Aufgabenteil zu formulieren, der gleichzeitig Wissen aus der Geometrie abfragt. Der erste Aufgabenteil der Aufgabe wurde in Abbildung 6.9 nicht genannt. Er lautet: *Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.* Nach Einsatz der Lernumgebung *Trapezaufgabe* wurde diese deswegen variiert, indem das Trapez durch ein Dreieck ersetzt wurde.

Anhang

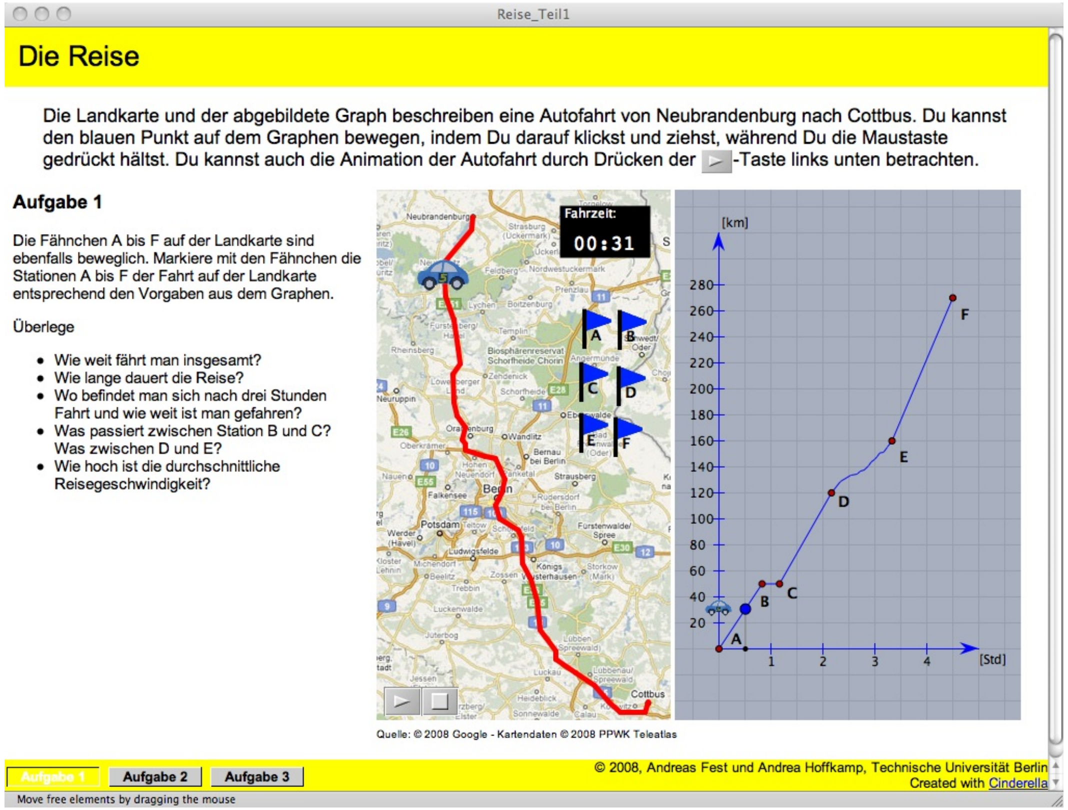
A Screenshots der Lernumgebungen

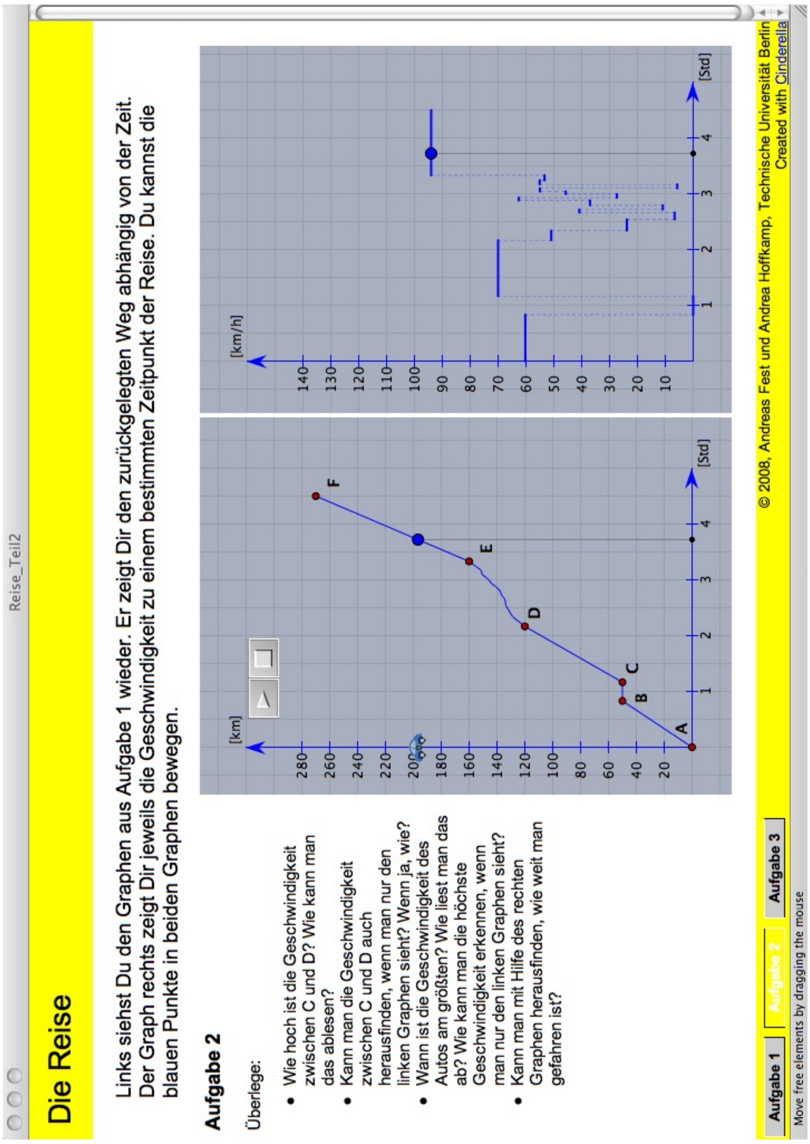
Um eine lesbare Größe der Screenshots zu ermöglichen, werden diese im Querformat dargestellt.

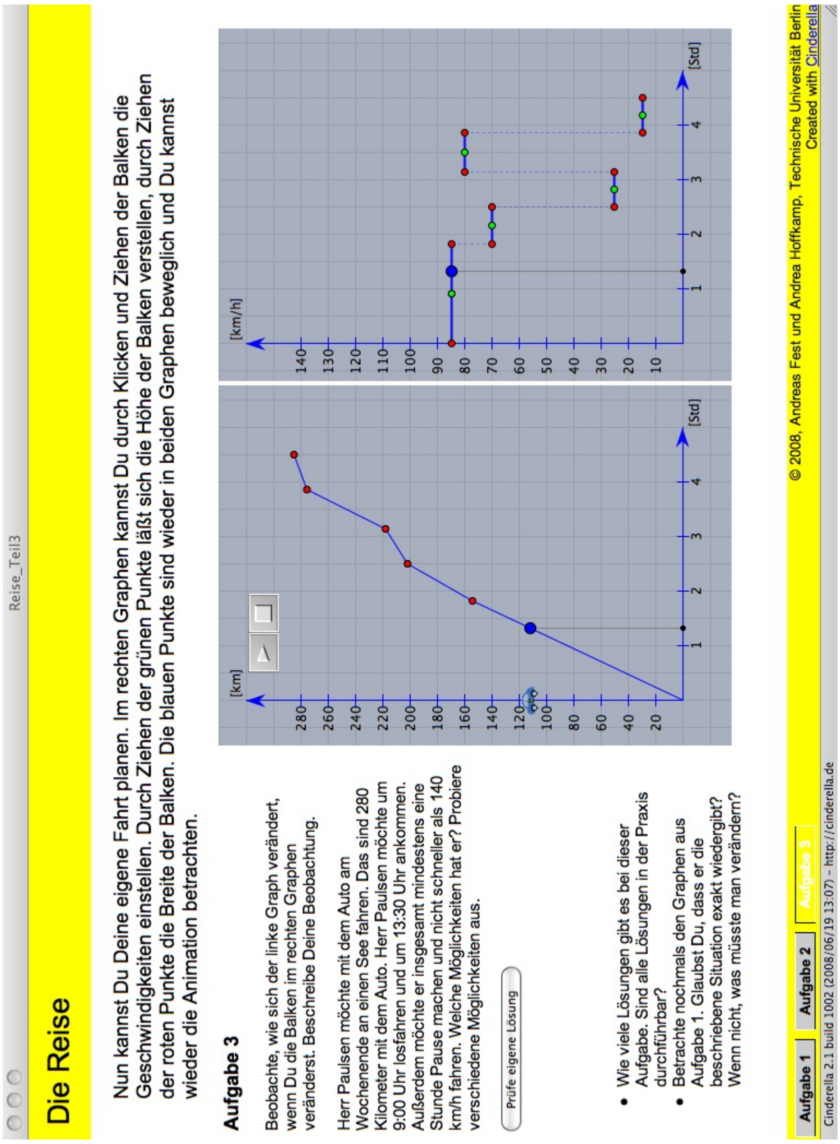
A.1 Dreiecksfläche



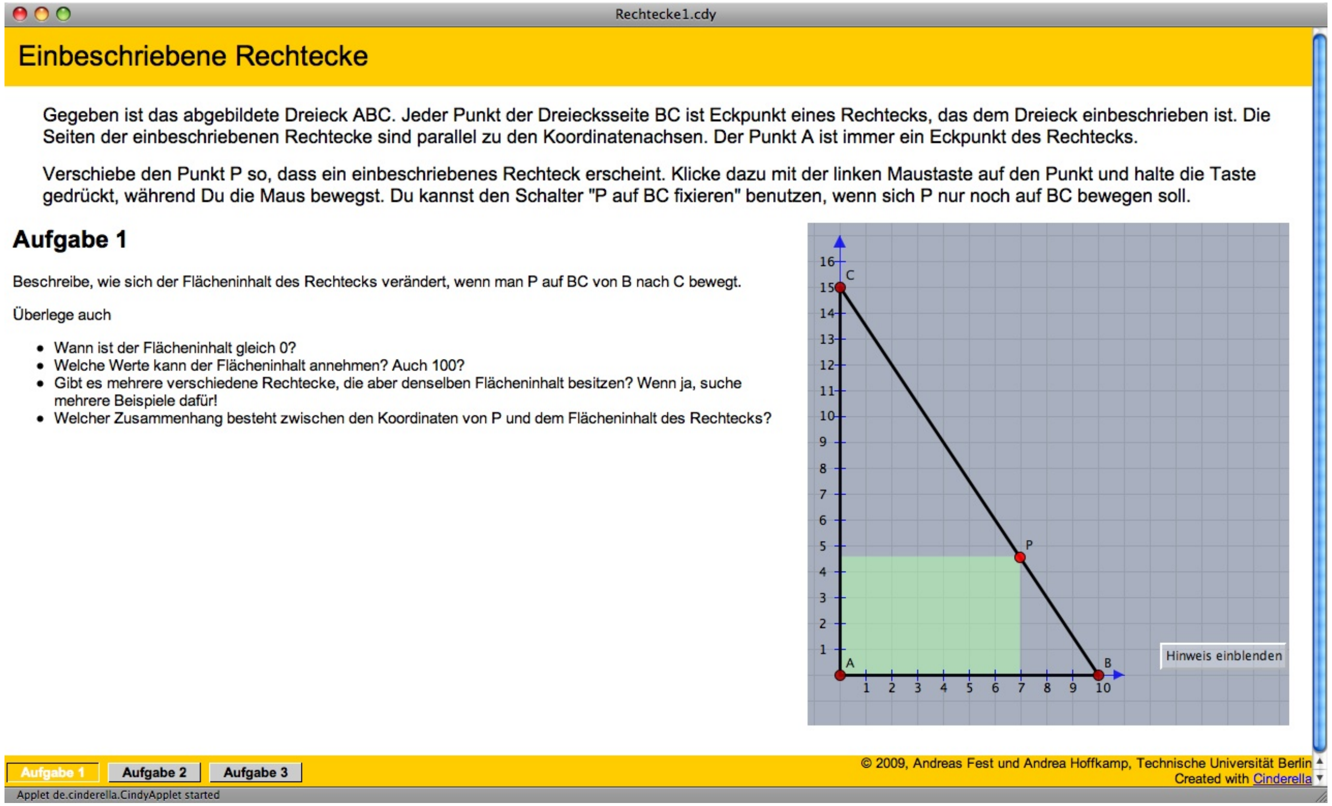
A.2 Die Reise

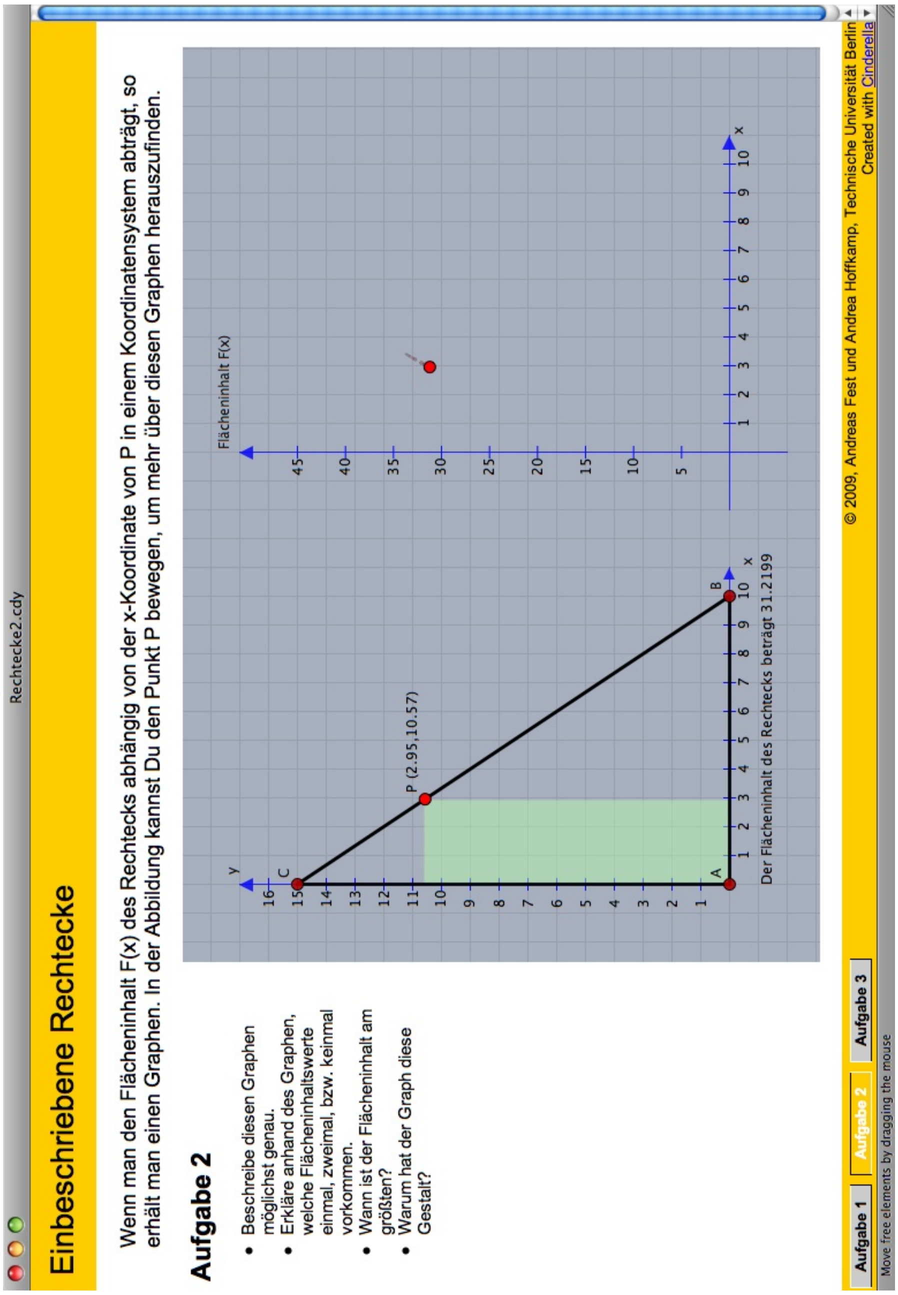

Reise_Teil1
Die Reise
Die Landkarte und der abgebildete Graph beschreiben eine Autofahrt von Neubrandenburg nach Cottbus. Du kannst den blauen Punkt auf dem Graphen bewegen, indem Du darauf klickst und ziehst, während Du die Maustaste gedrückt hältst. Du kannst auch die Animation der Autofahrt durch Drücken der -Taste links unten betrachten.
Aufgabe 1
Die Fähnchen A bis F auf der Landkarte sind ebenfalls beweglich. Markiere mit den Fähnchen die Stationen A bis F der Fahrt auf der Landkarte entsprechend den Vorgaben aus dem Graphen.
Überlege
• Wie weit fährt man insgesamt?
• Wie lange dauert die Reise?
• Wo befindet man sich nach drei Stunden Fahrt und wie weit ist man gefahren?
• Was passiert zwischen Station B und C? Was zwischen D und E?
• Wie hoch ist die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit?
Fahrzeit:
00:31
Neubrandenburg
Berlin
Potsdam
Cottbus
[km]
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
[Std]
1
2
3
4
A
B
C
D
E
F
Quelle: © 2008 Google - Kartendaten © 2008 PPWK Teleatlas
Aufgabe 1
Aufgabe 2
Aufgabe 3
© 2008, Andreas Fest und Andrea Hoffkamp, Technische Universität Berlin
Created with Cinderella
Move free elements by dragging the mouse

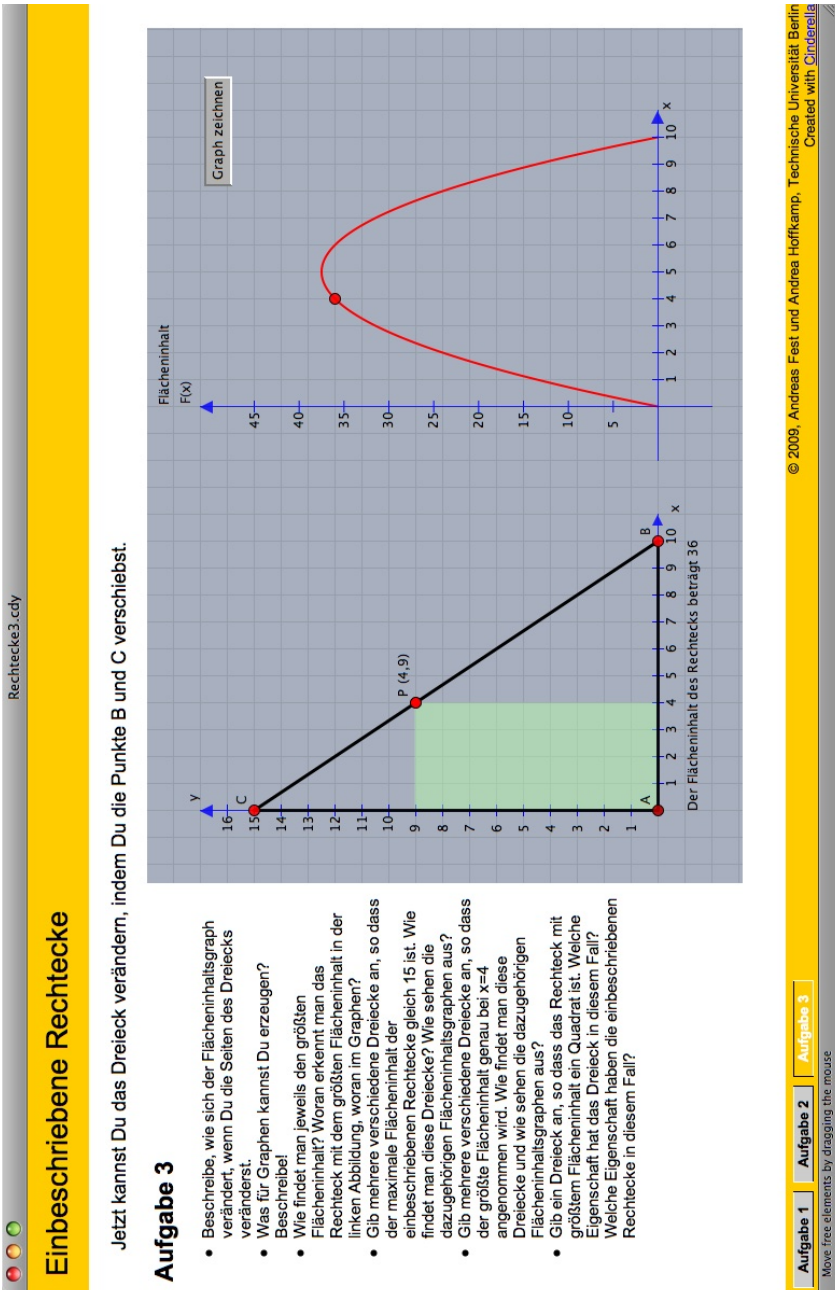

Reise_Teil2
Die Reise
Links siehst Du den Graphen aus Aufgabe 1 wieder. Er zeigt Dir den zurückgelegten Weg abhängig von der Zeit. Der Graph rechts zeigt Dir jeweils die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt der Reise. Du kannst die blauen Punkte in beiden Graphen bewegen.
Aufgabe 2
Überlege:
• Wie hoch ist die Geschwindigkeit zwischen C und D? Wie kann man das ablesen?
• Kann man die Geschwindigkeit zwischen C und D auch herausfinden, wenn man nur den linken Graphen sieht? Wenn ja, wie?
• Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? Wie liest man das ab? Wie kann man die höchste Geschwindigkeit erkennen, wenn man nur den linken Graphen sieht?
• Kann man mit Hilfe des rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist?
[km]
[Std]
A
B
C
D
E
F
[km/h]
[Std]
© 2008, Andreas Fest und Andrea Hoffkamp, Technische Universität Berlin
Created with Cinderella
Aufgabe 1
Aufgabe 2
Aufgabe 3
Move free elements by dragging the mouse


Reise_Teil3
Die Reise
Nun kannst Du Deine eigene Fahrt planen. Im rechten Graphen kannst Du durch Klicken und Ziehen der Balken die Geschwindigkeiten einstellen. Durch Ziehen der grünen Punkte läßt sich die Höhe der Balken verstellen, durch Ziehen der roten Punkte die Breite der Balken. Die blauen Punkte sind wieder in beiden Graphen beweglich und Du kannst wieder die Animation betrachten.
Aufgabe 3
Beobachte, wie sich der linke Graph verändert, wenn Du die Balken im rechten Graphen veränderst. Beschreibe Deine Beobachtung.
Herr Paulsen möchte mit dem Auto am Wochenende an einen See fahren. Das sind 280 Kilometer mit dem Auto. Herr Paulsen möchte um 9:00 Uhr losfahren und um 13:30 Uhr ankommen. Außerdem möchte er insgesamt mindestens eine Stunde Pause machen und nicht schneller als 140 km/h fahren. Welche Möglichkeiten hat er? Probiere verschiedene Möglichkeiten aus.
Prüfe eigene Lösung
• Wie viele Lösungen gibt es bei dieser Aufgabe. Sind alle Lösungen in der Praxis durchführbar?
• Betrachte nochmals den Graphen aus Aufgabe 1. Glaubst Du, dass er die beschriebene Situation exakt wiedergibt? Wenn nicht, was müsste man verändern?
[km]
280 260 240 220 200 180 160 140 120 100 80 60 40 20
1 2 3 4
[Std]
[km/h]
140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 20 10
1 2 3 4
[Std]
Aufgabe 1
Aufgabe 2
Aufgabe 3
© 2008, Andreas Fest und Andrea Hoffkamp, Technische Universität Berlin
Created with Cinderella
Cinderella 2.1 build 1002 (2008/06/19 13:07) – http://cinderella.de

A.3 Einbeschriebene Rechtecke




Rechtecke2.cdy
Einbeschriebene Rechtecke
Wenn man den Flächeninhalt F(x) des Rechtecks abhängig von der x-Koordinate von P in einem Koordinatensystem abträgt, so erhält man einen Graphen. In der Abbildung kannst Du den Punkt P bewegen, um mehr über diesen Graphen herauszufinden.
Aufgabe 2
• Beschreibe diesen Graphen möglichst genau.
• Erkläre anhand des Graphen, welche Flächeninhaltswerte einmal, zweimal, bzw. keinmal vorkommen.
• Wann ist der Flächeninhalt am größten?
• Warum hat der Graph diese Gestalt?
P (2.95,10.57)
C
A
B
x
y
Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 31.2199
Flächeninhalt F(x)
© 2009, Andreas Fest und Andrea Hoffkamp, Technische Universität Berlin
Created with Cinderella
Aufgabe 1
Aufgabe 2
Aufgabe 3
Move free elements by dragging the mouse


Rechtecke3.cdy
Einbeschriebene Rechtecke
Jetzt kannst Du das Dreieck verändern, indem Du die Punkte B und C verschiebst.
Aufgabe 3
• Beschreibe, wie sich der Flächeninhaltsgraph verändert, wenn Du die Seiten des Dreiecks veränderst.
• Was für Graphen kannst Du erzeugen? Beschreibe!
• Wie findet man jeweils den größten Flächeninhalt? Woran erkennt man das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt in der linken Abbildung, woran im Graphen?
• Gib mehrere verschiedene Dreiecke an, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist. Wie findet man diese Dreiecke? Wie sehen die dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen aus?
• Gib mehrere verschiedene Dreiecke an, so dass der größte Flächeninhalt genau bei x=4 angenommen wird. Wie findet man diese Dreiecke und wie sehen die dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen aus?
• Gib ein Dreieck an, so dass das Rechteck mit größtem Flächeninhalt ein Quadrat ist. Welche Eigenschaft hat das Dreieck in diesem Fall? Welche Eigenschaft haben die einbeschriebenen Rechtecke in diesem Fall?
P (4,9)
Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 36
Flächeninhalt
F(x)
Graph zeichnen
© 2009, Andreas Fest und Andrea Hoffkamp, Technische Universität Berlin
Created with Cinderella
Aufgabe 1
Aufgabe 2
Aufgabe 3
Move free elements by dragging the mouse

B Arbeitsbögen zu den Lernumgebungen

B.1 Arbeitsbogen zur Lernumgebung „Dreiecksfläche"

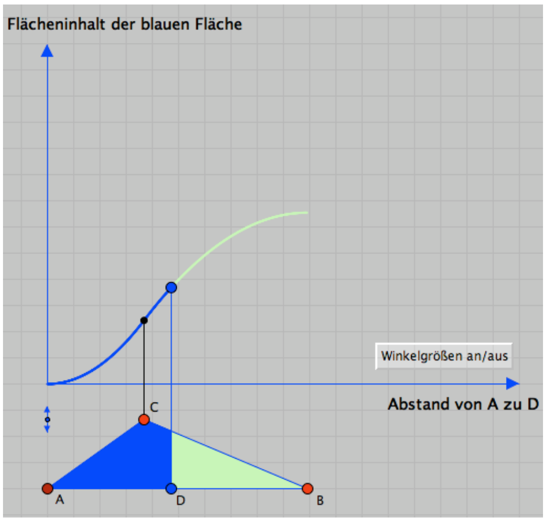
Name:	Arbeitsblatt zur Aufgabe "Dreiecksfläche"	Datum:

Bearbeite die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Lerneinheit im Internet. Notiere Deine Lösungen auf dem Arbeitsblatt.

Die Lerneinheit findest Du unter der folgenden Internetadresse:

http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp/Material/Dreieck/dreieck.html

Der Flächeninhalt der blauen Fläche ändert sich in Abhängigkeit vom Abstand von A zu D. Diese Abhängigkeit kann man mit Hilfe eines Graphen darstellen.



1. Beschreibe die Form des Graphen möglichst genau!

Abbildung B.1: Arbeitsbogen *Dreiecksfläche*, Seite 1.

2. Warum hat der Graph diese Gestalt?

3. Was geschieht bzw. ändert sich am schwarzen Punkt über C? Und warum?

4. Wie sieht der Graph aus, wenn C direkt über A oder B liegt? Beschreibe in Worten! Warum sieht der Graph in diesem Fall so aus?

5. Wie hängt die Form des Graphen von den Winkeln des Dreiecks ab? (Z.B. wenn der Winkel α größer ist als β oder wenn beide Winkel gleich groß sind.) Beschreibe in Worten!

6. Was für Graphen kannst Du erzeugen? Skizziere die Graphen und die dazugehörigen Dreiecke! (nächste Seite)

Abbildung B.2: Arbeitsbogen *Dreiecksfläche*, Seite 2.

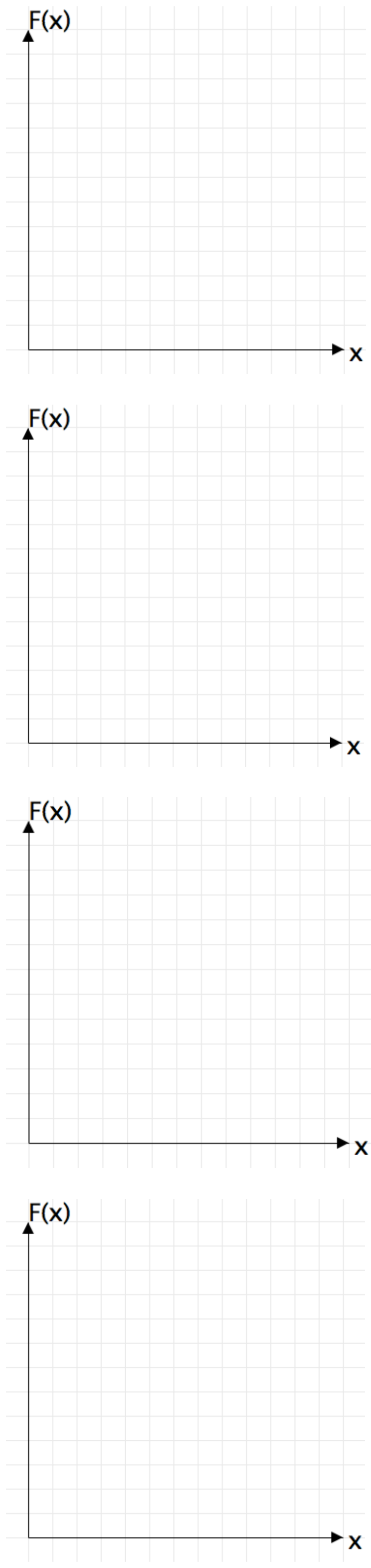


Abbildung B.3: Arbeitsbogen *Dreiecksfläche*, Seite 3.

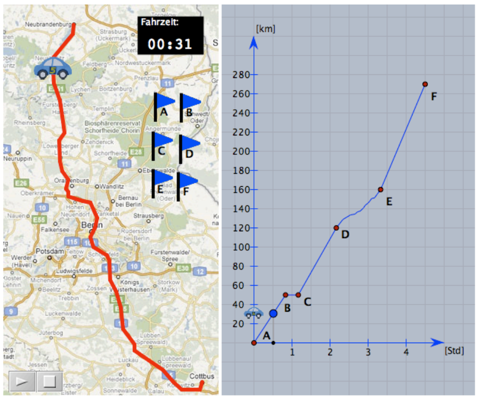
B.2 Arbeitsbogen zur Lernumgebung „Die Reise“

Name:	Arbeitsblatt zur Aufgabe "Die Reise"	Datum:

Bearbeite die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Lerneinheit im Internet. Notiere Deine Lösungen auf dem Arbeitsblatt.
Die Lerneinheit findest Du unter der folgenden Internetadresse:

http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp/Material/Reise

<u>Aufgabe 1</u>:
Die Landkarte und der abgebildete Graph beschreiben eine Autofahrt von Neubrandenburg nach Cottbus. Markiere die Stationen A bis F der Fahrt auf der Landkarte.



Quelle: ©2008 Google - Kartendaten ©2008 PPWK Teleatlas

a) Wie weit fährt man insgesamt? Wie lange dauert die Reise?

b) Wo befindet man sich nach drei Stunden Fahrt und wie weit ist man gefahren?

c) Was passiert zwischen den Stationen B und C?

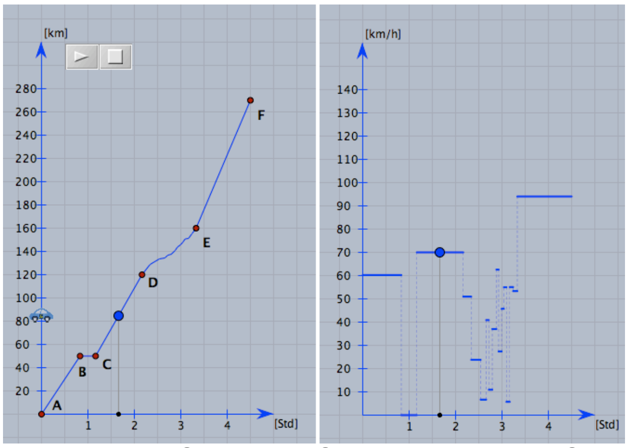
d) Was passiert zwischen den Stationen D und E?

e) Wie hoch ist die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit?

Abbildung B.4: Arbeitsbogen *Die Reise*, Seite 1.

Aufgabe 2:

Links siehst Du Graphen aus Aufgabe 1 wieder. Er zeigt Dir den zurückgelegten Weg abhängig von der Zeit, deswegen nennt man den Graphen einen *Weg-Zeit-Graph*. Der Graph rechts zeigt Dir jeweils die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt der Reise, deswegen nennt man den Graphen einen *Geschwindigkeits-Zeit-Graph*.



Weg-Zeit-Graph **Geschwindigkeits-Zeit-Graph**

a) Wie hoch ist die Geschwindigkeit zwischen C und D? Wie kann man das ablesen?

b) Kann man die Geschwindigkeit auch ablesen, wenn man nur den Weg-Zeit-Graphen gegeben hat? Wenn ja, wie macht man das?

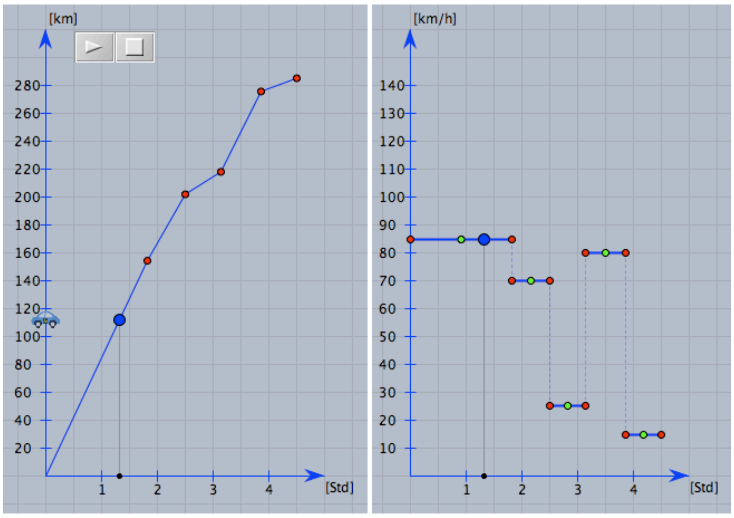
c) Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? Wie liest man das ab? Kann man das wieder nur im linken Graphen erkennen und wie?

d) Kann man mit dem rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist? Wenn ja, wie müsste man vorgehen?

Abbildung B.5: Arbeitsbogen *Die Reise*, Seite 2.

Aufgabe 3:

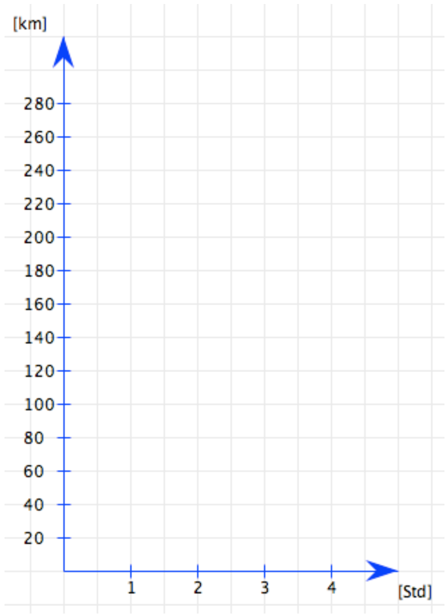
a) Beschreibe, wie sich der Weg-Zeit-Graph ändert, wenn man die Balken im Geschwindigkeits-Zeit-Graphen ändert.

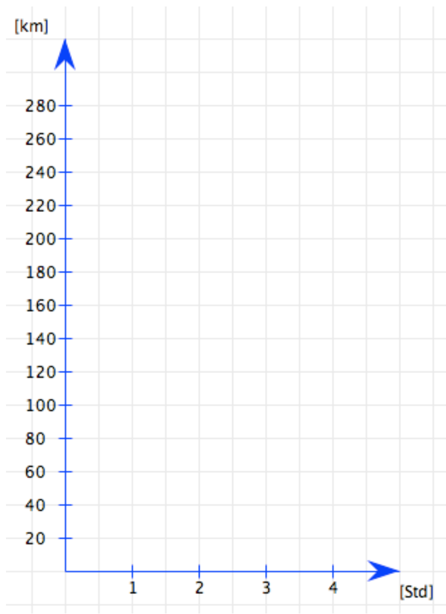


b) Herr Paulsen möchte mit dem Auto am Wochenende an einen See fahren. Das sind 280 Kilometer mit dem Auto. Herr Paulsen möchte um 9:00 Uhr losfahren und um 13:30 Uhr ankommen. Außerdem möchte er insgesamt mindestens eine Stunde Pause machen und nicht schneller als 140 km/h fahren. Welche Möglichkeiten hat er? Probiere verschiedene Möglichkeiten aus und zeichne auf der nächsten Seite zwei mögliche Weg-Zeit-Graphen für Herrn Paulsen.

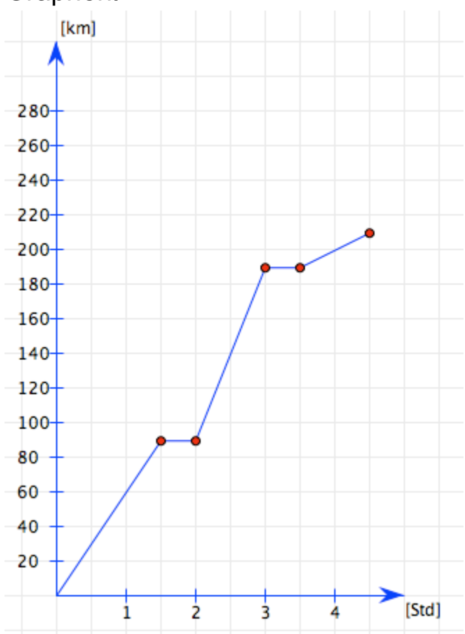
Wie viele Lösungen gibt es zu dieser Aufgabe? Sind alle Lösungen in der Praxis durchführbar?

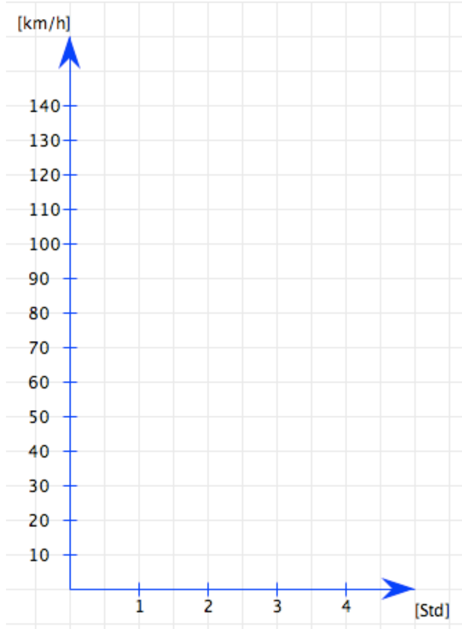
Abbildung B.6: Arbeitsbogen *Die Reise*, Seite 3.





c) Zeichne zu folgendem Weg-Zeit-Graphen einen passenden Geschwindigkeits-Zeit-Graphen.





d) Betrachte nochmals den Graphen aus Aufgabe 1. Glaubst Du, dass er die beschriebene Situation exakt bzw. realistisch wiedergibt? Wenn nicht, was müsste man verändern?

Abbildung B.7: Arbeitsbogen *Die Reise*, Seite 4.

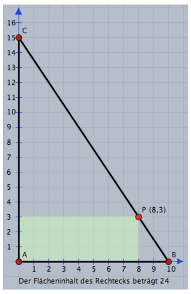
B.3 Arbeitsbogen zur Lernumgebung „Einbeschriebene Rechtecke“

Name:	Arbeitsblatt zur Lerneinheit „Einbeschriebene Rechtecke“	Datum:

Bearbeite die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Lerneinheit im Internet. Notiere Deine Lösungen auf dem Arbeitsblatt.
Die Lerneinheit findest Du unter der folgenden Internetadresse:

http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp/Material/Rechtecke/

<u>Aufgabe 1:</u>
Gegeben ist das abgebildete Dreieck ABC. Jeder Punkt der Dreiecksseite BC ist Eckpunkt eines Rechtecks, das dem Dreieck einbeschrieben ist. Die Seiten der einbeschriebenen Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachsen. Der Punkt A ist immer ein Eckpunkt des Rechtecks.



a) Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt des Rechtecks verändert, wenn man P auf BC von B nach C bewegt:

b) Wann ist der Flächeninhalt gleich 0?

c) Welche Werte kann der Flächeninhalt annehmen? Auch 100?

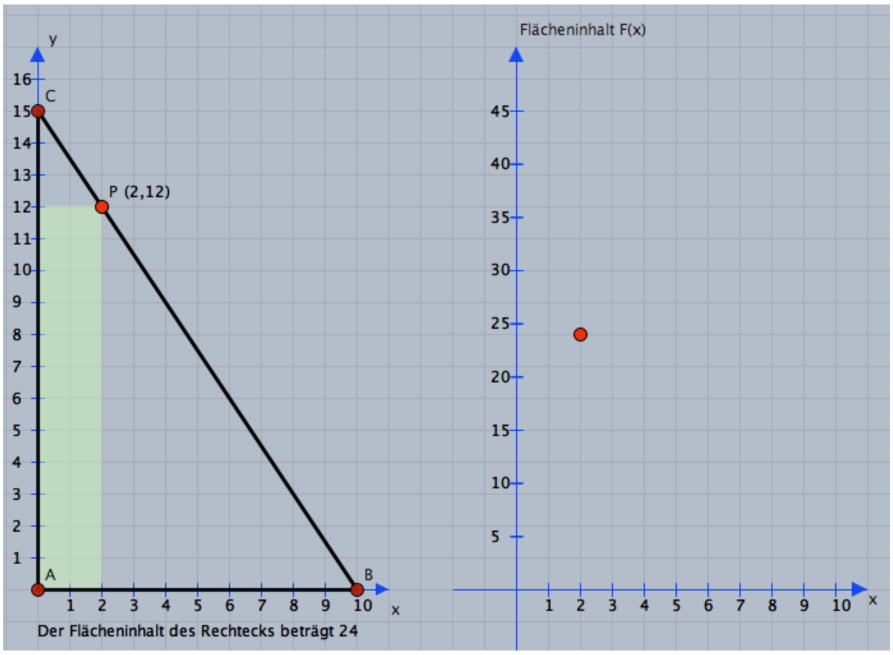
d) Gibt es mehrere verschiedene Rechtecke, die aber denselben Flächeninhalt besitzen? Wenn ja, suche mehrere Beispiele dafür!

e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten von P und dem Flächeninhalt des Rechtecks?

Abbildung B.8: Arbeitsbogen *Einbeschriebene Rechtecke*, Seite 1.

Aufgabe 2:

Wenn man den Flächeninhalt F(x) des Rechtecks abhängig von der x-Koordinate von P in einem Koordinatensystem abträgt, so erhält man einen Graphen.



a) Skizziere den Graphen in obiger Abbildung.

b) Erkläre anhand des Graphen, welche Flächeninhaltswerte einmal, zweimal, bzw. keinmal vorkommen.

c) Wann ist der Flächeninhalt am größten?

d) Warum hat der Graph diese Gestalt? Erkläre!

Abbildung B.9: Arbeitsbogen *Einbeschriebene Rechtecke*, Seite 2.

Aufgabe 3:

a) Beschreibe, wie sich der Flächeninhaltsgraph verändert, wenn Du die Seiten des Dreiecks veränderst.

b) Was für Graphen kannst Du erzeugen? Beschreibe!

c) Wie findet man jeweils den größten Flächeninhalt? Woran erkennt man das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt in der linken Abbildung, woran im Graphen?

d) Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist. Skizziere auch die dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen.

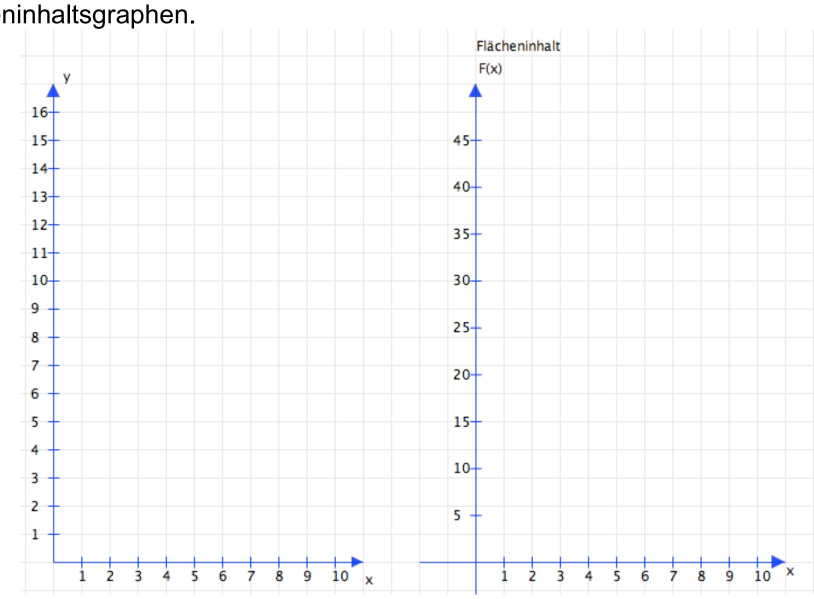
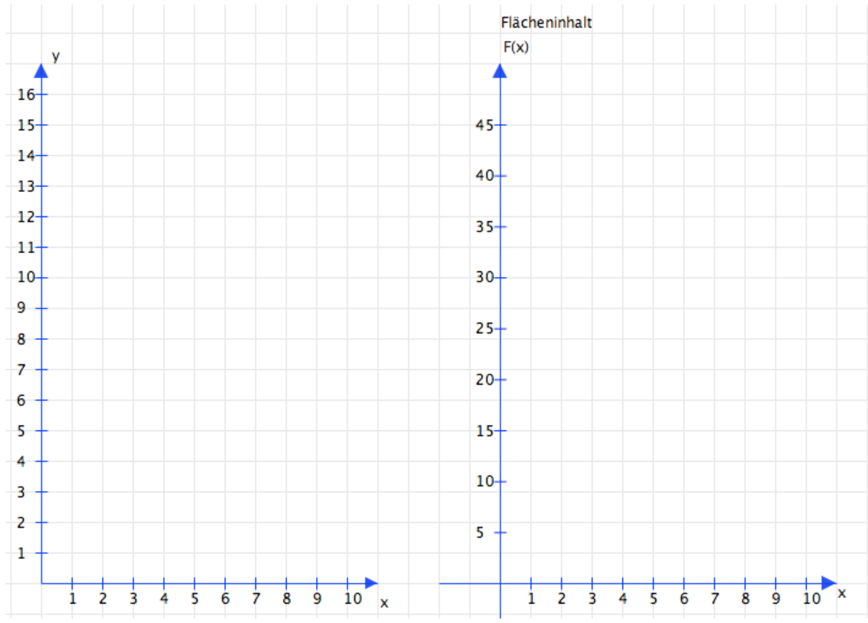


Abbildung B.10: Arbeitsbogen *Einbeschriebene Rechtecke*, Seite 3.



Wie findet man diese Dreiecke?

e) Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der größte Flächeninhalt genau bei x=4 angenommen wird. Skizziere auch die dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen.

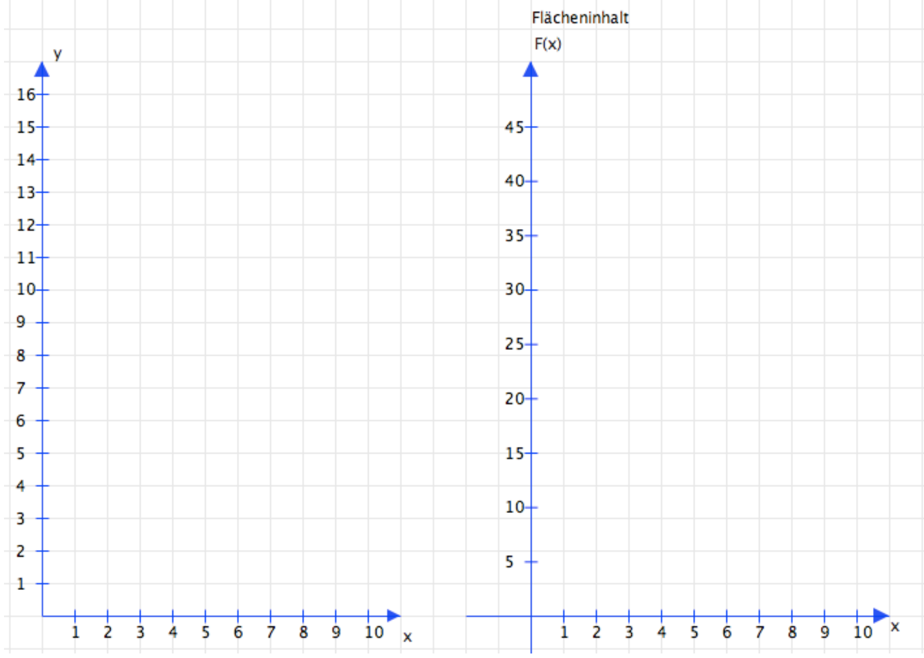
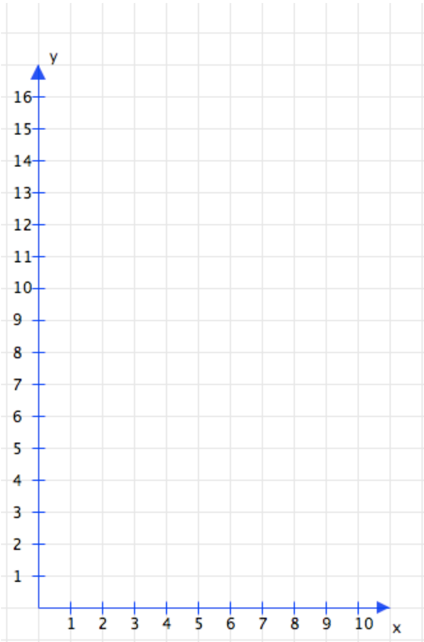
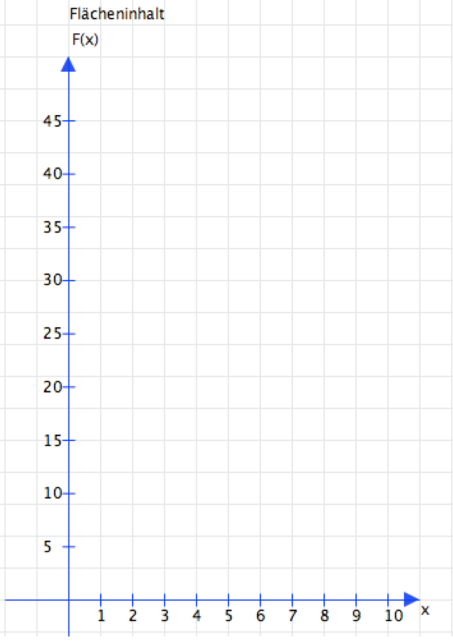


Abbildung B.11: Arbeitsbogen *Einbeschriebene Rechtecke*, Seite 4.





Wie findet man diese Dreiecke?

f) Zeichne ein Dreieck, so dass das Rechteck mit größtem Flächeninhalt ein Quadrat ist.

Welche Eigenschaft hat das Dreieck in diesem Fall?

Welche Eigenschaft haben die einbeschriebenen Rechtecke in diesem Fall?

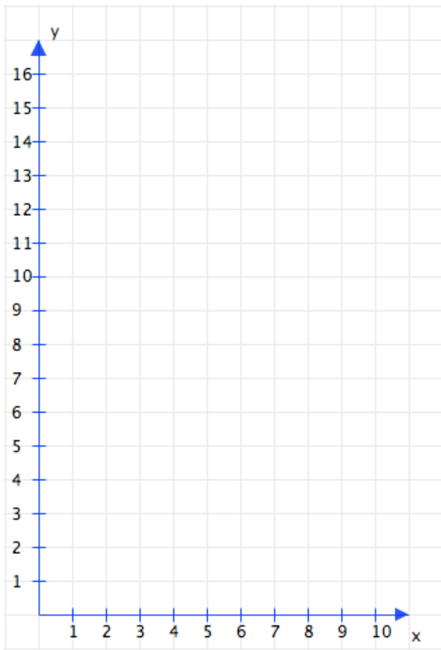


Abbildung B.12: Arbeitsbogen *Einbeschriebene Rechtecke*, Seite 5.

C Fragebögen

Der Fragebogen wurde nach dem Einsatz in der ersten Versuchsklasse nochmals überarbeitet. Die folgenden Abbildungen zeigen die Fragebögen in den Versionen 1 und 2. Die erste Seite des Fragebogens stimmt in beiden Versionen überein und wird deswegen nur einmal abgebildet.

Name: Datum:	Fragebogen zur Arbeit mit dem Computer

1. Wie oft wird in Deiner Klasse der Computer im Matheunterricht eingesetzt?

   ☐ immer ☐ oft ☐ gelegentlich ☐ selten ☐ nie

2. Würdest Du gerne häufiger mit dem Computer im Matheunterricht arbeiten?

   ☐ ja ☐ nein, es ist gut so, wie es ist ☐ nein, lieber nicht so häufig

3. Gibt es etwas, was Du besonders gut findest an der Arbeit mit dem Computer? Wenn ja, was?

4. Was ist für Dich anders, wenn Du beim Lösen mathematischer Probleme den Computer benutzt?

Abbildung C.13: Fragebogen, Seite 1, Version 1 und 2.

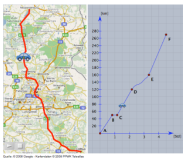
5. Hat Dir der Computer beim Verständnis der Funktionsgraphen geholfen?

Dreiecksfläche:

☐ ja, sehr ☐ ja, ein wenig ☐ nein, das hab ich auch **mit** Computer **nicht** verstanden

☐ nein, das hätte ich besser **ohne** Computer verstanden ☐ Sonstiges: ______________________________

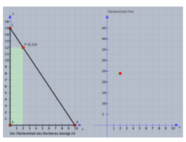
Reise:



☐ ja, sehr ☐ ja, ein wenig ☐ nein, das hab ich auch **mit** Computer **nicht** verstanden

☐ nein, das hätte ich besser **ohne** Computer verstanden ☐ Sonstiges: ______________________________

Einbeschriebene Rechtecke:



☐ ja, sehr ☐ ja, ein wenig ☐ nein, das hab ich auch **mit** Computer **nicht** verstanden

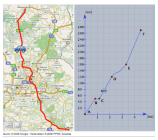
☐ nein, das hätte ich besser **ohne** Computer verstanden ☐ Sonstiges: ______________________________

Abbildung C.14: Fragebogen, Seite 2, Version 1.

6. Kannst Du sagen, was genau Du besser verstanden hast, weil Dir der Computer zur Verfügung stand?

Dreiecksfläche:

Reise:



Einbeschriebene Rechtecke:

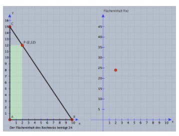


Abbildung C.15: Fragebogen, Seite 3, Version 1.

Kritik und Lob:
Hier hast Du die Möglichkeit, einen Kommentar zu den vergangenen Unterrichtsstunden zu schreiben
(z.B. Was ist Dir aufgefallen? Was würdest Du ändern? Was würdest Du beibehalten? Hattest Du den Eindruck, dass es Dir geholfen hat und warum bzw. warum nicht?):

Abbildung C.16: Fragebogen, Seite 2, Version 2.

D Analysedokumente und vollständige Feintranskripte

D.1 Transkriptionsregeln

Der Schwerpunkt der Transkription liegt auf dem linguistischen Teil. Mundart (zum Beispiel ‚Berlinerisch‘) wurde ins Hochdeutsche übertragen. Nonverbale Anteile (Computeraktionen, Schreiben auf dem Arbeitsbogen usw.) sind kursiv geschrieben und in Klammern gesetzt. Längere Pausen sind durch Angabe der Sekunden in Klammern gekennzeichnet. Paralinguistische und andere nonverbale Anteile wie Hebungen, Senkungen oder Kopfschütteln, Blicke in eine bestimmte Richtung sind nur partiell transkribiert, und zwar dann, wenn es zum Verständnis der Interaktion nötig ist.

Tabelle A: Einige Transkriptionsregeln im Überblick

(bewegt D)	Paralinguistischer oder nonverbaler Anteil, Computeraktion
Wor-	Abbrechen des Wortes oder Satzes
(.)	kurzes Absetzen
(..)	längeres Absetzen
(Wort)	unverständliche Äußerung, wahrscheinlicher Wortlaut
( )	unverständliche Äußerung, Wortlaut kann nicht nachvollzogen werden
wort, wort [wort	gleichzeitiges Sprechen
wort	betontes Wort

D.2 Analysedokumente zu den drei Lernumgebungen

Dreiecksfläche
Gymnasium 1
Schülerinnen mit Note im 2er-3er-Bereich

Ausgewählt wurden verschiedene Episoden. Die erste Episode bezieht sich auf die Behandlung von Aufgabe 1. Sie wurde ausgewählt, da die Schülerinnen bei der Beschreibung des Graphen auf die Situation des Dreiecks zurückgreifen und darin schon Erklärungsansätze stecken, die schon in Richtung Aufgabe 2 gehen. Die zweite transkribierte Episode bezieht sich auf einen Lehrer(Forscher)eingriff, bei dem zu sehen ist, dass die Schülerinnen bisher noch keine Verbindung zwischen dem Graphen und der Situation geschaffen hatten. Die dritte Episode zeigt die Behandlung von Aufgabe 2.

Abkürzungen:
S1 Schülerin 1
S2 Schülerin 2
L   Lehrer (hier: Forscher)
AB Arbeitsbogen

Vorgeschichte und allgemeine Bemerkungen:
Da es technische Probleme mit den PCs im Computerraum gab, arbeiteten in der ersten Stunde nur die videographierten Schülerinnen am Computer, alle anderen hatten noch keinen Zugang zu den Computern. Insgesamt war es sehr unruhig und dadurch auch recht unkonzentriert, da die gesamte Klasse in einen anderen Computerraum umziehen musste. Bis zu diesem Zeitpunkt hat mindestens eine der Schülerinnen (S1) den Einführungstext auf dem Bildschirm gelesen. S1 hat dann kurz versucht ein paar Punkte zu bewegen und dabei entdeckt, dass sich A nicht bewegen lässt, wohl aber C und D. Sie lesen die Aufgabe 1 ‚Beschreibe die Form des Graphen möglichst genau' laut vor und S1 fährt den Graphen ein paar Male mit dem Mauszeiger ab (‚die hier'). Sie einigen sich darauf, dass S1 schreibt. S1 findet, dass der Graph eine ‚Sinuskurve' sei und S2 zuckt mit den Schultern. S1 schreibt dann auf den AB den ersten Satz ‚Der vorhandene Graph ähnelt einer Sinusfunktion.' Als S1 fortfährt in ihrer Beschreibung, entwickelt sich folgendes Gespräch.
Zeit: 2'21''

1 S1: Der Graph ähm steigt halt gleichmäßig an und (.) genau, also ist halt monoton wachsend und dann
2 am höchsten Punkt dann wieder, ab da dann wieder monoton sinkend. *(S2 nickt und zuckt die*
3 *Schultern)* Genau, also bis zum (.) bis zur Höhe des Punkt Bs *(S1 schreibt)*
4 S2: Ja. *(bewegt den Punkt D)*
5 S1: Oder ich kann ja schreiben ‚bis zum x-Wert' ähm ‚von Punkt B'? *(schaut zu S2, S2 schiebt D ein*
paar Male hin und her) Oder? *(S1 schreibt)*
6 S2: *(verschiebt C horizontal)* Nee, aber guck mal, wenn ich, wenn ich C zum Beispiel verschiebe
7 ändert sich das doch.
8 S1: *(schaut auf)* Ja, aber der Flächeninhalt ändert sich aber nicht. Es ist ja trotzdem monoton wachsend
9 bis dahin. *(zeigt auf Monitor)*
10 S2: Stimmt. *(schiebt C nach rechts über B)* (Ich mein',) dann ist es aber kein Sinus mehr.
11 S1: Nee, so nicht, weil es so ääh (.) rechtwinklig ist.
12 S2: *(schiebt C horizontal hin und her)* Ja. (Weiß ich doch).
13 S1: Mach es mal so, wie es vorher war. *(schreibt)*
14 S2: *(verschiebt C weiter nach links)* Hmm, so?
15 S1: Ja, ungefähr. (..) *(schreibend)* zum x-Wert von Punkt B ist der Graph monoton wachsend (..)
16 monoton wachsend, genau, er fällt da noch nicht, da ist dann kein Graph dabei.
17 S2: (   ) nee, das Dreieck ist dann ja zuende (..) Und in Abhängigkeit von A *(verschiebt D)* steigt das
18 halt. (Oder) je weiter A und D auseinander sind desto-
19 S1: Je größer der Abstand zwischen A und D *(schreibend)* je größer der Abstand zwischen A und D,
20 desto (.) ja (.) desto *(4 sek)* desto deutlicher wird der Graph nachgezeichnet, ähm desto

(5 sek, S1 schaut sich um)
21 S2: Nee, desto äh desto mehr steigt der Graph, oder? Nä, wenn die Entfernung- *(nimmt Maus)* wenn
22 die Entfernung *(schiebt D nach rechts)* größer wird, steigt der Graph doch.
23 S1: Mhm. Desto, desto (.) desto mehr steigt er *(schreibt)*, oder?
24 S2: steigt er an
25 S1: *(schaut auf)* Ja.
26 S2: Ääh, dada-dann kannst Du noch schreiben, weil ähm, dass wenn man (.) ach so (.) Wollen wir
27 dann noch schreiben, dass wenn man den Punkt C verändert, dass sich dann die Funktion auch
28 verändert? *(verschiebt C horizontal)*
29 S1: Mhm, jaa. *(kurze Pause, beide blicken auf Monitor)* Sobald man *(schreibend)* Punkt C seitlich
30 verschiebt, oder?
31 Ja. *(stellt etwas um)* Oh, ich hab ihn jetzt auf Deine Blumen gestellt.
32 S2: Ist nicht schlimm.
33 S1: *(schreibend)* Sobald man Punkt C. Ach, mann, verschrieben *(benutzt Tipex)*. Seitlich verschiebt
(schreibend)
34 S2: ändert sich auch die Funktion
35 S1: ändert sich ähm, ich würde sagen ‚der Anstieg der Funktion' (..) ändert sich
36 S2: Ne,ne, der Anstieg, die Funktion hat keinen Anstieg *(weist mit Mauszeiger auf Graph)*, weil, wenn
37 sie einen Anstieg hätte, wäre sie gerade
38 S1: [Verschieb mal.
39 S2: *(verschiebt C horizontal ein paar Mal hin und her)* Der guck mal, weil der das ääh, da gibt es
40 keinen Anstieg, weil der Anstieg ist überall unterschiedlich. Es gibt keinen genauen Anstieg und
41 schon gar nicht hier *(schiebt C in die Mitte über AB)*. Ich würde einfach sagen, ähm (.) dass (.)
42 ähm (.) ääh verschiebt (.) ändert sich die Funktion, also ist keine Sinusfunktion, weil wir haben da
43 oben geschrieben, dass es eine Sinusfunktion ist, aber sobald man das verschiebt, wird es ja keine
44 Sinusfunktion *(verschiebt C)*
45 S1: *(blickt auf Monitor und verschiebt C)* Mhm.
46 S2: Also müssen wir sagen ‚ändert sich die Funktion'
47 S1: *(schiebt C über die Mitte von AB)* So wäre es noch (grade eine) Sinusfunktion.
48 S2: Ja.
49 S1: *(schiebt C ein wenig rechts und links von der Mitte)* Bis hier auch noch (.) so.
50 S2: *(diktierend)* dann ändert sich die Funktion (..) ändert sich die Funktion ähm, aber trotz alledem, es
51 bleibt das ja, was wir da drüber geschrieben haben bleibt trotzdem.
52 S1: Trotz allem, was? *(schreibend)*
53 S2: Na, trotz allem äh, sobald man D verschiebt, steigt die Funktion an. Egal, wo der Punkt C ist.
54 S1: Trotzdem gilt alles andere? *(schaut zu S1)*
55 S2: Ja.
56 S1: *(schreibt und schaut dann auf)* alles andere, was oben beschrieben wurde, oder?
57 S2: (Du kannst) ja in Klammern schreiben ‚Abstand zwischen A und B'.
58 S1: Ja, das weiß sie ja.
59 S2: Ja, schreib trotzdem noch ‚in Klammern Abstand A und B'
60 S1: *(schreibend)* A und <u>D</u>.
61 S2: Ja. A und D.
62 S1: A und D und der Flächeninhalt.
63 S2: Der Flächeninhalt bleibt doch gleich, haben wir doch gesagt, oder?
64 S1: Ja, deswegen ja (..) Das gilt ja.
65 S2: Ja. *(S1 schreibt, kurze Pause)* Ja, würde ich aber nicht schreiben, weil wir reden ja von der
66 Funktion *(kurze Pause)* nicht von dem Dreieck.
67 S1: Ist ja jetzt egal, vielleicht (.) das kann man ja danach vielleicht nochmal schreiben.
Zeit: 9'33''

Der Lösungstext zu Aufgabe 1 auf dem AB lautet: *Der vorhandene Graph ähnelt einer Sinusfunktion. Bis zum x-Wert von Punkt B ist er monoton wachsend. Je größer der Abstand von A und D, desto mehr steigt er an. Sobald man Punkt C seitlich verschiebt, ändert sich die Funktion. Trotz allem gilt alles andere, was oben beschrieben (Abstand A und D, Flächeninhalt, ...)*

S2 liest dann Aufgabe 2 vor ‚Warum hat der Graph diese Gestalt?'. S1 verschiebt C horizontal und versucht den blauen Punkt auf dem Graphen zu bewegen, was ihr nicht gelingt, sie bewegt Punkt D, schaltet die Winkelgrößen an und aus. S2 sagt, dass sie nicht weiß, was sie dazu schreiben soll und liest die nächste Aufgabe vor ‚Was geschieht oder ändert sich am schwarzen Punkt über C?'. Sie bewegen C horizontal nach ganz links/rechts und mittig und einigen sich sehr schnell auf den folgenden Lösungstext zu Aufgabe 3: *Sobald man den Punkt C nach links verschiebt, ähnelt der Graph einer nach unten geöffneten Parabel. Liegt der Punkt in der*

Mitte, ändert sich der Graph zur Sinusfunktion. Liegt der Punkt ganz rechts, so ähnelt die Funktion einer nach oben geöffneten Parabel.
Zeit: 14'59''

Dann liest S2 Aufgabe 4 und beschwert sich, dass sie das schon davor alles gemacht hätten. Sie schlägt vor dann nur zu beschreiben, <u>warum</u> der Graph so aussieht. S2 beginnt sofort zu diktieren und S1 schreibt zunächst auf:
Wie oben schon erwähnt ähneln die Graphen ~~linearen~~ quadratische Funktionen
S2 fragt dann, warum das so sei und S1 sagt, das sei so wegen der rechtwinkligen Dreiecke. Damit ist S2 einverstanden und S1 schreibt weiter: *weil die Dreiecke dann rechtwinklig sind.*

Sie fragen sich, ob man da noch mehr hinschreiben soll, und fragen bei L nach. L liest die bisherigen Lösungen durch und fragt dann, ob sie sich überlegt haben, <u>warum</u> die Graphen diese Gestalt haben und dass diese Frage ja auch bei Aufgabe 2 noch offen sei. Sie sagen, dass sie das nicht wussten. L vermutet, dass die Schülerinnen die Situation und den Graphen bisher noch nicht verbunden haben und fragt deswegen nach.

Zeit: 19'43''
L: Was liest man denn in dem Graphen ab?
S2: *(verschiebt C horizontal)* Na, wie das Dreieck aufgebaut ist, oder? Also das Dreieck als Funktion dargestellt, oder so.
L: Was ist auf der x-Achse?
S2: *(liest)* Abstand von A zu D.
L: Ok, also x-Achse ist Abstand von A zu D.
S2: Ja.
L: und y-Achse?
S2: Flächeninhalt. *(S1 verschiebt D)*
L: Von?
S2: Ach so, von dem Dreieck, also das heißt, wenn, äh, wenn man das bis hierhin verschiebt, wird der Flächeninhalt größer. *(S1 verschiebt C nach rechts)* Und wenn man (.) wenn er hier *(zeigt auf Monitor)* ist, dann ist er am kleinsten. *(S1 schiebt C nach links)*
L: Mhm. Nämlich, also schieb ihn nochmal ganz rüber, das D. *(S1 schiebt D ganz nach rechts)* Auf die andere Seite. *(S1 schiebt D ganz nach links)* Dann hast Du welchen Flächeninhalt?
S1: Null.
L: Null, nä ist, das ist immer Flächeninhalt
S2: *(lächelt)* der blauen Fläche. Ach so.
Zeit: 20'41''

L weist darauf hin, dass sie begründen sollen, warum der Graph, der ja den Flächeninhalt anzeigt, diese Gestalt hat. Dann ist das Gespräch unterbrochen, da die Schülerinnen in einen anderen Raum umziehen. Im neuen Raum Beginnen die Schülerinnen mit der Bearbeitung von Aufgabe 2. Das Transkript beginnt, nachdem S2 aufgefordert hat, Aufgabe 2 zu bearbeiten. S2 beginnt mit einer Formulierungsmöglichkeit.
Zeit: 25''

S2: Weil der Graph die (.) den Flächeninhalt der blauen Fläche widerspiegelt
S1: *(schreibt)* nochmal
S2: *(diktierend)* weil der Graph den Flächeninhalt der blauen Fläche widerspiegelt

Es entsteht eine ca. 1-minütige Pause, in der der S1 schreibt und S2 (die an diesem Tag Geburtstag hat) Gummibärchen verteilt und es zum Beginn der zweiten Stunde klingelt.

S1: Ok. *(schaut auf)*
S2: *(diktierend)* Je größer die Fläche, desto mehr steigt der Graph *(Pause, S1 schreibt)* und der Abstand zwischen A und D wird größer.
S1: Ja, das ist ja je größer die blaue Fläche wird.
S2: Naja, trotzdem.
S1: Ich würde eigentlich sagen ‚je größer die blaue Fläche wird, in Klammern Abstand von A zu D, desto mehr steigt der Graph'
S2: Ja, ok. Schreib so.

Nun entsteht eine ca. 30-sekündige Pause, in der S1 ihren Vorschlag leise diktierend aufschreibt und S2 Gummibärchen holt.

S1: Ok. *(schaut auf)*Warum sieht der Graph denn so aus? *(11 sek)*

98 S2: Hmm, warum ist es, wenn C sich verschiebt so? Haben wir hier *(zeigt auf AB)* gar nicht beachtet,
99 aber, na ja. *(5 sek)* Ok, ähm *(12 sek)* Ja, laß uns hier noch was zum Flächeninhalt schreiben *(zeigt auf AB)*
100 S1: Mhm. *(3 sek)* Also, je weiter man D verschiebt, desto größer wird der Flächeninhalt *(S2 schiebt C nach links über A) (5 sek)*
101 S2: Wenn das Dreieck rechtwinklig ist (..) ääh *(16 sek)* Du musst in die Kamera auch gucken *(S2 zieht*
102 *S1 ins Bild)* damit sie sieht, wie du denkst *(beide lachen)*
103 S1: Hmmm (..) ääh (..) na ja.
104 S2: Komm, dann laß erst mal nächste Aufgabe (   )
105 S1: Der x-Wert zeigt an, wie groß der Flächeninhalt is-, ach Quatsch. Naja, eigentlich ist es ja so so,
106 umso weiter man D nach rechts verschiebt *(schiebt D nach rechts)*, umso größer wird der
107 Flächeninhalt, was im Graph dargestellt ist.
108 S2: [Ja. Ja. Dann laß uns das da auch noch hinschreiben.
109 S1: Das haben wir doch schon überall geschrieben.
110 S2: Na, dann schreiben wir es halt nochmal. *(schaut sich um)* Ja, man darf nicht einmal anfangen mit
111 den Gummibärchen, da wird man ja süchtig von. *(7 sek, S1 schreibt)*
112 S1: Hmm, das ist aber nicht die Frage mit D, mit Abstand von A zu D
113 S2: *(schaut auf den AB)* Hä, wir wollten es doch da oben schreiben.
114 S1: Ach so. *(S1 nimmt vermutlich Tippex und übertüncht eine Stelle im Lösungstext von Aufgabe 4)*
115 S2: Warum hat der Graph die Gestalt? *(zeigt auf den AB).* Wenn ich D verschiebe, wird der
116 Flächeninhalt größer und der Graph steigt mehr an.
117 S1: Ja, das haben wir eben, das haben wir doch schon geschrieben.
118 S2: Ach so.
Zeit: 5'25''

Der Lösungstext zu Aufgabe 2 lautet zu diesem Zeitpunkt: *Weil der Graph den Flächeninhalt der blauen Fläche widerspiegelt. Je größer die blaue Fläche wird (Abstand von A und D), desto stärker steigt der Graph.*

Dann gehen sie zu Aufgabe 5. Sie stellen die Winkelgrößen an und verschieben C horizontal. Sie kommen überein, dass sie alles, was es hier zu sagen gäbe, schon bei Aufgabe 2 und 3 geschrieben haben und fragen L, ob es dazu noch etwas anderes zu sagen gibt. L liest sich ihre bisherige Lösung zu Aufgabe 2 durch und möchte erreichen, dass außer der Monotonie auch die spezielle Form des Graphen (S-Form) begründet wird. L zeichnet eine Gerade mit positiver Steigung und weist darauf hin, dass diese Gerade alles erfüllt, was die Schülerinnen bisher geschrieben haben. Das Transkript beginnt, als S2 eine erste Begründung gibt.

Zeit: 8'51''
119 S2: Das liegt halt daran, dass es ein Dreieck ist. Ein Dreieck ist ja nun nicht gerade gleichmäßig.
120 L: Daran liegt es. Genau.
121 S2: Weil, guck mal, das Dreieck, bis zu <u>der</u> Stelle *(schiebt D unter C)* hat es ja einen bestimmten
122 Flächeninhalt und danach steigt es ja noch mehr, weil hier ja *(schiebt D ganz nach rechts)* eine
123 größere Fläche ist, oder?
124 S1: Genau. Hier, hier *(zeigt auf Monitor)* steigt nämlich der, ääh ja *(lächelt)*
125 S2: *(lächelt und zeigt mit Mauszeiger auf Graphabschnitte)* Da steigt er und da sinkt er.
126 S1: Genau. Da sinkt er *(fährt mit Maus den zweiten Graphabschnitt ab)*, also da wird, da steigt er nicht
127 mehr gleichmäßig und da *(fährt mit Mauszeiger den ersten Graphabschnitt ab)* steigt er erstmal,
128 weil hier nämlich das hier steigt *(fährt mit Mauszeiger die Seite AC ab)* und das wieder sinkt *(fährt*
129 *Seite CB ab)*
130 L: Wer steigt?
131 S1: Äh, d-d der, die Strecke AC . Ähm.
132 S2: Na, bis zum Punkt C steigt es.
133 S1: Ja. *(verschiebt C horizontal weiter nach rechts)* Und hier *(weist mit Maus auf Seite CB)* fällt es
134 nämlich steiler, bis er, äh
135 S2: Nee, nee. Es <u>steigt</u> und dann, wenn es jetzt hier *(zeigt auf Monitor)* noch weitergehen würde, also,
136 wenn jetzt hier noch ein Dreieck dran wäre, dann würde es fallen, oder? *(schaut zu L)*
137 L: Würde es dann fallen? *(4 sek)*
138 S2: Ne, dann würde es wieder <u>so</u> *(zeigt mit Finger nach oben)* sein.
139 L: Weil?
140 S2: Na, weil es ja ein Flächeninhalt trotzdem ist.
Zeit: 10'08''

Um den Schülerinnen an der Stelle einen weiteren Impuls zu geben, fragt L, wozu denn eine Gerade mit positiver Steigung gehören könnte. S2 sagt zunächst: ‚Wenn jemand konstant rennt'. L fragt dann nach einer möglichen Form, die dazu passen könnte. Die Schülerinnen nennen ‚Viereck' und dann auf Nachfrage ‚Quadrat'. Sie bemerken, dass in diesem Fall ‚das gleichmäßig steigt'. L lässt die beiden dann alleine und sie versuchen eine Formulierung zu finden.

Zeit: 11'09''
141 S1: Wie wollen wir das formulieren?
142 S2: Hmm, na ja, da es ein Drei-
143 S1: Weil, weil der Flächeninhalt bis zum Punkt C-, weil der Flächeninhalt vom Punkt A bis zum Punkt
144 C größer wird
145 S2: Äh?
146 S1: Ja, doch, äh steigt der Graph hier (.) wie wollen wir das denn formulieren? (..) Steigt er hier stärker
147 und dort steigt er nicht mehr so stark *(zeigt auf Monitor)*
148 S2: Ähmm, vom Punkt A bis zum Punkt C steigt der Graph relativ stark an *(S1 schreibt)* Halt, müssen
149 wir erst mal überlegen warum. Na, weil der Flächeninhalt größer wird
150 S1: [Ja, weil der Flächeninhalt bis zum Punkt C größer wird
151 S2: Und, äh, nach dem Punkt C bis zum Punkt B, ähm, steigt der Graph nicht mehr allzu stark, da es ja
152 hier unten wieder kleiner wird *(zeigt auf Monitor)*. Ja, da da es halt, weil dann müsste es ja hier
153 wieder so gleichmässig sein, weil es ja sozusagen hier, weil hier der Winkel kleiner wird.
154 S1: [Hmm, ja ja kleiner wird
155 Na, der Winkel, der ist ja hier überall gleich groß. Bloß hier
156 S2: Nee. Hier wird er, guck mal, hier wird er doch kleiner *(zeigt auf Monitor)* der Winkel, also steigt
157 die Funktio-
158 S1: Der Winkel, der ist hier überall gleich groß. Deshalb gibt es ja auch keinen Satz WWW.
159 S2: Ja, ich weiß doch. Guck mal, hier *(zeigt auf Monitor)* steigt der Graph, bis zu dem Punkt
160 S1: Mhm.
161 S2: Und hier sinkt es doch, also hier sinkt es doch, weil der Winkel hier doch kleiner wird, der ist doch
161 (.) na das fällt doch, das ist doch-
163 S1: Weil der Winkel Alpha größer ist als Winkel Beta.
164 S2: Ja. Genau.
165 S1: Ja, wie soll ich das denn schreiben?
166 S2: Na, wie wir es gerade gesagt haben.
167 S1: Hmmm.
168 S2: Vom Punkt A bis zum Punkt C steigt die Parabel stark an *(S1 schreibt)*
169 S1: *(schreibend)* steigt der Graph stark an
170 S2: und vom Punkt C bis zu-
171 S1: Warte mal, erst mal ‚weil' (.) *(schreibend)* stark an, weil der Flächeninhalt größer wird bis zu dem
172 Punkt.
173 S2: Ja.
Zeit: 13'27''

Nun entsteht eine Pause von ca. 1 Minute, in der S1 schreibt und S2 sich umsieht. Sie mischen sich in Diskussionen einiger Mitschüler ein, die behaupten, es läge eine Tangensfunktion vor. Dann machen sie weiter.

Zeit: 14'32''
174 S2: *(diktierend)* danach steigt sie nicht ganz so stark an.
175 S1: *(schreibend)* danach
176 S2: steigt sie nicht all-
177 S1: steigt er (..) weniger stark an
178 S2: Ähm, weil der Winkel Beta kleiner
179 S1: *(schreibend)* weniger stark, aah, *(nimmt Tippex)* weniger stark
180 S2: Ja, warte mal, also, äh, sie kann ja nicht sinken, weil der Flächeninhalt ja größer wird, aber sie
181 kann nicht stärker ansteigen, weil es ja ein Dreieck ist und äh, äh, von Punkt C bis Punkt D das
182 Dreieck ja sozusagen äh
183 S1: C bis B
184 S2: Ja, C bis B, ja das da halt runter geht, also der Winkel halt kleiner ist.
185 S1: DB, Deutsche Bahn. *(schreibend)* steigt er weniger stark an, weil Beta *(Pause)* Alpha ist.
186 S2: Ja, reicht jetzt.
187 S1: kleiner als Alpha ist, hmm, kann man das noch genauer schreiben? Vielleicht.
188 S2: *(schiebt C nach rechts)* Na, aber guck mal, hier kann ja Beta auch größer als Alpha sein. Das liegt
189 daran, dass das halt hier runter geht. *(verschiebt C)*
190 S1: Na, weil der Flächeninhalt kleiner ist.
191 S2: Hä, aber der Flächeninhalt ist nicht kleiner *(schiebt C schnell hin und her)* Der Flächeninhalt kann

nicht kleiner werden, er wird immer größer (..) wenn Du das hier verschiebst *(verschiebt D)* Je mehr Du das nach hier verschiebst, desto mehr-
S1: Ja, aber wie, hmm *(S2 verschiebt D hin und her)*
S2: Wie, wie nennt man denn das? (.) Weil die Strecke BC aber fällt.
S1: Ja. Genau. *(S1 schreibt)*
Zeit: 16’17’’

Die Lösung auf dem AB zu Aufgabe 2 lautet dann letztendlich: *Weil der Graph den Flächeninhalt der blauen Fläche widerspiegelt. Je größer die blaue Fläche wird (Abstand von A und D), desto stärker steigt der Graph. Vom Punkt A bis zum Punkte C steigt der Graph stark an, weil der Flächeninhalt größer wird. Dann steigt er weniger stark an, weil Beta kleiner als Alpha ist und BC sinkt.*

Antworten auf dem Fragebogen

Beide Schülerinnen gaben an, dass sie den Computer selten bis gelegentlich im Unterricht einsetzen und das auch so bleiben soll.

S1 fand es gut, *dass man die Punkte verschieben konnte, so dass man genau sah, was dann geschieht*. Außerdem schrieb sie: *Es ist nicht so theoretisch. Man muss auf eine bestimmte Weise mehr überlegen und vielfältiger denken.*
Als Kommentar gab sie: *Es hat mir eigentlich relativ viel geholfen, diese Themen mehr zu verstehen. Jedoch wurde es immer langweiliger und zog sich ganz schön in die Länge, da die meisten sich für so etwas nicht interessieren.*

S2 fand gut *mit dem Partner zusammen zu arbeiten und nicht alleine* und *dass man nicht so viel zeichnen musste*.
Sie gab an: *Man kann Punkte besser ablesen, was die Arbeit erleichtert, da man genau ablesen kann, weil die genauen Zahlen da stehen.*

Dreiecksfläche
Gymnasium 1
Schülerinnen mit Note im 4-5er-Bereich

Ausgewählt wurden verschiedene Episoden. Die erste Episode beginnt mit der Bearbeitung von Aufgabe 1. Sie wurde gewählt, da sie typisch für die Arbeitseinstellung, -weise der beiden Schülerinnen ist, aber auch, weil die Schülerinnen hier schon Gründe für die Form des Graphen suchen. Es folgt die Episode zur Bearbeitung von Aufgabe 3, die sich zeitlich sofort an die erste Episode anschließt. Aufgabe 2 wurde von den beiden Schülerinnen erst ganz am Ende bearbeitet. Die Bearbeitung von Aufgabe 2 ist die dritte transkribierte Episode.

Abkürzungen:
S1 Schülerin 1
S2 Schülerin 2
J Jenny (Schülerin aus der anderen videographierten Gruppe)
S3 eine dritte Schülerin (Jule), die man nicht im Bild sieht, aber die sich von außen einmischt
AB Arbeitsbogen

Vorgeschichte und allgemeine Bemerkungen:
Da es technische Probleme mit den PCs im Computerraum gab, arbeiteten in der ersten Stunde nur die videographierten Schülerinnen am Computer, alle anderen hatten noch keinen Zugang zu den Computern. Insgesamt war es sehr unruhig und dadurch auch recht unkonzentriert, da die gesamte Klasse in einen anderen Computerraum umziehen musste. Das war besonders für dieses Schülerpaar problematisch, da es sich zeigte, dass die beiden Probleme haben, sich längere Zeit auf eine mathematische Fragestellung einzulassen und sich damit zu beschäftigen. Außerdem war für das anschließende Unterrichtgespräch gerade mal 10-15 Minuten Zeit geblieben. Das Transkript beginnt mit der Bearbeitung von Aufgabe 1. S2 hat zu Anfang die Maus übernommen.
Zeit: 22’’ (erstes Video)

S2: *(verschiebt D hin und her)*
S1: Wir sollen die Form des Graphen (   )
S2: Na ansteigend *(verschiebt D hin und her)* (..) Guck doch mal, steigt doch. *(schaltet Winkelgrößen ein)*
S1: Bist ja ein Scherzkeks. (..) Und wie wieso brauchen wir die Winkelgrößen? (..) *(S2 verschiebt D)* Hat das überhaupt was mit den Winkelgrößen zu tun? *(S2 verschiebt D langsam von ganz links nach rechts)* Na, hier *(zeigt auf Bildschirm)* steigt es an, weil es (.) hier so größer wird (.) Aber da wird es ja wieder kleiner und länger.
(9 sek: *S1 niest und S2 wünscht ‚Gesundheit’*)
S1: Also, Du willst schreiben, ja?
S2: Ja, wir sollten was schreiben, ja.
S1: *(liest auf AB)* Beschreibe die Form des Graphen möglichst genau. (5 sek) Ja (..) ehrlich gesagt habe ich gar keine Ahnung so wirklich.
S2: *(S1, S2 schauen auf Bildschirm, S2 verschiebt den Punkt B nach links, dann weit nach rechts, dann schiebt sie Punkt C horizontal erst ganz nach links über A und dann nach rechts über B)*
S1: Na, wenn es ein rechter Winkel wäre, dann müsste es durch so’n *(macht Handbewegung von unten nach oben)* eine Gerade sein. *(S2 schiebt C weiter nach links, so dass C über D zu liegen kommt)* (So) mach mal bitte zurück. *(S2 schiebt C leicht nach links, so dass C und D gerade nicht mehr übereinander liegen)* Ach, sogar Prinzessin Lisa hat es geschafft.
S2: *(legt Maus ab und sieht zu S1)* Weiter!
S1: D verschieben!
S2: *(nimmt Maus wieder, verschiebt D schnell hin und her)* Was denn, ist doch.
S1: Ja, damit ich es mir bildlicher vorstellen kann, musst Du das schon bewegen. (5 sek) Ach so. *(liest)* C kannst Du mit Hilfe des blauen Schiebereglers nach oben und unten bewegen

23 *(nimmt Maus und bewegt C vertikal auf AB und wieder höher)*
24 S2: Ich verstehe es aber immer noch nicht.
25 S1: *(bewegt C einmal unter AB und dann wieder darüber)* Ob es jetzt so ist oder so, das ist ja
26 irgendwie gleich (..) außer wenn es hier ist *(bewegt C auf AB)*. Das ist ja auch kein Dreieck.
27 *(schiebt C weit nach oben und wieder weiter runter in die Ausgangslage)*
28 *(fragt nach vorne)* Wie macht ihr denn das. Warum ändert sich denn jetzt bitte das Dreieck?
29 (3 sek) Beschreibe die Form des Graphen. Jenny, sag mal, wie nennt man nochmal den Graphen?
30 (..) Wie nennt man nochmal den Graphen? Aber eine Parabel ist das aber nicht.
31 J: Das ist eine Sinusfunktion. Aber sobald Du das verschiebst, ändert sich (das)
32 S1: Naja, ist mir schon klar. *(verschiebt C vertikal)*
33 J: Aber das, wie sie am Anfang war, ist eine Sinusfunktion.
34 S1: *(verschiebt C vertikal hin und her)* Also es ist ein Sinusgraph? (Sinusfunktion und warum keine
35 Cosinusfunktion?) Schreib einfach Sinusfunktion.
36 *(S2 schreibt auf den AB: Der Graph ist eine Sinusfunktion)*
Zeit: 4'00''

Lösung auf dem AB: Der Graph ist eine Sinusfunktion. Dann besorgt sich S1 eine Parabel-Schablone, betrachtet sie und sagt ‚stimmt'. Sie wenden sich dann wieder den Aufgaben zu.
Zeit: 4'36'' (erstes Video)

37 S1: Sobald man den Punkt C (..) ach so, hier *(klickt auf C und danach auf den ‚Schiebepfeil', um C*
38 *vertikal zu verschieben)* die Steigung oder wie man das nennt *(verschiebt C vertikal)* ändert sich
39 nur, wenn man den Punkt C bewegt. (5 sek)
40 S2: (Können wir nicht die anderen Aufgaben mal machen) *(dreht das Blatt des AB um)*
41 S1: Mach einfach.
42 S2: *(liest auf AB)* Warum hat der Graph diese Gestalt? (5 sek)
43 S1: Deshalb? (.) Nimm die nächste Frage.
44 S2: *(liest auf AB)* Was geschieht bzw. ändert sich am schwarzen Punkt über C? Und warum?
45 S1: *(verschiebt C vertikal hoch und runter)*
46 S2: Steigt und sinkt.
47 S1: *(verschiebt C vertikal hoch und runter)* Naja, wenn man den Punkt C nach oben oder unten.

Ansage der Klassenlehrerin, dass der Raum gewechselt wird und die beiden erst einmal in diesem Raum weiter arbeiten sollen, bis es zur Pause klingelt.

48 S1: Ähm, der Punkt. Der Punkt, der schwarze Punkt auf dem Graphen *(deutet mit Mauszeiger auf den*
49 *schwarzen Punkt)* oder ja, der bewegt sich nur, wenn man C nach oben oder unten *(bewegt C*
50 *vertikal)* bewegt.
51 S2: Ja, ja, warum?
52 S1: Ja, weil das ( )
53 S2: [Ja, wenn C (.) umso (.) (mach mal) hoch *(S1 schiebt C höher)* Umso kleiner der Winkel
54 von C, also ( ) kleiner der Winkel Gamma, umso höher der
55 S1: [Ja. Punkt.
Zeit: 6'15'' (erstes Video)

Nun wird es sehr unruhig und laut, da alle anderen Schülerinnen und Schüler ihre Sachen einpacken, um den Raum zu verlassen.
Zeit: 6'38'' (erstes Video)

56 S2: *(schreibend)* Umso höher liegt der Punkt auf der
57 S1: Auf dem Graphen. (8 sek) *(schiebt C über A)*
58 S2: Auf dem Graphen (bei) der y-Achse? Auf dem Graphen der y-Achse.
59 S1: *(schiebt C über B und wieder über A) (liest, was S2 auf dem AB schreibt)* Umso kleiner der
60 Winkel <u>bei C, bei C</u>.
61 S2: Na, hier.
62 S1: Was soll denn das heißen? Gamma?
63 S2: Gamma, bei C.
64 S1: Bei C (.) Ach so. Umso höher liegt der Punkt (..) *(sieht auf den Bildschirm)* auf dem Graphen.
Zeit: 7'25'' (erstes Video)

Die Lösung auf dem AB zu Aufgabe 3 lautet: *Umso kleiner der Winkel Gamma bei C, umso höher liegt der Punkt auf dem Graphen.* Dann schlägt S1 vor zur nächsten Aufgabe zu gehen. Die Situation ‚C über A' hat sie schon eingestellt. Ihre Lösung zu Aufgabe 4 lautet (nach Rücksprache mit ihren Mitschülerinnen der anderen videographierten Gruppe): *Wenn C direkt über A oder B liegt entsteht ein rechter Winkel. Aus dem Sinusgraph wird in beiden Fällen eine Parabel, die entweder nach oben oder nach unten geöffnet ist.*

Die nächste Episode beinhaltet die Bearbeitung von Aufgabe 2. Die Bearbeitung dieser Aufgabe haben die beiden ganz ans Ende geschoben. Im Laufe der Bearbeitung der Lernumgebung sind die beiden nun immer mehr abgelenkt. Im Laufe der Episode wenden sich die beiden an einen Mitschüler (Malte). Diesen haben sie auch schon früher einmal angesprochen, um zu erfahren, was man bei der Beschreibung des Graphen (Aufgabe 1) noch schreiben sollte. Malte versuchte darauf hinzuweisen, dass das seiner Meinung nach keine Sinusfunktion sein könne, da sie nicht die x-Achse schneidet. Sie bleiben bei Aufgabe 1 bei ihrer Lösung *Der Graph ist eine Sinusfunktion* und wenden sich nun Aufgabe 2 zu. Das Transkript beginnt mit der Bearbeitung von Aufgabe 2. Zeit: 16'41'' (zweites Video)

S1: Der Graph ist eine Sinusfunktion und jetzt müssen wir noch sagen wieso. Und ich habe gerade ehrlich gesagt gar keine Ahnung wieso, woran man das erkennt.
S2: Wir sollen die Form, also warum das hier hoch geht *(zeigt auf Bildschirm)* und dann hier wieder da oben.
S1: Da steht aber die Form des Graphen na ja und hinten, aber dann ist ja das (.) die andere Aufgabe genau dasselbe, da steht die ähm Gestalt des Graphen (15 sek) *(S1 klickt ein paar Mal irgendwo auf den Bildschirm)*
S2: Silvi, warum hat der Graph (..) Ich verstehe es nicht.
S1: *(liest)* Warum hat der Graph diese Gestalt? (3 sek) Naja, aufgrund des Dreiecks hat er die Gestalt. (..) Ist ja irgendwie auch klar. (4 sek)
S2: *(schreibend)* Er hat
S1: *(schaut auf Bildschirm)* Außerdem will man ja auch immer wissen den Flächeninhalt *(weist mit der Maus auf den blauen Punkt über D)*
S2: Aufgrund wird zusammen geschrieben oder auseinander?
S1: Aufgrund? Zusammen, glaub ich. *(schaut auf Bildschirm)* Abstand von A zu D ist das hier *(fährt mit Maus über Beschriftung der x-Achse und dann über die Strecke AD)* ach so, ja. Flächeninhalt steigt. Naja, weil die Fläche wird ja so oder so immer mehr *(bewegt Punkt D, verschiebt dann C vertikal)*
S2: *(beendet da Schreiben und schaut auf)* Hmm, jetzt müssen wir sagen mit den Winkeln, oder?
S1: Hat das überhaupt was mit den Winkeln zu tun? *(verschiebt C vertikal)*
S2: Ja, irgendwie schon, oder?
S1: Naja, umso größer
S2: [hat doch mit den Seiten ( ) und mit den Winkeln zu tun, also ähm weil wenn das Dreieck doch (..) das mit den Graphen da bestimmt.
Malte: Na, wie geht es?
S1: Naja, wir versuchen jetzt gerade den Graphen in Zusammenhang zu bringen mit dem Dreieck. (9 sek) Malte, nicht schlafen. *(schiebt D in der Umgebung von der Wendestelle hin und her)* Na, Malte sag mir doch mal, wieso gerade an dem Punkt hier *(fährt mit der Maus den ersten Abschnitt des Graphen bis zur Wendestelle ab)*, wieso das so steil abgeht. Wir wollen ja nur die Fläche von dem blauen haben *(weist mit Maus auf blauen Flächenanteil, D liegt links von der Wendestelle)* und das ist ja immer das hier *(fährt mit der Maus den blauen Graphanteil ab)*
Malte: Ja.
S2: *(hat sich im Klassenraum umgesehen und wendet sich nun Malte zu)* Malte, warum hat der Graph diese Gestalt? Das hängt doch von dem Dreieck ab, also hängt es von den Seiten(längen) oder von den äh
Malte: Winkelgrößen. Hängt von den Seitenlängen und von den Winkelgrößen ab, das ist richtig.
S2: Ja, und wie sollen wir das jetzt äh schreiben?
Malte: Davon habe ich keine Ahnung. *(S1 verschiebt D)*
S2: Also, umso größer der Winkel (3 sek)
Malte: Das kann man ja mal (.) das könnt ihr ja mal gucken, wie das da ist. Na, desto größer, was weiß ich, C/c *(Seite c oder Punkt C?)*, desto
S2: Naja, umso länger die Seiten, umso länger der Graph, oder? *(S1 verschiebt C vertikal)*
Malte: Desto größer c/C *(Seite c oder Punkt C?)*, desto flacher ist der Graph zum Beispiel.
S1: Genau, das ist das *(schiebt C nach unten, so dass die Höhe des Dreiecks sehr klein wird)*
S2: Ok, also *(schreibend)* desto größer
S1: *(verschiebt C nach oben)* Und wenn C kleiner wird, umso höher eigentlich

Malte: Ja.
S1: Flach kann man jetzt nicht sagen, aber
S3: *(nur sehr leise, da weiter entfernt, deswegen ist der genaue Wortlaut nicht ganz reproduzierbar)* (Also, weil der letzte Punkt B ist ja immer noch auf der gleichen Höhe von der Flächeninhalt)
S2: [Also desto größer
S3: (also ändert sich die Steigung)
S1: Stimmt. Genau.
Malte: Das ist jetzt echt mies, Jule *(meint S3)*, Du machst meine Illusion kaputt. Das kannst Du sehr gut.
S1: Naja, umso größer halt C, also wenn C halt anders *(klickt auf C)*
S2: [Also, umso größer der Winkel äh (..)
S1: *(verschiebt C nach unten)* Gamma *(verschiebt C weiter nach oben)*, desto mehr steigt der Graph. Sagen wir mal so.
S2: *(schreibt und S1 sieht sich im Klassenraum um, dann schaut S2 auf)* Der Graph steigt?!
S1: Desto größer der Graph steigt da, desto mehr, desto größer, so in etwa.
S2: *(schreibt und schaut dann auf)* Ok, und was weiter? Ähm, umso (.) warte mal *(S2 übernimmt die Maus und verschiebt B nach links und rechts)* Naja, also die Seite, was ist denn das *(fährt mit Maus die Seite AB ab)* c? Umso länger Seite c, umso länger der Graph, oder?
S2: Also die Seite c bestimmt die Länge.
S1: [Ja, das ist schon klar. Da steht ja auch, da steht ja auch ähm hier steht zwar Abstand von A zu D *(weist mit Maus auf Beschriftung der x-Achse)* ist ja jetzt nur die blaue Fläche, aber (2 sek)
S2: Ja, die Länge c bestimmt äh die Länge des Graphen (..) oder. *(beginnt zu schreiben)*
S1: (Ja) *(verschiebt C vertikal hin und her mal über AB mal unter AB)*
S2: *(schaut auf)* Was noch? Was ist jetzt mit ähm (.) Alpha?
S1: Naja, damit hat es ja nicht wirklich was zu tun. (4 sek) Was hat Jule *(S3)* gerade noch gesagt, wenn es nicht nur von den Winkeln abhängt, sondern auch (23 sek: *S1 verschiebt B, dann C unter AB und dann D immer wieder hin und her, S2 schaut zu*)
S2: Silvi! *(übernimmt Maus)*
S1: Ach, ich habe keine Ahnung mehr, ey mein Kopf qualmt
S2: [Ich hab auch keine Ahnung. *(verschiebt C vertikal)* Ich check's nicht. Guck mal. Das stimmt doch gar nicht.
S1: Was? (..) *(S2 verschiebt C vertikal)* Was stimmt nicht?
S2: Desto größer ähm Gamma, desto größer der Graph, der Graph steigt. Guck doch mal, das wird immer kleiner *(schiebt C vertikal, dabei wird Gamma beim Schieben nach oben kleiner)*
S1: Ach so ja, dann halt andersrum.
S2: Und dann halt und deswegen und desto Alpha desto
S1: *(verschiebt C vertikal)* Wie Malte vorhin gesagt hat, desto größer (.) nein, das hat was mit Gamma zu tun. Wenn Gamma ähm kleiner wird, desto mehr steigt der Graph
S2: [( ) dann kann ich doch hinschreiben, dann kann ich doch aber hier hinschreiben, desto Ja, aber Du hast gesagt größer, also dann kann ich doch hier desto größer Alpha, desto größer der Graph und dann kann ich noch hier unten hinschreiben, ja ähm
S1: Ja, aber es muss ja nicht Alpha sein. Guck mal, wenn ich C bewege *(verschiebt C vertikal)*, dann wird ja auch Beta größer. Beta wird auch größer, also kann es genauso gut mit Beta zu tun haben.
S2: Na, dann kann ich ja hinschreiben, desto größer Alpha und Beta.
S1: Ja, dann schreib aber unten hin (.) ähm (3 sek) ja, schreib einfach *(gähnt)*
Zeit: 24'42''

Sie bestätigen sich noch, dass sie beide ‚keine Ahnung hätten' und beschließen die Arbeit zu beenden. S1 hält die Aufnahme an. S2 schreibt letztendlich folgenden Text auf den AB: *Er hat die Gestalt aufgrund des dazugehörigen Dreiecks. Desto größer Alpha und Beta, desto größer der Graph (Graph steigt). Die Seite c bestimmt die Länge des Graphen.*

Antworten auf dem Fragebogen

Beide Schülerinnen geben auf dem Fragebogen an, dass sie bisher selten im Mathematikunterricht mit dem Computer gearbeitet hätten und das gerne öfter tun würden.

S1 führt aus: *Ich fand es gut, dass wir in 2er Gruppen arbeiten konnten. Auch das selbstständige Arbeiten fand ich gut.*
Ich finde das Arbeiten am Computer interessanter, als wenn ich Aufgaben im Mathebuch machen müsste. Es ist einfach besser anschaulich.

Kommentar von S1: *Ich fand die Unterrichtsstunden gut. Jedoch habe ich nicht wirklich was dazu gelernt, da das Vergleichen der Arbeitsstunden immer sehr langweilig waren. Trotzdem gute Sache!*

S2 führt aus: *Ich hab ja an dem Laptop gearbeitet. Gut daran fand ich das man die Abbildungen verschieben bzw. bewegen konnte. Letztendlich fiel es mir von mal zu mal leichter, mich in die Aufgaben reinzudenken.*
Irgendwie kommt man letztendlich doch auf die Lösung. Mit dem Computer kann es als erstes ausprobieren und dann überlegen, ob man noch anders auf die Lösung kommt
Kommentar von S2: *Also ich fand die vergangenen Unterrichtsstunden sehr gut. Hat mir geholfen, Fachbegriffe anzuwenden. Hat irgendwie mehr Spaß gemacht mit Computern für Mathe zu arbeiten als durchgängig nur Unterricht ohne Computer.*

Dreiecksfläche
Gymnasium 2
Schüler mit Noten im 1er-2er-Bereich

Ausgewählt wurde eine Episode zur Bearbeitung von Aufgabe 2 und 3. Die Episode wurde ausgewählt, weil die Jungs hier sehr schnell zu guten mathematischen Formulierungen kommen und sich sehr schnell einigen.

Abkürzungen:
S1 Schüler 1
S2 Schüler 2
L Lehrer (hier: Forscher)

Vorgeschichte und allgemeine Bemerkungen:
Die Schüler arbeiten sehr konzentriert. Sie lesen die Texte auf dem Bildschirm aufmerksam durch und richten sich bei ihren Computeraktionen nach den Instruktionen, was aus der Reihenfolge der Aktionen ersichtlich wird. Der ausgefüllte Arbeitsbogen der Schüler ist leider nicht auffindbar und ich gehe davon aus, dass sie ihn nicht abgegeben haben.
Die Schüler dachten zu Anfang, dass jeder für sich arbeiten solle und wurden erst nach ca. 9 Minuten von ihrer Mathelehrerin darauf hingewiesen, dass sie gemeinsam arbeiten und kommunizieren sollen. Daraufhin sagen beide „Ach so“ und beginnen zu kommunizieren.
Bis zu diesem Zeitpunkt fanden nur wenige, sehr gezielte Computeraktionen statt. Die Bedienung des Applets war kein Problem. S1 ist der Hauptakteur am Computer, S2 hatte bis zu diesem Zeitpunkt lediglich einmal Punkt D bewegt und Punkt C vertikal verschoben.
Auffällig bei S1 war, dass er bei seinen Computeraktionen sehr klar Metavariation und Variation erster Stufe trennte, indem er zunächst eine neue Situation herstellte und danach innerhalb dieser neuen Situation D bewegte.
Das Transkript beginnt bei 8’56’’ und endet bei 11’52’’. Es beginnt mit einer Intervention von L, die sich auf die gesamte Klasse bezieht, da viele SuS Probleme hatten mit der Begründung bei Aufgabe 2.

1 S1: So, was hast Du bei zweitens geschrieben?
2 S2: Ich bin noch nicht fertig. Ich les’ es Dir gleich vor. Ja, warte. *(beide schreiben) (5 Sek)*
3 L: (zur Klasse) Könnte der Graph abfallen?
4 S2: Nein.
5 S1: Nö.
6 S2: Nein.
7 L: Warum nicht? *(zu S1 und S2, die sich melden)* Sagt es einfach.
8 S1: Weil der Flächeninhalt bis zum Ende zunimmt.
9 S2: Er kann ja nicht abfa-

L unterbricht und wiederholt das Gesagte und kündigt eine Frage dazu an. L zeichnet eine steigende Gerade durch den Ursprung an die Tafel und fragt

10 L: Der fällt auch nicht ab. Warum sieht er nicht so aus?
11 S1: Weil in einem Dreieck der Flächeninhalt nicht gleichmäßig ansteigen kann. Weil das dann ein (.) Quader wär.
12 S2: Ja.

L fragt genauer nach, welche Form zu dem Graphen (steigende Gerade durch Null) passt. Der von L gesprochene Text ist nicht immer verständlich, da er lediglich über das Mikrofon in den Laptops aufgenommen wird.

13 S1: Würfel
14 S2: Viereck. Ja, Quader.
15 S1: Würfel, Viereck, irgendwas
16 L: Viereck?
17 S2: Rechteck.
18 L: Rechteck. *(beide schreiben)*
19 S1: Darf ich nochmal verschieben?
20 S2: Ne.
21 S1: ( ) *(S1 verschiebt C horizontal nach links über den Punkt A, dann schiebt er C nach rechts über den Punkt B)*
22 S2: *(liest)* Zu dem Zeitpunkt, wenn der Punkt C überwunden wird, nimmt die Steigung stetig
23 ab. Das liegt daran, dass das Dreieck an dieser Stelle am höchsten ist und damit am
24 meisten Flächeninhalt hat.
25 S1: Naja, am meisten Flächeninhalt ha- *(S1 wendet sich nach hinten zu den Mädels und gibt einen kurzen Hinweis zur Handhabung der Applets)*
26 S1: Aber wenn er direkt unter C liegt der Punkt D, dann heißt es ja nicht, dass es am meisten
27 Flächeninhalt hat. Am meisten Flächeninhalt hat er, wenn das alles ausgefüllt ist. *(S1 blickt zu S2. S2 verschiebt die Punkte B und C so, dass C weder über A noch B liegt)*
28 S1: Den größtmöglichen Zuwachs an Flächeninhalt, meinst Du.
29 S2: Naja, ist ja das Gleiche.
30 S1: Nee.
31 S2: Doch.
32 S1: Größter Flächeninhalt ist, wenn D jetzt da ist. *(zeigt mit dem Finger auf den Bildschirm)* Dann ist alles *(S2 verschiebt D ein wenig)*
33 S2: Ja, ok. *(beide schreiben)*

Dann bekommen die Schüler von ihrer Mathelehrerin und L den Hinweis, dass sie nicht beide schreiben müssen. Sie einigen sich darauf, dass S2 das Schreiben übernimmt. S1 nimmt die Maus und bewegt den Punkt D.

34 S1: *(bewegt D)* So, und ab dem schwarzen Punkt. Also über C ist ja der ( )
35 S2: Ja, da wird's, da nimmt's ab.
36 S1: Ja.
37 S2: Weil da kein (.) weil der Zuwachs nicht mehr so groß sein kann
38 S1: Weil dann der größtmögliche Zuwachs an Flächeninhalt
39 S2: erreicht ist
40 S1: Ja. *(S2 schreibt)*

Antworten auf dem Fragebogen

Von den beiden Schülern war nur einer in der letzten Stunde da, um den Fragebogen auszufüllen.

Im Fragebogen gibt er an, dass er lieber nicht so häufig mit Computer im MU arbeiten würde. Als positiv vermerkt er, dass der Computer *graphische Darstellung ohne eigenes Zeichnen* bietet, dass damit *Zeit gespart* wird und man *entspannt arbeiten kann*. Er findet auch, dass er *Spielraum hat, Sachen auszuprobieren, die er bei einem gezeichneten Graphen nicht ausprobieren könnte*. Er vermutet, dass er die Aufgabe zur Dreiecksfläche auch ohne Computer gekonnt hätte.

Dreiecksfläche
Gymnasium 2
Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich

Ausgewählt wurde eine Episode zur Bearbeitung von Aufgabe 2 und 3. Die Episode wurde ausgewählt, weil die Mädels hier sehr lange diskutieren und dabei ihren Blick auf den Graphen und die Situation wiederholt darlegen. Die beiden Schülerinnen liegen im Notenbereich 2.

Abkürzungen:
S1 Schülerin 1
S2 Schülerin 2
J Junge von vorne
L Lehrer (hier: Forscher)
AB Arbeitsbogen

Vorgeschichte und allgemeine Bemerkungen:
Die Schülerinnen beginnen damit, dass sie den ersten Arbeitsauftrag auf dem Bildschirm lesen. Ihre Lösung zu Aufgabe 1 ist: ‚Der Graph beginnt im Punkt (0|0). Er steigt exponentiell an nachdem der schwarze Punkt auf dem Graphen überschritten wird'. (Alle vier Zweiergruppen haben versucht, die Form des Graphen mit Hilfe von ihnen bekannten Funktionsgraphen zu beschreiben. Dabei wurde von allen anderen die Form mit der Form einer Sinuskurve verglichen. Erwartet oder erhofft war eigentlich, dass die Schüler in eigenen Worten die Besonderheiten des Graphen beschreiben. Tatsächlich kommt es dazu erst im Verlauf der Lösungssuche zu Aufgabe 2.) Die Schülerinnen lesen nicht die Instruktionen zur Bedienung des Applets. Deswegen entdecken sie zunächst auch nicht, dass man gewisse Punkte bewegen kann. Zu Beginn schalten sie lediglich die Winkelgrößen an und lassen diese die gesamte Zeit über angeschaltet. Der folgenden Diskussion geht direkt voraus, dass die Schülerinnen Aufgabenstellung 2 ‚Warum hat der Graph diese Gestalt?' vorlesen. Die Möglichkeiten des Applets werden lange Zeit nicht genutzt, sondern die Schülerinnen zeigen immer wieder mit dem Finger auf die Teile des Bildschirms, auf die sie sich beziehen.
Das Transkript beginnt bei 1'11'' und endet bei 11'48''.

1	S1:	Ähm, also ich weiß nicht. Ich glaube-
2	S2:	Das hat vielleicht was mit den Winkelgrößen zu tun.
3	S1:	Naja, schau mal, die Form, wart mal, die Größe ändert sich ja und dadurch
4	S2:	[die die zeichnet das auch unseren Ton auf?
5	S1:	Ja. *(lacht)* Sag nur kluge Sachen.
6	S2:	Na, aber guck mal, hier *(zeigt auf den Monitor)*, bei, da sinkt er steigt er so ein bisschen, bei 119
7		Grad *(meint Winkel Gamma)* macht der so voll, also geht der ja fast linear hoch und dann bei 19,2
8		Grad *(Winkel Beta)* macht der schon fast wieder eine Kurve und geht (runt-)
9	S1:	Das hat damit gar nichts zu tun.
10	S2:	Doch.
11	S1:	Nein, das ist die Anhängigkeit des Flächeninhalts, wo der Abstand ist von A zu D. Wir erklären
12		also, wenn es da *(zeigt mit dem Finger auf den Monitor)* ist, dann ist es so, bis es hier ist.
13	S2:	Warum können dann die Winkelgrößen angegeben werden
14	S1:	Ja, damit man weiß das Dreieck, wie groß das ist.
15	S2:	Wieso hat das dann <u>die</u> Farbe? *(zeigt mit dem Finger auf den Monitor)*
10	S1:	Was?
11		*(S2 zeigt mit dem Finger auf dem Monitor)*
12	S1:	Ja, weil das, das Dreieck hier ist *(zeigt auf Monitor)*. Das wird immer kleiner, je weiter D weg ist
13		(.) also der Graph, der wird nicht kleiner, es wird eigentlich größer, aber es wird im Verhältnis zu
14		der Länge-

15 S2: Guck mal da. *(zeigt auf Monitor und liest)* Was geschieht oder ändert sich am schwarzen Punkt
16 über C? *(lacht)* Ok.
17 S1: Ja. Also, der Graph hat die Gestalt, da (.) das (.) der Flächeninhalt in Abhängigkeit zur *(S2 beginnt zu schreiben und S1 wartet)*
18 S2: Ja?
19 S1: *(schaut auf den Arbeitsbogen)* sich der Flächeninhalt in Abhängigkeit zum Abstand (.) zur Strecke
20 AD *(kurze nicht ganz verständliche Äußerung, in der S1 vermutlich darauf hinweist, dass S2 für ‚Strecke AD' einfach ‚AD mit Strich drüber' schreiben kann)*
21 S2: in Abhängigkeit zu AD (Strecke ist so)
22 S1: Ähm, anfangs steigt. Sobald der C Punkt, sobald der Punkt C überschritten ist-
23 S2: das stimmt irgendwie nicht
24 S1: [wieder sinkt. Doch. Kuck. *(zeigt auf den Monitor)* Die wird immer größer, die wird an
25 sich immer größer, deswegen wird das hier auch immer mehr, aber das hier, das im Verhältnis, das
26 wird auch <u>mehr</u>, aber das wird, ach verstehst Du?
27 S2: Nee.
28 S1: Naja, kuck mal-
29 S2: Ich versteh nicht, wie Du meinst der Punkt C, wieso sinkt das da wieder, das geht da viel stärker
30 hoch als von (.) als bis zum Punkt C. Hier *(zeigt auf Monitor)* steigt es nur so ein bisschen und da steigt es doch fast linear an. Ich versteh nicht, warum Du sagst, das sinkt wieder.
31 S1: [Nein, es sinkt, es sinkt. *(zeigt auf Monitor)* Siehst Du das nicht?
32 S2: Wo sinkt denn das?
33 S1: Hier, das sinkt *(zeigt auf Monitor)* Das geht doch nach unten.
34 S2: Nee, aber erst <u>da</u> *(zeigt auf Monitor)* geht es wieder runter. Erst ab dem Punkt hier-
35 S1: [Ja, aber kuck mal. Nein, nein, nein, kuck
36 S2: [Doch
37 S1: Es geht doch <u>so</u>. *(skizziert auf dem AB den Graphen des Applets, markiert dabei die Wendstelle*
38 *besonders und zeichnet den Abschnitt nach der Wendestelle dicker)* Es geht <u>so,</u> und hier ist der
39 Punkt C, das heißt hier sinkt es-
40 S2: Nein. Es geht <u>so</u>. So, dann geht es so und dann sinkt es *(skizziert auf dem AB den Graphen des*
41 *Applets und setzt ihn über den rechten Rand fort, so dass ein inneres Maximum entsteht)* und es
42 sinkt erst ab <u>dem</u> Punkt da. Für mich sinkt es erst ab dem Punkt da.
43 S1: [Nein, aber, das siehst Du doch, kuck mal sonst, wenn es
44 gerade wäre, dann würde das doch (..) *(zeichnet etwas, wahrscheinlich einen vertikalen Strich durch die Wendestelle)* <u>so</u> gehen.
45 S2: Ja, aber es ist ja eben eine Kurve. Eine Kurve ist ja nicht gerade, also
46 S1: Ja, aber müsste sie ja grade nach Deiner Theorie, wenn es grade nach oben steigt. Dann wäre es ja
47 linear ( )-
48 S2: Nein, <u>fast</u> linear habe ich gesagt.
49 S1: Ja, aber fast linear ist, dass sie entweder weiter steigt oder weiter sinkt, aber sie sinkt ja ein
50 bisschen.
51 S2: Nö, für mich sinkt sie nicht. (*Lehnt sich zurück)*
52 S1: Ja, dann kommen wir nicht weiter.
53 S2: *(lehnt sich wieder vor)* Ja, ok. Da sich der Flächeninhalt in Abhängigkeit zu AD anfangs (..).
54 Schreiben wir auf, was Du meinst.
55 S1: Anfangs *(Pause, in der S2 schreibt und S1 dabei zusieht.)* Nee, mach mal das ‚sich' weg. Da der
56 Flächeninhalt in Abhängigkeit zu AD anfangs steigt, dann fast linear *(lacht und schaut zu S2)*
57 S2: (das müssen wir jetzt nicht schreiben)
58 S1: Dann fast linear
59 S2: Na, für Dich sinkt er doch dann, oder?
60 S1: Ja.
61 S2: Dann anfängt zu sinken *(schreibt)*
62 S1: Dann leicht, aber fast linear anfängt zu sinken (.) Geht ja nicht, aber
63 S2: Nee, das macht dann überhaupt keinen Sinn mehr.
64 S1: Ja, ok, dann schreib ‚dann fast linear'
65 S2: Nee, dann anfängt zu sinken.
66 S1: Dann schreib ‚leicht'
67 S2: Aber für mich sinkt er nicht, der steigt doch eindeutig.
68 S1: Aber der, siehste das- *(zeigt auf Monitor)*
69 S2: Wenn er, wenn er sinken würde, würde es doch so wieder runter gehen *(zeigt auf Monitor)*
70 S1: Er muss nicht-
71 S2: [Das ist sinken.

72 S1: Nein, er nimmt aber ab. Das Verhältnis nimmt doch ab.
73 S2: [Nein.
74 S1: Kuck mal, wenn es so runtergeht
75 S2: [Ja, dann sagen wir ‚das Verhältnis nimmt ab', aber hier *(zeigt auf Monitor)* steigt er doch
76 noch. Der steigt auch da und auch da
77 S1: [Ja, das ist doch immer das Verhältnis. Der Graph ist doch das Verhältnis.
78 S2: Nee (.) Ja, ok, der Graph kann das Verhältnis sein, aber sinkt da *(zeigt auf Monitor)* auf keinen
79 Fall. Der steigt noch. *(lacht nach vorne)* Ja, ok.
80 S1: Aber im Verhältnis nimmt er ab.
81 S2: *(beginnt zu schreiben)* dann im Verhältnis
82 J: *(von vorne)* Wie wär's, wenn Ihr sagt ‚die Steigung nimmt ab'.
83 S1: *(lächelt)* Stimmt. Ist gut.
84 S2: Mir ist warm. *(beide lachen, S2 zieht den Pullover aus)*
85 S1: ( ) *(übernimmt das Schreiben)*

Zeit: 6'40''
Nun sind beide kurz abgelenkt durch ihre Mitschüler und private Dinge. S1 fängt dann aber an zu schreiben und benutzt dabei den Begriff ‚Steigung' (genauer Wortlaut, s. unten). Das Schreiben von S1 wird unterbrochen durch die Lehrerintervention (s. Analyseprotokoll/Jungs/Dreieck/Eckener), in der es darum geht, ob der Graph abfallen könnte und warum der Graph keine Gerade positiver Steigung durch Null ist. Beide hören zu, beteiligen sich aber nicht an der Diskussion. Als die Diskussion beendet ist, schaut sich S2 im Klassenraum um und wendet sich daraufhin dem Computer zu.
Zeit: 9'21''

86 S2: *(klickt auf B)* Schau mal hier, den kann man so verschieben, aber ich verstehe nicht wie das gehen
87 soll. Benny, Felix, wie verschiebe ich denn die Punkte, ich klick da rauf?
88 J: Dann, gedrückt halten.
89 S2: *(verschiebt B)* Ahaa. *(beide schauen auf Monitor, verschiebt C horizontal)*
90 S1: Ja, mach mal das, mach mal das (kurz). Dann können wir ja mal sehen, ob es linear ist.
91 S2: Wir müssen das hier (andere Länge). *(bewegt Mauszeiger von A zu D)* Das sind 1, 2, 3, 4, 5
92 Kästchen *(verschiebt B nach rechts bis ein gleichschenkliges Dreieck entsteht und D unter C*
93 *liegt)* Also schau mal, jetzt haben wir hier genau die Hälfte, nä? *(fährt mit Mauszeiger den Graphen von links nach rechts ab)*
94 S1: Da steigt's, da sinkt's.
95 S2: *(betrachtet den Monitor)* Ja, ok, für mich heißt das hier nicht sinken. Das ist einfach nur dann
96 schwächer, aber ( ).
97 S1: Mach doch mal- Darf ich mal? *(übernimmt Maus)*
98 S2: Bitte.
99 S1: *(schiebt C wieder weiter nach links)*
100 S2: Da hatten wir es doch schon.
101 S1: Ja, ich will jetzt zeigen, dass er- *(versucht den blauen Punkt auf dem Graphen nach rechts zu schieben)*
102 S2: Den kannst Du nicht verschieben.
103 S1: Aah, is' ja krank.
104 S2: Kannst nur C und-
105 S1: [*(verschiebt D nach rechts, versucht dann den schwarzen Punkt nach rechts zu schieben)*
106 S2: Ne, Du musst da an C verschieben.
107 S1: *(verschiebt C nach links, so dass der erste Abschnitt des Graphen bis zur Wendstelle kleiner ist als*
108 *der Abschnitt danach)* Das (soll jetzt) möglichst klein, nä? *(schiebt C noch weiter nach links)*
109 Siehste das jetzt, dass das (..) da genauso ist, dass das <u>so</u> geht?
110 S2: Ja klar seh ich das, aber (.) der <u>sinkt</u> doch hier nicht.
111 S1: Ja, die Steigung sinkt-
112 S2: Ja.
113 S1: nimmt ab. Ja ok, das meinte ich ( )
114 S2: [Ja, ok, aber Du hast am Anfang gesagt ‚der Graph sinkt' und das habe ich überhaupt nicht gesehen
115 S1: [Ja, wenn die Steigung sinkt, dann sinkt der Graph ja auch. Also er sinkt nicht <u>so</u> *(macht eine Handbewegung nach unten)* also
116 S2: [Ja. *(S1 versucht den blauen Punkt auf dem Graphen zu schieben)* Du musst an D verschieben.
117 S1: Das reicht.

118 S2: Ok, das *(zeigt auf den AB)* haben wir ja schon gesagt. ( ) Dass sich dann, ähm, das Verhältnis ändert und deshalb (.) die Steigung auch ändert *(S1 schreibt)*

Zeit: 11'48''

Als S1 wieder aufsieht, hat S2 den Punkt C über B geschoben und die beiden beginnen mit der Bearbeitung von Aufgabe 4. Der Lösungstext auf dem AB lautet:
Aufgabe 2: *Da der Flächeninhalt in Abhängigkeit zu AD anfangs steigt, dann (durchgestrichen ist ,im Verhältnis' und ,anfängt zu sinken') nimmt die Steigung leicht ab, da die Strecke AD im Verhältnis zum Flächeninhalt abnimmt, der Graph muss immer steigen, da der Flächeninhalt auch immer größer wird.*
Aufgabe 3: *Das Verhältnis ändert sich, deswegen sinkt die Steigung dann.*

Antworten auf dem Fragebogen

Zum Ausfüllen des Fragebogens war nur S2 anwesend.
S2 fand bei der Arbeit am Computer gut, dass es *unkomplizierter, schneller und weniger Schreibarbeit* ist. Sie schätzt es, dass man *mehr ausprobieren* kann und *der Lehrer nicht alles anzuschreiben braucht*. Die Aufgabe mit der Dreiecksfläche hat sie nach eigener Einschätzung auch mit dem Computer nicht verstanden und sie gibt an nach der Besprechung *noch verwirrter* gewesen zu sein.

Reise
Gymnasium 1
Schülerinnen mit Note im 2er-3er-Bereich

Ausgewählt wurden verschiedene Episoden. Zunächst geht es um Aufgabe 1 und den Repräsentationstransfer Situation-Graph und insbesondere um die Fragen, was zwischen B und C, bzw. D und E passiert. Bei Aufgabe 2 wurde eine Episode ausgewählt, die zeigt, dass zur Bestimmung der Geschwindigkeit zwischen C und D mit dem st-Graphen dieser nicht abschnittweise gelesen wird, was aber in Aufgabe 3 dann getan wird. Bei Aufgabe 2 ist auch die Frage nach dem zurückgelegten Weg bei vorgegebenem vt-Graphen interessant. Insbesondere die Gespräche zu Metavariation bei Aufgabe 3 waren von Interesse.

Abkürzungen:
S1 Schülerin 1
S2 Schülerin 2
L Lehrer (hier: Forscher)
AB Arbeitsbogen

Vorgeschichte und allgemeine Bemerkungen:
Die Klasse hatte vor, in der Pause nach der Doppelstunde, Kuchen zu verkaufen (um Geld für die Klassenkasse zu sammeln). Damit der Kuchenstand aufgebaut werden konnte, wurde vereinbart die Doppelstunde ohne Pause durchzuarbeiten und dafür früher Schluss zu machen. Von den organisatorischen Dingen betreffs des Kuchenverkaufs waren die SuS teilweise abgelenkt. Natürlich war das Durcharbeiten ohne Pause konzentrationsmäßig ein großes Problem.

Die Schülerinnen haben keine Probleme Fahrtstrecke und Gesamtzeit abzulesen. Auffällig ist, dass sie zunächst das Auto auf der Landkarte schieben wollen und, als das nicht geht, das Auto auf der y-Achse. Auch die Frage: ‚Wo befindet man sich nach 3 Stunden Fahrt?' ist leicht zu lösen und wird unter Benutzung des Applets gelöst. Dabei wird im Graphen die Zeit eingestellt und die zurückgelegten Kilometer abgelesen. Die Schülerin, die nicht an der Maus ist, weist dann darauf hin, dass das mitten in Berlin sei.
Das Transkript startet mit der Bearbeitung von der Frage ‚Was passiert zwischen B und C?'

Zeit: 6'14''
1 S2: (liest) Was passiert zwischen den Stationen B und C? *(fährt mit Mauszeiger im Graphen auf Punkte B und C)*
2 S1: Mach mal den Punkt dahin.
3 S2: ( ) *(fährt mit Maus auf dem Graphen langsam von B nach C)* B und C liegen am selben Ort. Ja,
4 man fährt keine Kilom-
5 S1: [Mach doch mal den Punkt dahin.
6 S2: Ja, was willst du denn mit dem Punkt da. Den Punkt brauchen wir überhaupt nicht. *(schiebt den blauen Punkt auf B)*
7 S1: [Na, na, wo das Auto da genau ist.
8 S2: Und zu C *(schiebt den blauen Punkt langsam von B anch C)* passiert nichts (.) bleibt stehen. (..)
9 Das Auto bleibt zwischen Punkt B und Punkt C stehen. *(schiebt den blauen Punkt auf dem*
10 *Graphen noch ein paar Male von B nach C und zurück)*
11 S1: *(schreibt auf AB)*
Zeit: 7'10''

Antwort auf dem AB: *Zwischen B und C bleibt das Auto stehen.*
Sie unterhalten sich kurz über den Kuchenverkauf, der in der Pause ansteht und gehen dann zur nächsten Aufgabe.

Zeit: 8'06''
12 S2: *(schiebt den blauen Punkt auf D und dann langsam Richtung E und wieder zurück)* Ah, und

zwischen D und E fährt es so eine Kurve (..) so eine S-Kurve. *(schiebt den blauen Punkt wieder zwischen D und E hin und her)*
S1: Mhm.
S2: *(fährt mit Mauszeiger langsam auf der Landkarte die rote Strecke im Berliner Stadtgebiet ab)* (fährt er hier so)
S1: ( ) Mach mal, mach mal Play-Taste.
S2: *(klickt auf Play, die Animation läuft durch, beide schauen zu, als das Auto im Laufe der Animation durch Berlin fährt, sagt S2)* Hier, da fährt es langsamer.
S1: Mhm. Ja, weil da ja Stadt ist.
S2: Ja.
S1: *(beginnt zu schreiben und liest den Text zu der vorigen Aufgabe nochmals)* Bleibt das Auto stehen. Soll ich da noch irgendwas schreiben?
S2: Nein. Und bei, ach so, ja genau, D und E ähm, *(diktierend)* fährt das Auto langsamer *(S1 schreibt)* und braucht länger.
S1: *(schaut vom Schreiben auf)* Ich würde erst schreiben, es fährt langsamer und nicht gleichmäßig.
S2: Naja, es fährt langsamer und deswegen länger.
S1: [Naja, es wird länger, das kann man ja da ablesen. *(zeigt auf Bildschirm und schreibt, schaut dann auf)* Ist halt nicht gleichmäßig. Es ist (.) ähm (..) es ist nicht monoton wachsend (.) oder (.) nee, das ist ja nicht die Frage (..). *(S2 lässt die Animation durchlaufen)* Ähm, was heißt denn gleichmäßig in der Fachsprache? Ähm, (.) äh (.) *(schaut auf Bildschirm als das Auto in der Animation zwischen D und E fährt)* das fährt nicht konstant schnell. *(schreibt)*
S2: Es fährt nicht proportional.
S1: *(schaut kurz auf vom Schreiben)* Naja, wie willst Du proportional fahren? *(schreibt weiter)*
Zeit: 9'45''

Ihre Antwort auf dem AB lautet: *in der Stadt fährt das Auto langsamer und ist nicht konstant schnell*
Die beiden werden von der anderen videographierten Schülergruppe gefragt, was denn zwischen D und E passiere. S2 sagt ihnen, dass das Auto da durch die Stadt fahre und nicht konstant schnell, weil es ja ab und zu mal anhalten müsse.

Sie berechnen dann die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit ohne Problem.
Sie wechseln dann zu Aufgabe 2 und lesen die Aufgabe durch. Sie lassen hier die Animation laufen und stoppen, wenn das Auto zwischen C und D ist. Sie lesen eine Geschwindigkeit von 70 km/h ab. Ihre Antwort auf dem AB ist: *Die Geschwindigkeit beträgt 70 km/h. Wenn das Auto die Strecke CD fährt, kann man am zweiten Diagramm die Geschwindigkeit ablesen.*

Die nächste Episode bezieht sich auf die Aufgabe: ‚Kann man die Geschwindigkeit zwischen C und D auch herausfinden, wenn man nur den linken Graphen sieht? Wenn ja, wie?' S2 liest die Aufgabe leise für sich und sagt dann:

Zeit: 16'06''
S2: Ja, kann man (..) indem man (..) beispielsweise (.) 120 km durch *(zieht den blauen Punkt im st-Graphen auf D, der die Koordinaten (2h10min|120km) hat) (4 sek)*
S1: *(gähnt)* Nanu. Weg-Zeit-Graph. Was ist denn davon jetzt der Weg-Zeit-Graph?
S2: Was? *(zieht den blauen Punkt im st-Graphen zwischen C und D hin und her)*
S1: Der Weg-Zeit-Graph, die Geschwindigkeit (.) Ja, indem man einfach ähm (.) die Kilometeranzahl *(beginnt zu schreiben, sich selbst diktierend)* Ja, kann man (.)
S2: *(diktierend)* indem man die Kilometeranzahl durch die (.) Zeit (.) dividiert. *(S1 schreibt und schaut nach einer Weile auf)* Kilometeranzahl durch (.) die gefahrene Zeit (.) teilt. *(schreibt)*
Zeit: 16'50''

Antwort auf dem AB: *Ja, kann man, indem man die zu dem Zeitpunkt gefahrene Kilometeranzahl durch die bisher gefahrene Zeit teilt.* S1 schreibt dies auf und S2 wartet.

Dann wenden sie sich der nächsten Frage zu: ‚Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? Wie liest man das ab? Wie kann man die höchste Geschwindigkeit erkennen, wenn man nur den linken Graphen sieht?' Die erste Äußerung dazu kommt von S1.

Zeit: 17'49''
S1: Na, die Geschwindigkeit ist dann am größten, wenn der steilste Graph ist.
S2: Ja. *(zieht den blauen Punkt im vt-Graphen auf den höchsten Balken)* (.) und man kann auf beiden

Diagrammen ab(   ) (..) Also, ähm, warte mal. *(S1 schreibt)* Äh, zwischen Punkt (.) äh E und F. *(49 sek, in denen S1 schreibt und S2 der anderen videographierten Schülergruppe Hinweise gibt und dann auf den Bildschirm schaut)* Zur letzten Frage da weiß ich die Antwort schon. *(5 sek)*
S1: Wie liest man das ab? Wie liest man das ab?
S2: Na, indem ich den Graphen angucke. *(S1 schreibt)*
Zeit: 19’16’’

S1 schreibt und S2 redet über den Laptop und wartet. S2 lässt noch einmal singend die Animation durchlaufen. Dann liest S1 die Antwort vom AB vor: *Sie ist am größten zwischen E und F, da dort der Graph am stärksten steigt, was man auch nur am linken Diagramm ablesen kann* (hier fügt sie dazu: ‚also man kann es eben auch nur am linken Diagramm ablesen’ und meint, dass nur der st-Graph diese Info enthält zeigt.) *Ansonsten liest man dies auch am rechten Graphen ab, wenn das Auto diese Strecke fährt.*

Kaum hat S1 dies vorgelesen, nennt S2 ihre Lösung zu der Aufgabe ‚Kann man mit dem rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist? Wenn ja, wie?’ Das Transkript startet mit der ersten Bemerkung von S2 zu dieser Aufgabe.

Zeit: 20’11’’
S2: Und bei dem letzten. Ja, indem man die Geschwindigkeit mal äh (.) mal die äh Stundenanzahl nimmt.
S1: *(schreibend)* indem (.) man (.) die Geschwindigkeit? Die oder die Durchschnittgeschwindigkeit? *(schaut auf, weil sie sich verschrieben hat)*
S2: Streich doch einfach durch.
S1: *(schreibt und schaut dann auf)* Mhm.
S2: Äh, *(liest)* indem man die Durchschnitt *(diktierend)* mal
S1: *(schreibt und schaut dann auf)* mit also mit der Dingsbums multipliziert. Mit was multipliziert?
S2: Mit der Stundenanzahl.
S1: *(schreibt und schaut dann auf)* oder mit der Stundenanzahl (.) Stundenanzahl (.) Stundenanzahl? Ich würde eher Zeit nehmen.
S2: Ja. *(S1 schreibt)*
Zeit: 21’14’’

Die Antwort auf dem AB lautet: *Ja, indem man die Durchschnittsgeschwindigkeit mit der Zeit multipliziert.*

Dann wechseln sie zu Aufgabe 3. S1 liest die Aufgabe ‚Beschreibe, wie sich der Weg-Zeit-Graph verändert, wenn man die Balken im Geschwindigkeit-Zeit-Graphen ändert.’ Das Transkript beginnt als die beiden mit der Bearbeitung der Aufgabe loslegen. (Ich bezeichne die Balken im vt-Graph mit Balken 1 bis 5 und nummeriere sie von links nach rechts aufsteigend durch)

Zeit: 21’44’’
S1: Also wir können den Graph jetzt hier verändern.
S2: Den hier.
S1: Dass die Geschwindigkeit höher wird.
S2: *(schiebt den ersten Balken ganz nach oben und wieder weiter runter)* Wie war denn der jetzt vorher? Bei? *(schaut auf AB)*
S1: Bei 70.
S2: Na zwischen 90 und 80. *(schiebt den Balken auf Höhe 95 km/h)*
S1: Ja, bei 85.
S2: Nochmal (..) *(liest)* Beschreibe wie sich der Weg ändert, wenn man die Balken im. Naja, äh, verschiebt man die äh die Balken im *(verschiebt Balken eins vertikal)*
S1: Schieb mal nach links und rechts.
S2: Geht doch gar nicht nach links und rechts, geht doch nur nach oben oder nach unten *(verschiebt Balken eins vertikal)*. Wenn man äh die Baken nach unten verschiebt wird die äh die Steigung geringer und je höher man es schiebt *(schiebt Balken eins nach oben)*, desto äh (.) höher wird die Steigung. (.) Desto mehr steigt es an. *(S1 schreibt, während S2 Balken eins und zwei ganz nach oben schiebt, dann markiert S2 zufällig einen roten Endpunkt von Balken vier und verändert dadurch die Balkenbreite.)* *(S2 schiebt durch die Änderung der Balkenbreite einige Balken auf Länge Null, so dass nur noch zwei Balken übrig sind)* Iih, nee, guck mal, das kann man doch verändern (.)
S1: *(schaut auf)* Ja.
S2: Aber sie wollte erst mal nur oben und unten wissen, wa?

S1: *(schreibend)* nach oben verschiebt, ähm *(6 sek)* wird der (..) Weg-Zeit-Graph steiler und das Auto fährt schneller *(während S1 schreibt versucht S2 die Balken wieder herzustellen. Da das nicht gelingt macht sie ein Reload, indem sie einmal zu Aufgabe 2 zurückwechselt.)*
S2: Was hast du jetzt geschrieben?
S1: Das Auto fährt schneller. (wenn ähm)
S2: Ich würd', aber wir müssen noch, wenn man nach rechts und links verschiebt. *(verlängert Balken eins auf die maximale Breite, verschiebt den blauen Punkt auf dem vt-Graphen und verschiebt den Balken dann vertikal)*
S1: *(schreibend)* und umgekehrt
S2: aber langsamer
S1: Naja, und umgekehrt. Wenn man den Balken nach oben verschiebt wird das Auto schneller, wenn man nach unten verschiebt, wird es langsamer.
S2: Ok, und dann halt. Wenn ich jetzt *(fährt mit der Maus den einzig verbliebenen Balken im vt-Graphen, der maximale Breite hat, ab)* wenn man den (.) äh (.) wenn man das hier verlängert *(verkürzt und verlängert Balken eins ein paar Mal)* dann (.) ähm (.) dann äh (.) ist der Weg, den das Auto zurücklegt, also in einer
S1: *(schreibt)* (   ) *(schaut auf)*
S2: Wenn ich den jetzt hier so lang ziehe *(verlängert Balken eins maximal)*, dann ist ja alles konstant.
S1: Mhm.
S2: Und wenn ich das so habe *(verkürzt Balken eins, so dass zwei Balken verschiedener Höhe erscheinen)*, dann ist es ja unterschiedlich konstant. Also an einem Punkt *(fährt mit Maus über den Knickpunkt im st-Graphen)* fährt er (ja dann) schneller. (..) Weil er dann meinetwegen auf die Autobahn kommt *(verschiebt den zweiten Balken nach oben)*. Weißte. *(verlängert nun Balken zwei auf maximale Breite, so dass Balken eins verschwindet und zurück.)*
S1: Mach das mal so, wie es vorher war.
S2: *(wechselt kurz zu Aufgabe 2, Reload)*
S1: So war das aber nicht vorher.
S2: So war es vorher. Guck doch auf dein Blatt.
S1: *(sieht auf den AB)* Ach so, ich hab jetzt an den Graphen erstens gedacht. *(6 sek)*
S2: Wenn man den Balken nach rechts verlängert *(5 sek)* in die Länge zieht ähm (.) ist das fährt das Auto doch die ganze Zeit konstant. *(verlängert Balken eins maximal und verkürzt ihn dann, so dass zwei Balken unterschiedlicher Höhe erscheinen, wiederholt dies, verlängert Balken eins maximal und verschiebt ihn vertikal nach unten, verkürzt Balken eins, so dass zwei Balken erscheinen, macht Reload durch Wechsel zu Aufgabe 2)*
S1: *(seufzt) (3 sek)*
S2: Wir überlegen das später.
S1: Ich weiß aber nicht, wie ich das formulieren soll.
Zeit: 26'15''

S2 beginnt damit die nächste Aufgabe (‚Herr Paulsen ....') vorzulesen, und die beiden bearbeiten diese Aufgabe. Die Beschreibung der Änderung der Balkenbreite und deren Auswirkung auf den st-Graphen wird auf später verschoben.

Die nächste Episode bezieht sich auf die Bearbeitung der vorletzten Aufgabe auf dem AB, bei der zu vorgegebenem st-Graphen ein vt-Graph gezeichnet werden musste. Sie wurde ausgewählt, weil der Fehler, der in den Transkriptzeilen 36-44 auftaucht (st-Graph wird nicht abschnittweise gelesen, um die Geschwindigkeit zwischen C und D zu bestimmen) hier nun zunächst nicht mehr gemacht wird.
Die Episode beginnt damit, dass S1 die Knickpunkte des st-Graphen diktiert, so dass S2 die Balken des vt-Graphen entsprechend einstellen kann.

Zeit: 38'11''
S1: Also, der fährt zuerst (..) bis anderthalb Stunden neunzig
S2: Warte. *(klickt einmal in dn st-Graphen)* Eineinhalb Stunden *(stellt den ersten Balken auf eine Breite von 1,5 Stunden)*, wie viel eineinhalb Stunden bis wohin?
S1: Bis neunzig km/h, neunzig Kilometer.
S2: Bis neunzig *(versucht den ersten Balken vertikal zu verschieben, erwischt aber zunächst den blauen Punkt auf dem Graphen und bewegt diesen)* Also hier äh, ääh.
S1: Das, weil das muss ich jetzt rechnen.
S2: Ja. Neunzig ja? *(verschiebt den ersten Balken nach unten bis auf eine Höhe von 60 km/h)* Sechzig Kilometer pro Stunde. *(verschiebt den blauen Punkt auf dem st-Graphen und dann klickt sie auf den ersten Knickpunkt im st-Graphen)* Ich kann die Punkte hier nicht verschieben, muss ich hier machen. *(weist mit Maus auf vt-Graph)*

134 S1: Ach so.
135 S2: Also sechzig Kilometer pro Stunde.
136 S1: Und beim zweit-
136 S2: Warte, du schreib-, mach doch jetzt einfach einen Strich dahin *(zeigt auf den AB)*. Bis eineinhalb
137 Stunden.
138 S1: *(zeichnet auf AB)*
139 S2: (Ist doch nur so ein Strich) *(Geodreieck fällt zu Boden)*
140 S1: Schmeißt die einfach alles *(bückt sich und hebt Geodreieck auf)* Schmeiß weg, ich heb auf, ne.
141 S2: Na dann. Dann macht er ja Pause. Wie lange? Von eins-
142 S1: Na, halbe Stunde, halbe Stunde.
143 S2: Warte. *(stellt Länge des zweiten Balkens auf 0,5 Stunden und zieht ihn auf die x-Achse)* Halbe
144 Stunde.
145 S1: Genau. *(zeichnet)* Von da bis, nein oops *(etwas fällt ihr aus der Hand)*
146 S2: Und dann, wie lange fährt er dann *(schaut auf den AB)*. Auch eine halbe Stunde, oder?
147 S1: Eine Stunde
148 S2: Eine Stunde lang bis ähm
150 S1: Hundertneunzig Kilometer.
151 S2: *(stellt Länge des dritten Balkens auf eine Stunde)* Hundert *(verschiebt den dritten Balken vertikal*
152 *nach oben, so dass der dritte rote Punkt im st-Graphen ungefähr bei Hundertneunzig landet)* Ja,
153 98 Kilometer ( )
154 S1: Mmh. Äh, Hundert durch eins sind aber Hundert. *(S2 stellt die Balkenhöhe auf genau 100 km/h*
155 *ein)* Guck mal, der fährt eine Stunde auf Hundert Kilometer, das heißt er ist 100 km/h gefahren.
156 *(zeichnet)* Also Hundert ( )
157 S2: Dann wieder eine halbe Stunde Pause, oder? *(stellt mit dem vierten Balken eine halbe Stunde*
158 *Pause ein)*
159 S1: Mhm. Dann fährt er nochmal, ähm, eine eine Stunde
160 S2: [bis 210. *(stellt die Höhe des letzten Balkens ein)*
161 S1: Ja. 210. 210 durch 1 ist (.) 210.
162 S2: So. *(hat Balkenhöhe eingestellt)* Zwanzig Kilometer pro Stunde.
163 S1: Zwanzig nur?
164 S2: Ist doch nicht steil.
165 L: Wie sieht es bei Euch aus?
Zeit: 40'54''

L unterbricht hier, weil die SuS die Arbeit mit der Lernumgebung langsam beenden sollen, damit genügend Zeit für das Unterrichtsgespräch bleibt. Die beiden beenden deswegen diese Aufgabe und sagen, dass sie noch eine Formulierung für die Frage finden müssen, was passiert, wenn man die Balkenbreite verändert. Dazu verbreitert S2 den ersten Balken maximal und meint, dass es dann konstant bleibt. L bestätigt dies und fragt, was da konstant bleibt, worauf S2 erwidert, dass die Geschwindigkeit gleich bliebe. L zeigt den beiden, wie sie die Balken wieder auseinander ziehen können, so dass wieder fünf Balken erscheinen. L entfernt sich und es entsteht folgendes Gespräch im Zuge der Formulierung der Antwort.
Zeit: 42'41''

166 S1: Die Steigung des Graphen verändert sich.
167 S2: Ne, die Steigung des Graphen verändert sich nicht. Wenn ich das hier mache *(verbreitert Balken*
168 *eins maximal)* Bleibt einfach die ganze Zeit konstant.
169 S1: Nee, aber wenn ich das hier hoch und runter mache.
170 S2: Ach so. Ja, dann ja. *(verschiebt den Balken vertikal hoch und runter)*
171 S1: Die Steigung des Graphen verändert sich und
172 S2: *(schaut auf den AB)* ( ) *(liest)* Wenn man den Balken nach oben verschiebt wird der äh Weg-Zeit
173 Graph steiler und äh dann (.) das fährt
174 S1: Oh. Das Auto *(ergänzt das Wort ‚Auto' im Antwortsatz)*
175 S2: *(liest weiter)* fährt schneller und umgekehrt. (.) Ähm (.) Wenn man den Balken nach rechts
176 verlängert, dann bleibt die Geschwindigkeit über den ganzen Weg lang gleich. *(liest weiter)* Die
177 Steigung des Graphen verändert sich *(S2 schaut auf)*
178 S1: (Das mit der Steigung hab ich eigentlich schon da oben)
179 S2: Ja, aber die Steigung verändert sich nicht. Guck mal *(klickt auf den maximal verbreiterten Balken)*
180 sagen wir jetzt mal, hier (..) hier *(verkürzt und verlängert Balken eins)* dadurch verändert sich die
181 Steigung doch nicht äh in dem (.) das grenzt ja nur den Abschnitt ab.
182 S1: *(benutzt Tippex und entfernt die Stelle ‚Die Steigung des Graphen verändert sich' aus dem*
183 *Antwortsatz)*
Zeit: 43'56''

Die Antwort auf dem Arbeitsbogen lautet schließlich: *Wenn man den Balken nach oben verschiebt, wird der Weg-Zeit-Graph steiler und das Auto fährt schneller und umgekehrt. Wenn man den Balken nach rechts verlängert, dann bleibt die Geschwindigkeit über den ganzen Weg lang gleich. Je nach dem wie lang der Balken ist, desto länger ist der jeweilige Abschnitt.* Dabei ist ein Teil mit Tippex übertüncht. Der übertünchte Teil ist beim Halten gegen das Licht sichtbar und sagt aus: *Die Steigung des Graphen verändert sich.*

Reise
Gymnasium 1
Schülerinnen mit Noten im 4er-5er-Bereich

Es werden viele Episoden transkribiert und dadurch der Verlauf durch die gesamte Lernumgebung nachverfolgt.

Abkürzungen:
S1 Schülerin 1
S2 Schülerin 2
J Jenny (Schülerin aus der anderen videographierten Gruppe)
L Lehrer (hier: Forscher)
AB Arbeitsbogen

Vorgeschichte und allgemeine Bemerkungen:
Die SuS wollten für die Finanzierung ihrer Klassenfahrt in der Pause nach der Doppelstunde Kuchen verkaufen, was sie gedanklich auch ablenkte. Um den Kuchenverkaufsstand aufzubauen, mussten wir die zweite Stunde früher beenden und haben deswegen ohne Pause durchgearbeitet, was konzentrationsmäßig ein echtes Problem im Unterrichtsgespräch war.

Die beiden beginnen sofort mit der zu bearbeitenden Aufgabe ‚Markiere die Stationen A-F auf der Landkarte'. Da sie nicht die Instruktionen lesen, bemerken sie zunächst nicht, dass der blaue Punkt auf dem Graphen beweglich ist. Sie versuchen zunächst das Auto auf der Landkarte zu bewegen. Dann benutzen sie die Play-Taste, die aber nicht funktioniert, da das Applet nach oben gescrollt werden müsste, um den Play-button vom unteren gelben Rand weg zu bekommen. Sie versuchen immer wieder, die Play-Taste zu benutzen, aber es bleibt erfolglos. Also beginnen sie, die Fähnchen zu stecken und stecken Fahne A in Neubrandenburg und Fahne F in Cottbus. Sie fragen sich dann, woher sie wissen sollten, wohin die anderen Fähnchen gesteckt werden müssen. Schließlich stecken sie Fähnchen D und E ungefähr nach Abschätzung der Distanzen (ohne inhaltliche Überlegungen wie ‚Stadtgebiet') und B und C stecken sie an verschiedenen Stellen (B in Fürstenberg und C knapp darunter).
Da sie sich unsicher sind, lesen nochmals den Instruktionstext und entdecken, dass man den blauen Punkt auf dem Graphen ziehen kann. Sie stecken daraufhin die Fähnchen A, B, D, E, F korrekt, aber C stecken sie dennoch knapp unterhalb von B.

Sie bearbeiten dann die Fragen ‚Wie weit fährt das Auto und wie lange dauert die Fahrt?' und ‚Wo befindet man sich nach drei Stunden Fahrt?' Beide Fragen werden mit Hilfe des Graphen korrekt beantwortet und die zweite Frage wird auch auf die Situation zurückbezogen mit der Antwort: *A100 Berlin, 145km.*

Das Transkript beginnt mit der Bearbeitung der Frage ‚Was passiert zwischen den Stationen B und C?'

Zeit: 5'50''
S2: *(bewegt den blauen Punkt zwischen B und C)* Was passiert zwischen Punkt B und C?
S1: Ich weiß es auch nicht.
S2: *(bewegt den blauen Punkt zwischen B und C hin und her)* Der bleibt doch da irgendwie, oder?
(bewegt den blauen Punkt zwischen B und C hin und her)
S1: Vielleicht-
S2: Macht der eine Pause, oder so? *(lächelt)*
S1: Nee, warte mal, wie viele Minuten vergeudet er denn?
S2: *(schiebt den blauen Punkt auf D)* Ach so, guck mal, dann ist ja, dann sind die beide auf einem
Punkt *(schiebt Fähnchen C auf Fähnchen B)*
S1: Nein.
S2: Weil guck doch mal. Die sind doch, guck mal *(schiebt den blauen Punkt zwischen B und C hin und*
her) der ist doch immer auf der gleichen Stelle.
S1: Ja, er bewegt sich nicht ( )
S2: [Aber die Zeit verändert sich nur
S1: Ach so.
S2: Also macht er eine Pause, oder?

S1: Ja.

Zeit: 6'29''

Antwort auf dem AB: *Der Fahrer bzw. das Auto macht eine Pause, weil es sich nicht fortbewegt.*

Während S2 diesen Antwortsatz schreibt, zieht S1 den blauen Punkt zwischen D und E auf dem Graphen. S1 zieht den Punkt ein paar Mal langsam zwischen D und E hin und her. S2 schaut auf und liest die nächste Aufgabe ‚Was passiert zwischen Station D und E?' vor. S1 schiebt den blauen Punkt ein paar Mal zwischen D und E hin und her und S2 schaut dabei zu.

Zeit: 7'11''

S2: Fährt einfach. (..) Hügelstraße lang. *(lacht kurz)*
S1: *(bewegt den blauen Punkt zwischen D und E hin und her)* Durch Berlin, was ist denn durch Berlin?
S2: Landstraße.
S1: [von D bis E (.) *(nach vorne gerichtet)* Wo seid ihr eigentlich? (..) *(J nennt die Aufgabe, die sie gerade bearbeiten)* Ja, was passiert denn zwischen D und E? Wisst ihr das?
J: Ja, da fährt er gerade durch die Stadt und da-
S1: [zu viel Verkehr, oder wie?
J: Genau. Und da fährt es ja nicht konstant, weil es ja ab und zu mal anhalten muss ( )
S1: Ach so. Ok.
S2: *(schreibt)*

Zeit: 7'41''

Antwort auf dem AB: *Auto fährt durch die Stadt; Fahrt nicht konstant, da z.B. Ampel (Stadtverkehr).*

Bei der Berechnung der durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit haben die beiden zunächst große Schwierigkeiten und bestätigen sich gegenseitig, dass sie beide nicht wüssten, wie man das macht. Sie fragen L um Hilfe. L zögert, so dass S1 selbst sagt: ‚Durchschnittliche Reisegeschwindigkeit ist doch Kilometer pro Stunde'. L fragt, welche Kilometeranzahl. Sie beantworten dies korrekt und sagen dann selbst, dass man dies durch die Gesamtzeit teilen müsste. L bestätigt ihre Aussagen und die beiden berechnen korrekt 270:4,5=60 km/h.

Dann wechseln sie zu Aufgabe 2. S1 liest den Text auf dem Bildschirm laut vor. Sie liest, dass der Graph auf der rechten Seite die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt angibt.

Zeit: 11'06''

S1: *(schiebt den Punkt im vt-Graph zwischen D und E hin und her)* Also hier hat er (.) immer so angehalten. Deshalb ist die nicht konstant.
S2: [Mhm. Ach ja, *(liest)* wie hoch ist die Geschwindigkeit zwischen C und D? Wie kann man das ablesen?
S1: Zwischen C und D. Naja, man geht mit einem Punkt zwischen *(bewegt den blauen Punkt im vt-Graph zwischen C und D, also auf den Balken 70km/h)* C *(bewegt den Punkt zu weit nach links)*
S2: Na ist ja. Das hier.
S1: *(bewegt den Punkt zurück auf den Balken 70km/h und fährt den Balken langsam ab)*
S2: (Hast du es?)
S1: Na, die Linie. Da wo es
S2: [Na, das ist doch von der Durchschnittsgeschwindigkeit 70 km/h.
S1: Also, steht da Durchschnittsgeschwindigkeit? Aber da steht nur Geschwindigkeit.
S2: [Wie hoch ist die Geschwindigkeit zwischen C und D. Na, ist doch.
S1: [Na, 70 (.) Das geht ja gar nicht. (.) Die Geschwindigkeit (.) ach so, doch steht ja Kilometer pro Stunde.
S2: *(schreibt)* Also, die Geschwindigkeit
S1: [70 Kilometer pro Stunde *(8 sek, S2 schreibt)* Ähm.
S2: Ja, und wie kann man das ablesen?
S1: Warte (.) Ähm (.) *(fährt mit Mauszeiger auf Abschnitt AB im st-Graph)* Die Linien sind ja immer konstant. Und diese kleinen Hügel hier *(fährt mit Maus über den Abschnitt D bis E im vt-Graph)*, die sich immer ändern sind immer zwischen D und E
S2: [Wir können ja schreiben ähm, nein, wir können schreiben (.) der Weg von C nach D ist konstant, somit auch eine konstante Geschwindigkeit und das können wir in dem Graph ablesen, oder?
S1: B ist hier unten, weil es stehen bleibt *(zeigt mit Maus auf Pausenabschnitt im vt-Graph)* Schreib

einfach, zwischen B und C (.) macht das Auto ja ein Pause, bleibt also stehen, also hat es gar keine

S2: [nein

S1: Geschwindigkeit und danach kommt als nächstes das *(zeigt mit Maus auf den Balken bei 70 km/h nach der Pause)* und nach B und C kommt natürlich C und D und das muss dann die Geschwindigkeit sein *(fährt mit Maus den Balken bei 70 km/h ab)*.

S2: Och ja, mann natürlich, aber wir sollen ja schreiben, wie kann man das ablesen.

S1: Das hab ich doch gerade gesagt.

S2: Ist doch bescheuert.

S1: Na, dann schreib auf, wie du es denkst.

S2: Ich weiß nicht mehr, wie ich es gedacht habe.

S1: Naja, ich weiß es auch nicht.

S2: Mann, Silvi.

S1: Na, ich merk mir das doch nicht, was du gerade eben noch gesagt hast.

S2: *(schreibt)*

Zeit: 12'48''

S2 schreibt auf den AB: *Die Geschwindigkeit ist 70 km/h. Da die Strecke von C zu D eine konstante Geschwindigkeit besitzt, kann man das auf dem Graphen ablesen. (Anmerkung: Den Balken auf 70 km/h markiert sie rot und verweist mit einem Pfeil darauf und schreibt: s. rot markiert).*

Dann lesen sie die Frage ‚Kann man die Geschwindigkeit auch ablesen, wenn man nur den Weg-Zeit-Graphen gegeben hat? Wenn ja, wie macht man das?'
Zeit: 14'07''

S1: Weg, Zeit (.) das ist aber *(zeigt mit Maus auf die Achsen des Weg-Zeit Graphen)* ja. Weg-Achse, Zeit-Achse

S2: Weg durch Zeit, oder?

S1: Naja, siebzig

S2: [Naja, aber wie willst du das machen?

S1: Warte mal. *(zeigt mit Maus auf C und zieht den blauen Punkt zwischen B und C hin und her)* Na zwischen (.) der Mittelwert zwischen B und C herausfinden und den (.) durch siebzig und der Mittelwert ist leider Gottes Eins (.) das sieht man.

S2: Nein.

S1: Doch der Mittelwert

S2: [Insgesamt, das ist ja nicht nur jetzt auf B und C. Das ist ja insgesamt.

S1: [*(liest auf AB)* ( ) Naja, mein ich doch (.) Den Mittelwert rausfinden *(fährt mit Maus zwischen C und D)* und den dann ähm (.) ach ja, scheiße, wie mach ich denn das jetzt?

S2: Aber guck doch mal, da müsste man doch wissen wie viele Kilometer der von C zu D und das dann durch die Zeit, die sie insgesamt brauchen, oder? Dann hat man die-

S1: Na, fährt er doch. Hier *(zeigt mit Maus auf C)* sind es fünfzig bis 120 *(zeigt mit Maus auf D)* macht 70 und 70 (.) durch die Zeit, wie viel Zeit, warte mal *(schiebt blauen Punkt auf C)* Ich glaub, das ist Eins (.) Komma (.)

S2: zwei

S1: Eine Stunde zwanzig Minuten, oder so?

S2: Mhm.

S1: Und das sind auch *(schiebt blauen Punkt auf D)* Eins Komma zwei.

S2: Hast du mal einen Taschenrechner?

S1: Genau, und das macht auch eins Komma zwei (.) nee ein komma zwei (.) ne, das macht zwei Komma zwei, so (.) zwei Komma zwei?

S2: Siebzig durch zwei Komma zwei?

S1: Nee, den Mittelwert aus dem Wert *(umkreist mit Maus den Abschnitt zwischen C.x und D.x auf der x-Achse)*

S2: Ach so.

S1: Ach Gott, wie rechnet man das denn? *(jemand aus dem Klassenraum scheint etwas zu S1 zu sagen und sie reagiert darauf mit einer unverständlichen Äußerung und dann mit)* Nee darauf komm ich trotzdem nicht. (..) Muss ja siebzig durch Eins dann gerechnet werden.

S2: Kann man gar nicht, guck doch mal hier *(zeigt auf Monitor)* Wie willst du denn hier.

S1: Ja, weiß ich auch nicht.

Zeit: 16'07''

S2 beginnt dann zu schreiben. Sie notieren auf dem AB: *Nein es ist nicht möglich.* S1 sagt dann nochmals in die Kamera, dass sie aber denkt, dass es schon möglich ist. Beide sagen dann in die Kamera, dass sie lieber nichts Falsches sagen wollen und deswegen lieber ‚Nein es ist nicht möglich' schreiben. Sie ergänzen dann aber noch auf dem AB: *(Es könnte sein, aber wir können nur Vermutungen aufstellen wie es geht, doch das ist bestimmt falsch ☺).*

S2 liest die Aufgabe ‚Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? Wie liest man das ab? Kann man das wieder nur am linken Graphen erkennen und wie?'
Zeit: 17'28''

103 S2: Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? (.) Da, oder? *(zeigt auf Monitor)*
104 S1: Naja, wenn der Anstieg am größten ist *(fährt mit Maus den Abschnitt EF im st-Graph ab)*
105 S2: Stimmt, also *(will schreiben)* (.) Wann ist die Geschwindigkeit am größten? Von E zu F?
106 S1: Und das sieht man ja. Guck mal hier. A und B geht nicht *(fährt mit Maus den Abschnitt AB im st-*
107 *Graph ab)*, also A und B-
108 S2: Ja, weiß ich doch.
109 S1: C und D ist aber wieder kleiner *(fährt mit Maus den Abschnitt CD im st-Graph ab)*, bei B und C ist
110 ja gar nicht, bewegt sich das Auto nicht *(fährt Abschnitt BC ab)*, bei D und E kann man nicht
111 genau *(Maus auf Abschnitt DE im st-Graph)*-
112 S2: Die Strecke ist auch viel länger, oder? (..) Das ist doch eine viel längere Strecke in viel kürzerer
113 Zeit *(zeigt auf Monitor)*
114 S1: *(gähnt)* Ach, schreib auf.
115 S2: Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten? E zu F. *(schreibt)* Wie liest man das ab?
116 S1: Die Steigung der Gerade ist am höchsten.
117 S2: *(schreibend)* Steigung der Geraden ist am größten. (.) Ähm, größerer Weg bei kleinerer Zeit, oder?
118 S1: Längerer Weg (..) in kurzer Zeit. *(S2 schreibt)*
Zeit: 18'52''

Die Antwort auf dem AB lautet: *E zu F; Steigung der Geraden ist am größten, längerer Weg in kurzer Zeit;*

Dann kommt L vorbei und schaut sich die bisherigen Lösungen an. L fragt nach, welche Vermutungen die beiden denn bei der vorigen Aufgabe (‚Kann man die Geschwindigkeit auch ablesen, wenn man nur den st-Graph hat? Wie?') hätten. S2 meint, dass man ja die Kilometer wüsste, die zwischen C und D liegen und dass das 70 km seien.
Zeit: 19'20''

119 S2: Wenn man jetzt von C und D, weiß man ja, wie weit das ist.
120 L: Genau.
121 S1: Sind 70 Kilometer.
122 L: Genau.
123 S2: Ähm, und wenn man jetzt die Zeit hat (.) hier unten (.) da könnte man doch einfach
124 S1: [da nehm ich den Mittelwert, oder so.
125 Aber wenn man
126 L: Ja, also, was wollt ihr machen? Du hast dann die Zeit da unten.
127 S2: Na, wieder Kilometer durch Stunde, oder?
128 L: Ja.
129 S2: Aber wir wissen-
130 S1: Wir haben ja zwei ähm Zeiten (.) Oder sollen wir die Zeit (.) *(der blaue Punkt liegt im st-Graph*
131 *auf D und S1 fährt mit der Maus die senkrechte Verbindung zur x-Achse ab und zeigt auf den*
132 *schwarzen Punkt auf der x-Achse, der auf D.x liegt)* Ach so, 2,2 Stunden Minus *(zeigt mit Maus*
133 *auf C.x auf x-Achse)* 1,2 (.) das ist eine Stunde (.) braucht man von C zu D und dann die 70
134 S2: [Naja, das haben wir aber jetzt nicht
135 S1: Kilometer durch die eine Stunde, macht 70 Kilometer pro Stunde.
Zeit: 20'00''

L weist sie noch auf den Balken bei 70km/h im vt-Graph hin. Als L weggeht, sagt S1 lächelnd ‚Siehste, ich hatte mal wieder recht.' Die beiden schreiben das aber nicht mehr auf, sondern fahren mit der nächsten Aufgabe fort.

S2 liest dann die nächste Aufgabe vor ‚Kann man mit dem rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist? Wenn ja, wie müsste man vorgehen?'

Zeit: 20'19''

S1: Der hier? *(weist mit Maus auf vt-Graph)*
S2: ( )
S1: Wie weit man gefahren ist.
S2: Natürlich *(zeigt auf Monitor)* Da muss man doch nur umstellen (..) Das.
S1: Naja. Die Kilometer pro Stunde (.) Wie rechnet man nochmal das andere aus? (.) Kilometer durch Stunde.
S2: Mhm.
S1: Warte, dann heißt das also (..) ähm Kilometer durch Stunde (.) Gott, muss ich mal gerade überlegen. Das ist ja das Ergebnis *(4 sek)* Moment (.) Genau, Kilometer pro Stunde mal die Stunde.
S2: Ja?
S1: Ja. Weil, wenn wir hier rechnen Kilometer durch Stunde
S2: [Warte *(schreibend)* Kilometer pro Stunde mal Stunde
S1: Weil, hier oben haben wir ja gerechnet *(zeigt auf AB)* oder auf der anderen Seite, keine Ahnung, Kilometer durch Stunde ist gleich Kilometer pro Stunde (.) Verstehst du es?
S2: Ja, ist doch, also Kilometer pro Stunde mal Stunde.
S1: Ja.
S2: Also, Kilometer geteilt durch Stunde mal die Stunde.
S1: [die höchste- ja, aber wie denn, was für ´ne Kilometer pro Stunde-Anzahl wollen wir denn nehmen?
S2: Ja, wollen wir ein Beispiel nehmen?
S1: Ja, aber wir sollen ja-
S2: Nimm mal eine Strecke, irgend eine. (..)
S1: Hmm, warte mal *(Maus auf Balken eins im vt-Graph)* 60 (.)
S2: Na, von A zu B nehmen wir jetzt mal, ja?
S1: Ja.
S2: *(schreibend)* A zu B
S1: [Aber wir können es doch gar nicht wissen. (.) Wir können es nicht so machen, weil wir wollen ja die Gesamtstrecke wissen *(Mauszeiger auf F in st-Graph)*, wie weit wir gefahren sind, also von A nach *(weist mit Maus von A nach F im st-Graph)* F. Also müssen wir alles eigentlich wissen. *(weist mit Maus auf die Balken im vt-Graph)*
S2: Ok, Kilometer pro Stunde mal Stunde.
S1: Hä, das macht gar keinen, wie sollen wir das denn machen? Guck mal *(zieht den blauen Punkt im vt-Graph, so dass der Punkt sich zwischen D und E bewegt)* wir können das Kleine doch nicht alles abmessen.
S2: Naja, ausrechnen kann man es alles, aber ( )
S1: [Ja, aber ich habe jetzt gerade keine Zeit und keinen Bock *(sieht in die Kamera und lächelt)* also Zeit hab ich schon ( )
S2: [Ok, jetzt machen wir erstmal A zu B. Was ist das jetzt? Also, die Kilometer pro Stunde-
S1: [60 Kilometer *(Mauszeiger auf Balken 60 km/h)* und zwar innerhalb von *(Mauszeiger auf x-Achse)* eins Komma (.) nee null Komma (.) ich sag dir gleich die Stundenanzahl *(beugt sich zum Monitor nach vorne)*
S2: acht?
S1: Null Komma (.) acht, genau.
S2: *(schreibt)*
S1: Jenny, dürfen wir noch mal den Taschenrechner haben?
S2: [mal mal die Zeit (..) (wieder mit) mal null Komma acht, oder?
S1: Nein. *(schaut auf AB)* Du musst die Zeit da unten weglassen *(nimmt den Stift und schreibt)*. Das heißt so. Kilometer pro Stunde mal 0,8 (.) Stunden. (..) Da steht doch-
S2: Ach so *(auf dem AB stand zunächst 60km/0,8h, was dann zu 60km/h.0,8h korrigiert wird)* Ja.
S1: Ja. *(S2 schreibt, S1 schaut zu)* Und dann kannst du das wegkürzen.
S2: [wegkürzen *(kürzt h raus)*
S1: Macht 60 mal 0,8 *(benutzt Taschenrechner)* (.) 48 (.) 48 Kilometer ist man gefahren.
S2: Ist man? *(sieht auf Monitor)* (.) Ja.
S1: [Ja.
S2: Naja, und das muss man jetzt (.) und dann muss man es für jede Strecke ausrechnen und die
S1: [für jede Strecke machen
S2: ganzen Strecken dann zusammen rechnen.
S1: Und wenn man das für-
S2: Oder?

S1: Ja, und wenn man das für jede Strecke macht *(S2 schreibt)* hat man die Gesamtanzahl.
Zeit: 23’35’’

Die Antwort auf dem AB lautet: *km/h*h, Bsp: A zu B; 60 km/~~h~~*0,8~~h~~=48 km. Wenn man das für jede Strecke ausrechnet und alle Ergebnisse addiert, hat man die gesamte Strecke.*

Dann bearbeiten die beiden Aufgabe 3 ‚Beschreibe, wie sich der Weg-Zeit-Graph ändert, wenn man die Balken im Geschwindigkeit-Zeit-Graph ändert.’ S1 versucht zunächst die roten Punkte im st-Graphen zu schieben, bemerkt dann aber schnell, dass man die Balken vertikal schieben und horizontal verlängern bzw. verkürzen kann. Für die Bearbeitung der Aufgabe lassen sich die beiden gerade einmal zwei Minuten Zeit. Das Transkript beginnt, als S1 den ersten Balken vertikal verschiebt.
Zeit: 25’06’’

S1: *(verschiebt Balken eins langsam nach oben und dann schnell wieder un die ungefähre Ausgangsposition)* Strecke wird länger *(schiebt blauen Punkt im vt-Graph vom zweiten auf den ersten Balken)* Nee, nee, so nicht mein Freund hier *(schiebt Balken drei vertikal)*
S2: Die Strecke wird länger und kürzer, wenn man (.) nee, umso, umso äh höher man die Balken-
S1: *(verändert Balkenbreite von Balken drei ein paar Male, S2 schaut zu, 4 sek)*
S2: Na, der wird dann länger.
S1: Cool.
S2: Also *(setzt zum Schreiben an)* umso weiter der ähm (.) umso weiter die Balken die y-Achse steigen, umso länger wird die Strecke?
S1: Umso höher (.) umso höher sie die y-Achse *(verschiebt Balken eins nach oben und wieder runter)* höher steigen, desto länger
S2: *(schreibend)* Warte.
S1: wird der Fahrtweg.
S2: *(schreibend)* Warte doch mal.
S1: Tschuldigung.
S2: *(schreibend)* Umso höher die Balken die y-Achse (.) <u>ansteigen</u>?
S1: Mhm (..) Umso länger oder desto länger wird der Fahrtweg.
S2: *(schreibend)* wird (.) der (.) Fahrtweg. Wird er? *(schaut auf)*
S1: Ja.
S2: Warte mal, mach nochmal.
S1: *(verschiebt Balken eins vertikal und beide schauen zu)*
S2: Ja, genau und umso länger man sie auf der x-Achse verschiebt, umso äh (.)
S1: [Der Weg wird länger Wenn man die Balken so- *(versucht die Balkenbreite an versch. Balken zu ändern, was ihr zunächst nicht gelingt)*
S2: Ja, wenn du sie aber lang ziehst, umso schneller wird er, umso langsamer oder schneller wird es.
S1: [*(versucht Balkenbreite zu ändern, was ihr nicht gelingt, da sie an den grünen Punkten zieht)* Wie habe ich denn das vorhin gemacht? *(verändert die Balkenbreite, indem sie an einem roten Punkt zieht)* Wenn man die roten-
S2: Umso langsamer beziehungsweise *(schaut zu S1)* (.) schneller wird es.
S1: *(verlängert und verkürzt Balken drei ein paar Mal)* Es-
S2: Es verändert sich ja die Zeit.
S1: Ja, Mensch das ist ja in- *(bewegt einen grünen Punkt vertikal, der zu einem Balken der Länge Null gehört)*
S2: *(schreibt)*
Zeit: 26’50’’

Der Antwortsatz auf dem AB lautet: *Umso höher die Balken die y-Achse ansteigen, umso länger wird der Fahrtweg. Umso länger die Balken auf der x-Achse werden, umso mehr Zeit benötigt das Auto für die Strecke.*

Sie bearbeiten dann die Aufgabe mit Herrn Paulsen und benutzen dabei den ‚Prüfe-Lösung-Button’. S1 stellt die Situationen ein, zögert kurz, wenn es um die Pause geht. Ansonsten werden die Lösungen sehr schnell eingestellt. S1 diktiert die Punkte, die S2 in den AB einträgt.
Auf die Frage ‚Wie viele Lösungen gibt es? Und sind alle in der Praxis durchführbar?’ schreiben sie: *Es gibt eine Menge Lösungen! Ja, sie sind alle in der Praxis durchführbar.*
Sie bearbeiten dann die Aufgabe ‚Zeichne zu folgendem Weg-Zeit-Graph einen passenden Geschwindigkeit-Zeit-Graphen.’ S1 versucht zunächst einen roten Punkt im st-Graphen zu ziehen, wechselt dann sofort zum vt-Graphen. S2 diktiert die Knickpunkte des st-Graphen und S1 stellt die Balken entsprechend ein. Dabei stellen sie den letzten Balken zu ungenau ein, was ihnen aber nicht auffällt (er müsste bei 20 km/h sein, ist aber darunter).

Dann liest S2 die letzte Aufgabe ‚Betrachte nochmals den Graphen aus Aufgabe 1. Glaubst Du, dass er die beschriebene Situation exakt bzw. realistisch wiedergibt? Wenn nicht, was müsste man verändern?' S1 stellt Aufgabe 1 ein.
Zeit: 38'48''

S2: Was denn für eine beschriebene Situation? *(S1 kreist mit der Maus über der Landkarte)* Ach so. *(5 sek)* (   )

S1: *(versucht das Auto auf der Landkarte zu bewegen, bewegt dann den blauen Punkt auf dem st-Graphen, langsam von A nach B)* Naja, was ist denn mit den Ecken und Kanten *(fährt mit Maus über die rote Route auf der Landkarte, die von A bis B reicht)*? Das kann man ja jetzt nicht so genau sagen.

S2: Wieso, na ja, das kommt doch eigentlich nur darauf an, ob er ähm (.) hier fährt er jetzt ja nicht unbedingt durch eine Stadt *(zeigt auf Monitor)*, also hat er eine konstante Geschwindigkeit. *(S1 zieht den blauen Punkt ein paar Mal zwischen B und C hin und her und dann weiter in Richtung D)* Wenn er jetzt hier so durch Berlin fährt. Hier so, von D zu E. *(S1 zieht den Punkt nach C zurück und dann wieder über D nach E und zurück zu D)* Na, und was müsste man verändern?

S1: (Da gibt es gar nichts zu   )

S2: Also, ja oder nein.

S1: Ich glaube eigentlich nicht, dass etwas verändert werden müsste. Ich finde es eigentlich schon ziemlich gut, wie es ist.

S2: *(schreibt)* Also, ist es realistisch.

Zeit: 39'56''

Sie schreiben auf den AB: *Es ist unserer Meinung nach realistisch wiedergegeben. Wir wüssten nicht, was verändert werden muss.*

Reise
Gymnasium 2
Schülerinnen mit Noten im 2er-3er-Bereich

Abkürzungen:
S1 Schülerin 1
S2 Schülerin 2
JV Junge von vorne
JH Junge von hinten
M Mädel von hinten
L Lehrer (hier: Forscher)
AB Arbeitsbogen

Die beiden fangen sofort mit der Bearbeitung der ersten Aufgabe (Fähnchen Stecken an). Den Einführungstext lesen sie nicht genau und benutzen zunächst nicht die Möglichkeit, den blauen Punkt auf dem Graphen zu bewegen. Fähnchen A und F stecken sie ohne Zuhilfenahme des Applets. Dann fragen sie sich, woher sie denn wissen sollen, wo die anderen Fähnchen hinkommen. Sie versuchen es zunächst abzuschätzen, entdecken dann aber Play- und Stopptaste. Um die weiteren Fähnchen zu stecken, benutzen sie die Play- und Stopptaste. Das Transkript zeigt die Episoden, in der es um die Position von B und C geht.
Zeit: 3'00''

S1: Das ist Play *(zeigt auf Monitor, S2 startet die Animation durch Drücken der Playtaste und stoppt kurz vor B)* Aha. Ok, also wir brauchen nach *(wendet sich zum AB, 3 sek)* nach ca. einer Stunde ist er zwischen B und C. Lass mal eine Stunde durchlaufen.
S2: *(startet Animation)* Ah! *(stoppt Animation bei C)*
S1: Na, ok, jetzt ist er bei C.
S2: Also kurz <u>nach</u> einer Stunde.
S1: Musste gucken. Wenn er da bei C ist, dann können wir das Auto ( )
S2: *(bewegt Fähnchen C auf die entsprechende Position)* ( ) Ach so, der bewegt sich auch, das habe ich noch gar nicht gesehen (.) Ok. Jetzt gucken wir, wann er bei D ist, ja? *(startet Animation)*
S1: Bei B. Stopp!
S2: *(S2 will stoppen, startet aber aus Versehen die Animation von vorne)* Ah! Ich muss auf Stopp drücken *(stoppt Auto kurz vor B)*
S1: Nee ( ) noch weiter. *(S2 startet Animation von vorne)* Ich sage stopp. Stopp! *(S2 stoppt bei B)*
S2: Da (haben wir) aber jetzt C.
S1: Na, da ist aber B auch. (..)
S2: Ach so, stimmt, da macht er wahrscheinlich eine Pause. *(steckt Fähnchen B zu Fähnchen C)* Aber schau mal, da ist er nach 50 Minuten und äh *(weist mit Maus auf Position B/C in der Landkarte)*
S1: *(wendet sich gemeinsam mit S1 nach hinten)* Der macht dann Pause. *(beide wenden sich wieder nach vorne)*
S2: Und jetzt gucken wir, wo D ist.
Zeit: 4'08''

Zur Bearbeitung der Aufgabe wird lediglich die Play- und Stopptaste benutzt. Die Schülerinnen sind auch bemüht die Fähnchen möglichst genau zu stecken. Die Animation wird oft durchlaufen.
Aufgabe 1a) wird ohne Probleme gelöst, für Aufgabe 1b) wird die Animation verwendet und bei ca. drei Stunden gestoppt.

Die beiden beginnen mit der Bearbeitung der Aufgabe ‚Was passiert zwischen den Stationen D und E?'
Zeit: 6'28''

S2: Na, das Auto ähm (..)
S1: Ähä, ( )
S2: [Nee, da ist es immer so huckelig *(weist mit Maus auf Graphabschnitt zwischen D und E)* Vielleicht (.) kann es sein, dass er
S1: [ganz viele Kurven
S2: Nee. Dann müsste das ja da auch so ne *(zeigt auf Monitor)*. Vielleicht geht das Auto immer an und aus.

S1: [Ja, aber da sind viele kleine Kurven *(zeigt auf Monitor)*

S2: Ja, aber die Kurven bringen die doch da gar nicht mit rein, oder? *(zeigt auf Monitor)* (..) Oder doch? Nee, eigentlich nicht.

S1: Mach mal das Auto weg, damit man sieht, was da ist *(Das Auto liegt zwischen D und E auf der Landkarte. S1 versucht die Playtaste zu drücken, aber es gelingt zunächst nicht (Anm. die beiden benutzen das Touchpad auf eigenen Wunsch))*

S2: Du musst (.) du kannst (.) du musst hiermit klicken.

S1: Ach, ich komm- *(startet Animation)*

S2: ( )

S1: *(stoppt das Auto bei B, beide beugen nach vorne und schauen auf den Monitor)* Was ist da? (..) Er fährt (.) teilweise (.)

S2: Kann es sein, dass das Auto immer an und ausgeht, dass es so ruckelt? (..) Das ist voll unlogisch. *(4 sek)*

S1: Guck mal, das kann aber keine (..)

S2: Na, wir haben hier Stunden

S1: *(nach hinten gewandt)* Das ist doch keine Ampel, das geht doch gar nicht. Guck mal, eine Ampel, das wären fast (.) mehr als zehn Minuten, die er da steht.

M: Nein, wir reden gerade zwischen D und E.

S1: Ja, genau.

S2: [Ja, da sind wir auch gerade. *(beide wenden sich wieder nach vorne)* *(in den Klassenraum gerichtet)* Das kann doch keine Ampel sein.

JV: Stadtverkehr. Stau.

JH: Das kann keine Ampel (.) Das kann kein Stau sein. Nein, er fährt manchmal sogar mit 65 km/h und er-

S2: *(zu JH gewandt)* Ja, er macht das Auto einfach immer an und aus.

S1: Nein, er (.) Stadtverkehr (.) manchmal kann er schneller und manchmal nicht so schnell fahren.

S2: Ja *(zu S1 gewandt)*, er macht's an und aus. Ist ja das Gleiche.

Von vorne und hinten kommen verschiedene Bemerkungen, von denen man nur Wortfetzen transkribieren kann, dabei sind ‚zäher Verkehr', ‚auf der Autobahn sind doch keine Ampeln'.

S1: Ja, ok. *(als Reaktion auf ‚zäher Verkehr'?)*

S2: Oder Auto wird (.) schreib Auto wird immer aufgehalten, oder so

S1: [Rush-Hour *(lacht laut)*

S2: Schreib auf, Auto wird aufgehalten. *(S1 schreibt)*

Zeit: 8'14''

Die Antwort auf dem AB lautet: *Stadtverkehr, Ampel wird aufgehalten.*

Die beiden wenden sich dann der Berechnung der durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit zu.
Zeit: 8'24''

S2: Wie lange hat er gebraucht? Vier Stunden Dreißig.

S1: Also, er fährt 270 Kilometer

S2: auf 4 Stunden 30.

S1: pro 4 Stunden (.) also jetzt runterre- (.) ach so (..) *(schreibend)* Vier Komma fünf Stunden (..). dann fährt er

S2: [und dann hast du auf (.) <u>einem</u> Kilometer *(es entsteht eine Pause, da S1 einen Taschenrechner benötigt)* Dann fährt er doch auf einem Kilometer (..)

S1: Nee, nicht auf einem Kilom- (..) Dann fährt er *(bedient den Taschenrechner)* Pro, pro halbe Stunde können wir ausrechnen.

S2: Ja.

Dann wird es unverständlich, weil die beiden anfangen Kaugummi zu verteilen und dabei weiter über die Aufgabe sprechen.

S1: Ja, aber wir müssen ja pro <u>Stunde</u> ausrechnen.

S2: Du kannst einfach ausrechnen 270 (.) durch (.) 4,5. Dann haben wir es doch *(S1 bedient den Taschenrechner)* Na, und dann noch mal (.) sechzig. Also fährt er (..) Wir können ja-

S1: [Dann haben wir eine Stunde. Ja, dann haben wir eine Stunde, ist richtig.

S2: [Schau, mal wir können ja Ja, nä.

Zeit: 9’39’’

Die Antwort auf dem AB lautet: *270/4,5 Std = 60 km/Std*

Die beiden wechseln dann zu Aufgabe 2. S2 bewegt den blauen Punkt im vt-Graph und versucht den Punkt C zu erreichen. Dann fährt sie den Balken langsam nach rechts ab, bis sie bei D landet. Auf die Frage, wie hoch die Geschwindigkeit zwischen C und D ist und wie man das ablesen kann, meint S2: Man könne es ablesen, indem man den Punkt verschiebt. Sie meint, dass der Graph (st-Graph) linear ansteigt und deswegen der andere Graph auch linear sein müsse und als Antwort notieren sie auf dem AB: *70 km/h. , man schiebt den Punkt auf den Punkt C und da es der 2 lineare Anstieg ist, ist es im Koordinatensystem 2 der 2. Balken.*

Dann gehen sie zur Frage ‚Kann man die Geschwindigkeit auch ablesen, wenn man nur den Weg-Zeit-Graphen gegeben hat? Wie?’
Zeit: 12’11’’

75 S2: Ja, kann man, indem man (.) ähm die Kilometer (.) die zurückgelegte Kilometerzahl zwischen C
76 und D anguckt und dann die Stundenanzahl und das dann durcheinander teilt.
77 S1: *(schreibt)*
Zeit: 12’23’’

Antwort auf dem AB: *Man ließt Stundenanzahl / Kilometer ab und teilt dies durcheinander um auf Std/km kommt.*

Bei der Bearbeitung von Aufgabe 3 erkennen die beiden, wo der Abschnitt mit der höchsten Geschwindigkeit ist. Dabei zeigen sie mit der Maus auf den höchsten Balken und stellen fest, dass dies ‚kurz nach drei Stunden’ der Fall ist. Dann geht es um die Frage, ob man dies auch wieder mit dem linken Graphen herausfinden kann.
Zeit: 13’15’’

78 S2: Und nur mit dem linken Graphen? (..)
79 S1: Ah, das weiß ich, das habe ich gestern gemacht. Ähm, du kannst die Steigung berechnen, indem
80 du (.) den Winkel hast (.) und dann ähm den (.) den Tangens von dem Winkel ausrechnest. Dann
81 hast du die Steigung raus.
82 S2: Ach so.
Zeit: 13’35’’

Beim Aufschreiben messen sie dann den Winkel den die Strecke EF mit der zur x-Achse parallelen Gerade durch E einschließt. Er beträgt 68° und mit dem Taschenrechner berechnen sie den Tangens von 68° und kommen auf 2,4. Sie notieren auf dem AB: *kurz nach der 3. Std., man misst den Winkel Alpha und berechnet Tangens Alpha. m ungefähr 2,4.* (Dabei zeichnen sie den Winkel Alpha in die Skizze des AB ein.)

Sie bearbeiten dann die Aufgabe ‚Kann man mit Hilfe des rechten Graphen herausfinden, wie weit man gefahren ist?’
Zeit: 15’18’’

78 S2: Ja, kann man (..) Man kann ja *(fährt mit Maus über einen Balken des vt-Graphen und dann auf die*
79 *Angabe km/h an der y-Achse)* man hat ja Kilometer pro Stunde
80 S1: [Man muss die ganzen Balken addieren, oder?
81 S2: Nee.
82 S1: Stimmt.
83 S2: *(fährt mit Maus über ‚[km/h]’-Beschriftung der y-Achse)* Man hat ja Kilometer pro Stunde. Das
84 heißt (..) man hat ja die Stundenanzahl gegeben *(fährt mit Maus über x-Achse) (3 sek)*
85 S1: Kann man nicht.
86 S2: Doch, kann man. *(4 sek)* Mmh *(9 sek)* Ok. *(4 sek)* Vielleicht muss man, ähm, hier das alles
87 zusammen addieren und dann-
88 S1: [Mein ich doch, die Balken-
89 S2: Ja, und dann durch die Anzahl teilen (..) also das plus das *(zeigt auf Monitor)* und dann wie viele
90 davon sind, und dann hast du die durchschnittliche- *(S2 sieht zu S1 und S1 schüttelt den Kopf)*. Das
91 ist doch viel zu viel (.) Wenn du das alles zusammen addierst. Schau mal, du hast doch allein
92 schon, wenn du 60 und 95 zusammen addierst (hast du mehr als die Hälfte)
93 S1: [nein, nein, nein, nicht die Werte (.) das hier *(zeigt*
94 *auf Monitor)* (..) Eins (.) bis eins (..)

S2: *(runzelt die Stirn)* Und was soll dir das bringen?

S1: *(lacht)* Dann hast du Zentimeter (   ) (..) Also ein Zentimeter entspricht ja immer (..) Na, guck mal. Er fährt jetzt hier (.) also fast in einer Stunde (.) die ganze Zeit sechzig Kilometer. *(3 sek)*

S2: Ja.

S1: Also, dann hab ich schon mal 60 Kilometer. Also kann man es doch rauskriegen. *(3 sek)*

S2: Ja.

S1: Man nimmt die (.) man addiert die Stundenkilometer der jeweiligen Balken. (..) Guck.

S2: *(schüttelt den Kopf)* Nein.

S1: Und teilt sie durch die Anzahl. *(3 sek)*

S2: Ja, ok, dann laß uns das mal ausprobieren. Also hier *(zeigt auf Monitor)* geht es ja bis (.) keine Ahnung (..) sagen wir 50 Minuten.

S1: Mhm.

S2: Dann fährt er ja (.) (   )

S1: [50 Minuten lang

S2: [Ja.

S1: Ja. *(schreibt)*

Die Antwort auf dem AB lautet: *man addiert die jeweiligen Std/km der einzelnen Balken und teilt sie durch die Anzahl der Balken.*

Dann wechseln sie zu Aufgabe 3 und bearbeiten die Aufgabe ‚Beobachte wie sich der linke Graph verändert, wenn Du die Balken im rechten Graph veränderst!' S2 verschiebt ein paar Balken vertikal. Die beiden haben noch nicht entdeckt, dass sich auch die Balkenbreite ändern lässt.
Zeit: 19'00''

S2: *(verschiebt Balken eins vertikal hoch und runter)* Ah, je höher ich das mache, je steiler wird die Steigung

S1: Ist ja auch logisch.

S2: Und je niedriger ich das *(verschiebt Balken eins vertikal nach unten)* m- ja klar, ist das logisch.

S1: Also. *(schreibend)* je höher (.) die einzelnen (..)

S2: *(verschiebt Balken eins vertikal)* Balken

S1: *(schreibend)* Balken, desto (.) größer (..) die Steigung (.) zwischen (.) Punkten (..) Ähm, *(schaut auf)* kann man die verlängern?

S2: *(verlängert Balken eins)* Ja. *(verlängert Balken eins maximal)* Oder? *(verkürzt Balken eins wieder)* Ja, aber da wird Strecke nur länger, also (.) Dann verschiebt sich das alles, also das hier wird-

S1: Also, je *(beginnt zu schreiben)* (..) je länger

Zeit: 19'55''

S2 verändert die Balkenbreite weiter und schafft es nicht mehr, die Balken auseinander zu bekommen. Sie wechselt für ein Reload zu Aufgabe 2 und zurück.
Auf dem AB steht:
- je höher die einzelnen Balken, desto größer die Steigung zw. Punkten
- je länger der Balken, desto länger Stecke zwischen Punkten

Bei der Bearbeitung der letzten Aufgabe ‚Findest Du, dass der st-Graph die Situation realistisch wiedergibt', überlegen sie, dass das realistisch sei, da man durch Berlin fahre, wo Stu sei und dazwischen Autobahn. Auf dem AB steht: ~~*Ja, der Graph erscheint realistisch.*~~ *Nicht realistisch, da Bremsweg z.B. nicht dargestellt ist.*
Ich gehe davon aus, dass sie ihre erste Antwort im Verlaufe des Unterrichtsgespräches durchgestrichen und ersetzt haben.

Antworten auf dem Fragebogen

Zum Ausfüllen des Fragebogens war nur S2 anwesend. Außer den Antworten, die bei dem Transkript zur Dreiecksfläche vermerkt wurde, schreibt S2 speziell zur Lernumgebung ‚Die Reise': Bei der Bearbeitung der Lernumgebung ‚Die Reise' hat ihr nach eigener Einschätzung der Computer sehr geholfen. Sie fand es war *Besser nachzuvollziehen, da man beide Darstellungen vor Augen hat und alles besser nachvollziehen kann, nicht mühsam alles aufmalen muss.*

Einbeschriebene Rechtecke
Gymnasium 1
Schülerinnen mit Noten im 4er-5er-Bereich

Abkürzungen:
S1 Schülerin 1
S2 Schülerin 2
J Jenny (Schülerin aus der anderen videographierten Gruppe)
L Lehrer (hier: Forscher)
AB Arbeitsbogen

Vorgeschichte und allgemeine Bemerkungen:
Die Schülerinnen und Schüler hatten an diesem Tag Projekttage und für die Teilnahme an der Studie wurden diese unterbrochen. Der Unterricht begann um 12:15 Uhr, nachdem die Klasse den Vormittag schon mit dem Projekt zugebracht hatte. Das Schulhaus war im Prinzip bis auf diese Klasse komplett leer. Auch die Klingel war abgestellt. Die Schülerinnen und Schüler bemühten sich um Konzentration, aber es war allgemein unkonzentrierter und unmotivierter als die beiden Doppelstunden zuvor. Direkt im Anschluss an die Doppelstunde wurde eine Einzelstunde gehängt, in der die Schülerinnen und Schüler Test und Fragebogen bearbeiteten.

S2 öffnet den Browser und S1 liest auf dem AB die Aufgabenstellung und Aufgabe 1a) ‚Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt des Rechtecks verändert, wenn man P auf BC von B nach C bewegt' durch und sagt ‚Jaaa.' Nach 52'' erfolgt dann die erste Computeraktion durch S2. Sie bewegt P auf BC, aber es erscheint noch kein Rechteck, da P nicht genau genug auf BC zu liegen kommt. Dann bewegt sie P auf B und wandert mit P in Richtung C. Dabei erscheinen und verschwinden immer wieder Rechtecke, je nachdem wie genau sie BC trifft.

Zeit: 1'07''
S1: *(auf den Monitor blickend, während S2 P über BC bewegt und Rechtecke dabei erscheinen und verschwinden)* Verändert er sich?
S2: *(P über BC bewegend, wobei Rechtecke erscheinen und verschwinden, 10 sek)* Na, die Seitenlängen verändern sich doch nur, oder?
S1: Warte mal. Mach mal sieben und vier *(Anmerkung: lediglich P(7|4,5) und P(4|9) liegen auf BC)*
S2: [Der Flächeninhalt?
S1: Mach mal sieben und vier.
S2: *(S2 stellt P(7|4,5) ein und verschiebt P ein bisschen)* Geht doch nicht.
S1: Ja, ich meine. Jetze vier und sieben? *(S2 stellt ungefähr P(5,3|7) auf BC ein)* Verändert sich ja gar nicht. Wirklich, ich verstehe es jetzt irgendwie nicht.
S2: *(stellt P(7|4,5) ein)* Guck mal, wenn ich bei sieben jetzt hinmache, dann ist bei vier Komma fünf. Wenn ich <u>hier</u> bei sieben hinmache *(stellt ca. P(5,3|7) ein)*, dann ist bei fünf Komma irgendwas.
S1: (Ach so, na dann.) Keine Ahnung, was wir wieder hier hinschreiben sollen.
S2: *(fixiert P auf BC und bewegt dann P auf BC)* Hmm, schreibst du auf dieses Mal?
S1: Muss das sein? So.
S2: Wann ist der Flächeninhalt gleich Null? *(schiebt P auf B)* Wenn der Punkt auf B liegt oder auf (.) *(bewegt P auf C und dann auf B)* C. *(bewegt P ein paar Mal zwischen B und C hin und her)*
S1: Richtig.
S2: Naja, schreib hin.
Zeit: 2'46''

Es dauert eine Minute, um das Aufschreiben zu organisieren, da S1 einen Stift sucht. Die beiden unterhalten sich kurz off-topic.
S1 notiert zur Frage ‚Wann ist der Flächeninhalt gleich Null?': *Wenn der Punkt P auf B oder C liegt.*

Dann liest S2 die nächste Aufgabe ‚Welche Werte kann der Flächeninhalt annehmen? Auch 100?'
Zeit: 4'20''
S2: *(bewegt P auf BC)* Woher sollen wir das denn wissen?
S1: Naja, zehn mal zehn würde es dann gehen. Aber dann müsste das (.) das geht gar nicht (.) *(S2 versucht P in Richtung (10|10) zu bewegen)* In <u>dem</u> Fall nicht *(liest)* Welche Werte kann der

Flächeninhalt annehmen? *(auf Monitor blickend, wo S2 den Punkt P in der Gegend von P.x=5)*
Na, der höchste ist (..)
S2: Bei der Hälfte, oder?
S1: [Ich muss ja immer das mal das rechnen, oder? *(zeigt auf Monitor)*
S2: Ist der höchste nicht bei der Hälfte irgendwie? *(bewegt P um die Mitte hin und her und entfernt sich dabei ein wenig weiter von der Mitte)*
S1: Zeig mal einfach irgendwelche. *(S2 stellt (2|12) ein, rastet ein)* Ganz oben, zwölf und (.) zwei.
S2: [zwei.
S1: Zwölf mal zwei macht vierundzwanzig. *(S2 schiebt P auf P(9|1,5))* Neun mal eins Komma fünf (.) macht (.) vier Komma fünf (.) Nee
S2: Das stimmt ja gar nicht.
S1: Ja, ich weiß. Warte- *(beugt sich runter, um einen Taschenrechner zu holen)*
S2: *(stellt P(6|6) ein)* Sechs mal sechs macht sechsunddreißig. *(schiebt P weiter)*
S1: Ich glaube der höchste ist vierundzwanzig.
S2: Geht doch nicht. Sechs mal sechs ist sechsunddreißig. *(stellt P(6|6) ein)* Guck mal. *(S1 schaut auf den Monitor)*
J: Ihr könnt das doch unten einstellen, um das zu sehen.
S1: Wo? (.) Ach, Hinweis einblenden, oder? *(blendet Hinweis ein)*
J: Dann könnt ihr unten den Flächeninhalt ablesen.
S2: Aaah. *(bewegt P hin und her)*
S1: Ach so.
S2: *(P bewegend)* Siebenunddreißig *(bewegt P langsam von B ausgehend in Richtung P.x=5)*
S1: Ja, bei der Hälfte.
S2: Das geht bis siebenunddreißig Komma (.) *(versucht P auf genau P.x=5 zu stellen und trifft schließlich genau den Punkt P(5|7,5))* Bis siebenunddreißig Komma fünf.
Zeit: 5'54''

S1 notiert: *Der größte Flächeninhalt ist bei der Hälfte [P(5;7,5)]*
100 kann er nicht annehmen, denn 37,5 ist der höchste Wert.

Dann liest S1 Aufgabe 1d) vor: ‚Gibt es mehrere verschiedene Rechtecke, die aber denselben Flächeninhalt besitzen? Wenn ja, suche mehrere Beispiele dafür!'
Zeit: 7'20''
S2: Da nehmen wir eine glatte Zahl, ok? *(schiebt P auf P(1|13,5))* Dreizehn Komma fünf *(schiebt P zügig auf den Punkt P(9|1,5))* Dreizehn Komma fünf. Ja, einmal neun (.) und eins Komma fünf *(S1 schreibt)*
S1: *(schreibend)* P eins ist neun und?
S2: und eins Komma fünf *(S1 schreibt)* und (.) dazugehörig *(schiebt P)* Was war denn das? *(schiebt P langsam in Richtung C)* Was war denn das jetzt eigentlich? Zwölf? *(stellt P(1|13,5) ein)* Dreizehn Komma fünf.
S1: [bei (sieben) Komma fünf] (.) Ja.
S2: *(diktierend)* P eins Komma eins, nee, P eins
S1: *(schreibend)* P
S2: Eins und dreizehn Komma fünf.
S1: Ja, (das) nächste Beispiel.
S2: *(stellt P(2|12) ein)* Vierundzwanzig. *(schiebt P zielstrebig in Richtung B und P rastet auf P(8|3) ein)* (oh nee) ähm, P acht und drei (..) *(S1 schreibt)* und (.)
S1: *(schaut auf)* Drei und acht.
S2: Nee, nee. *(schiebt P auf P(2|12))* Zwei und zwölf. *(S1 schreibt)* Noch eins?
S1: Mhm.
Zeit: 8'34''

Als drittes Beispiel stellt S2 die Punkt P(7|4,5) und P(3|10,5) ein. Dann suchen sie noch ein Beispiel. Sie nehmen dafür die Werte P(1,8|12,3) und P(8,2|2,7). Bei der Suche nach dem letzten Beispiel orientieren sie sich an der Zahl 22,14 (Flächeninhalt). Da er zweimal erscheint, nehmen sie den.

Dann liest S1 die Aufgabe ‚Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten von P und dem Flächeninhalt des Rechtecks?' S1 sagt sofort ‚Na, die Koordinaten sind die Seitenlängen' und notiert dann als Lösung: *Die Koordinaten des Punktes P sind die Seitenlängen. Wenn man diese multipliziert, bekommt man den Flächeninhalt raus.*

Die Schülerinnen wechseln dann zu Aufgabe 2 und S1 liest die Instruktionen und Aufgabenstellung 2a): ‚Skizziere den Graphen in obiger Abbildung.'

Zeit: 12'18''

S1: Einen Graphen. (..)
S2: Hä? Nochmal.
S1: Naja, guck mal. Du suchst Dir hier den x-Wert raus bei zwei *(zeigt auf Monitor, wo P(2|12) eingestellt ist)* und dann rechnest du zwei mal zwölf macht vierundzwanzig, also musst du es da unten eingeben (.) und dann bekommt man einen Graphen raus.
S2: [Ach so. Und was soll ich jetzt machen?
S1: Na, ich glaube, du musst nichts machen. Aber ich muss den skizzieren da so rein. *(zeichnet, 10 sek, in denen S1 zunächst eine Gerade durch O und (2|24) zeichnet)* *(liest)* Erkläre anhand des Graphen, welche Flächeninhaltswerte einmal, zweimal bzw. keinmal vorkommen. *(8 sek)*
S2: Na, der höchste Wert kommt nur einmal vor, oder? (.) Gibt es ja nur einmal.
S1: Weiß ich jetzt gar nicht. Warte mal, ich muss mal kurz was rechnen. Stell mal da ähm genau nochmal vierundzwanzig ein.
S2: *(bewegt P das erste Mal zögernd in Richtung B)*
S1: Nur unten (.) weiter
S2: Wie? Wo soll ich denn vierundzwanzig ein- (.) Ach da.
S1: [Hier, dass da unten vierundzwanzig ist.
S2: *(schiebt P auf P(8|3))*
S1: Siehste, dann entsteht nicht so was, sondern (.) ähm (.) sondern so was hier.
S2: *(bewegt P hin und her)* Iiiih, guck mal, wie er sich bewegt.
S1: Ja, ich weiß (.) Das muss eine (.) Parabel entstehen, glaub ich.
S2: *(P bewegend)* [Das ist doch auch eine (.) Parabel. Das hätte ich jetzt auch noch sagen können, wenn ich das sehe.
S1: Ja, aber jetzt muss ich eine Parabel dahin malen. *(S2 bewegt P hin und her, S1 sagt von der Kamera abgewendet, dass sie L etwas fragen möchte, aber L ist gerade beschäftigt, so dass beide alleine weiterarbeiten. S1 sagt nicht, was sie fragen möchte.)*
S1: *(lesend)* Erkläre anhand- wie soll, wie soll ich denn anhand des <u>Graphen</u> das bitte machen? *(S2 spielt weiter mit dem Applet und verweilt dabei bei den Punkten B und C ein wenig länger)*
S2: *(P schnell bewegend)* Wie cool das aussieht. *(3 sek)*
S1: *(nach vorne fragend)* Jenny, sag mal, muss da ein Graph rauskommen?
J: Eine Parabel ( ) eine Parabel.
S1: Naja, aber das ist ja kein Graph (.) Graph ist doch immer (.) das *(zeigt J ihren AB, auf dem ein Gerade gezeichnet ist)*

(Jenny sagt dann noch etwas über ‚Parabel', was man nicht versteht und S1 stöhnt und murmelt etwas von ‚komische Parabel', d eine Parabel auf den AB, während S2 sich im Klassenraum umsieht.)

Zeit: 15'09''

Auf dem AB sieht man eine Gerade durch O und (2|12), dann eine Parabel, die mit Schablone gezeichnet wurde und durchgestrichen wurde (deren Maximum ist nicht korrekt) und schließlich eine Parabel, die durch O, (10|0) und (5|37,5) geht. Ich vermute aber, dass S1 zu diesem Zeitpunkt eine Parabel mit Schablone zeichnet und dies erst später revidieren wird.

Im folgenden werden 8 Minuten paraphrasiert, in denen es auch einige off-topic-Gespräche gibt.
Während S1 schreibt, spielt S2 weiter mit dem Applet und schaut sich insbesondere die Punkte P(0|15), P(10|0), das Maximum und P(6|6) an. S1 scheint durch die Einstellungen von S2 ihre erste Parabel zu korrigieren, aber das ist nicht klar ersichtlich.
Dann beginnt sich S2 offensichtlich zu langweilen und es beginnen ein paar off-topic-Gespräche. Während S2 sich weiter umsieht und anfängt zu summen, notiert S1 alle Lösungen zu Aufgabe 2a-d. Man hört dazwischen lediglich, wie S1 murmelnd die Aufgabenstellungen liest.
Ihre Lösungen sind:
2b) *Die Werte die auf gleicher Höhe liegen, parallel zur x-Achse haben den gleichen Flächeninhalt. Nur der höchste Punkt hat einen Flächeninhalt.*

2c) *am höchsten Punkt der Parabel*

2d) *Der Graph hat diese Gestalt, weil immer zwei Wertepaare den gleichen Flächeninhalt haben. Die Punkte liegen dann auf gleicher Höhe und es entsteht eine Parabel.*

Die beiden wechseln dann zu Aufgabe 3. S1 fordert S2 auf, die Seiten des Dreiecks zu verändern. S2 bewegt B. Dann weist S1 sie auf den Button ‚Graph einblenden' hin, und S2 blendet den Graphen ein. S1 fordert dann auf, den Punkt C zu bewegen. S2 bewegt Punkt C.

Zeit: 23'38''

S1: Mach mal ein gleich- (.) ein gleichschenkliges. Bei acht und- zehn und zehn.
S2: *(stellt B.x=10=C.y ein) (7 sek)*
S1: Die Parabel wird entweder ähm halt kleiner (.)
S2: Also, wenn man auf der y-Achse (.) umso, umso kleiner das auf der y-Achse ist *(zieht C runter und hoch)*, umso kürzer wird auch (.) die Parabel?
S1: Umso weiter C unten liegt (.)
S2: (da) C auf der y-Achse unten liegt, oder? *(6 sek, S1 schreibt)* Kannst auch hinschreiben, umso weiter C auf der y-Achse an (.) A an- (.)
S1: Na, noch ein Wunsch?
S2: Nein, nein, mach so, wie du möchtest.
S1: *(schreibend)* Umso weiter C auf der y-Achse unten liegt (.) mach das mal bitte nochmal.
S2: *(bewegt C runter und hoch)* Umso kleiner wird der Graph, oder?
S1: *(während S1 ein Formulierung sucht, bewegt S2 C schnell hoch und runter und sagt einmal ‚Was?' nach vorne zu J)* Umso, umso weniger ss- also umso (.) nee, desto mehr (.) sinkt der Flächeninhalt. *(S1 schreibt und S2 bewegt C schnell hoch und runter, bis sie schließlich wieder die Situation B.x=10=C.y einstellt.)*

Zeit: 24'48''

S1 schreibt auf, während S2 sich umsieht. Dann unterhalten sich die beiden off-topic, bis sie sich schließlich mit der Frage beschäftigen, was bei Bewegung von Punkt B geschieht. S2 bewegt B und es entwickelt sich folgendes Gespräch.

Zeit: 25'25''

S2: *(B bewegend)* Ääh, und was ist das jetzt hier?
S1: Na, umso (.) *(nach vorne)* Jenny, wie, wie wenn man, Jenny, wenn man aber ähm unten B bewegt (.)
S2: *(B bewegend)* Na, umso weiter (.) umso breiter ist er, oder?
S1: *(zu Jenny nach vorne)* Wenn man B bewegt, dann wird doch die (Umfang) umso kleiner, kann man sagen.
J: Also, äh, wenn man den Flächeninhalt (B) sucht (.) also wenn man äh die Seite AB verkleinert, so verändern sich auch die Schnittpunkte auf der x-Achse.
S1: Stimmt. *(schreibt)*

Zeit: 26'02''

S1 notiert als Lösung zur Aufgabe 3a) ‚Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn Du die Seiten des Dreiecks veränderst.': *Umso weiter C auf der y-Achse unten liegt desto mehr sinkt der Flächeninhalt und der Graph ist gestaucht. Wenn man die Seite AB verändert, verändern sich die Schnittpunkte auf der x-Achse und die Parabel wird kleiner.*

Dann liest S1 die nächste Aufgabe ‚Was für Graphen kannst Du erzeugen? Beschreibe!' vor. Sie einigen sich sofort auf die Antwort: *gestreckte und gestauchte Graphen, kleine und große Graphen* (Anmerkung: S1 notiert *Graphen*, obwohl S2 von *Parabeln* spricht.)

S1 liest die Aufgabe 3c) ‚Wie findet man jeweils den größten Flächeninhalt? Woran erkennt man das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt in der linken Abbildung, woran im Graphen?'

Zeit: 27'47''

S2: *(bewegt B auf B.x=11, also maximal nach rechts und C auf C.y=17, also maximal nach oben, dann stellt sie P(5,5|8,5) ein)*
S1: Das ist das Größte?
S2: *(nickt)* Mhm. *(25 sek, in denen S1 schreibt)* Wir müssen aber noch hinschreiben, dass ich halt die ähm B und C noch verschoben habe, ja? *(S1 schreibt, S2 schaut sich im Klassenraum um)*

Zeit: 28'38''

S1 schaut dann auf und liest danach die nächste Aufgabe vor.

Die Antwort auf die Frage 3c) lautet: *Das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt liegt genau in der Mitte (P_1(5,5;8,5) -> 46,75)*

Sie wenden sich dann Aufgabe 3d) ‚Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist. Skizziere auch die dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen.'S1 liest die Aufgabe vor und macht dann eine erste Handlungsaufforderung. Die Punkte sind zu diesem Zeitpunkt auf B.x=11, C.y=17, P(5,5|8,5) eingestellt (also auf das Maximum unter Variation und Metavariation).

Zeit: 29'39''
128 S1: Dazu musst du die Dinger jetzt erstmal verschieben. *(zeigt auf Monitor)*
129 S2: Wohin denn?
130 S1: Na, nach da *(zeigt auf Monitor, S2 bewegt B langsam nach links und landet schließlich bei B.x=5)*
131 Und jetzt mach mal das andere runter. *(S2 schiebt C.y langsam nach unten und kurz unterhalb*
132 *C.y=12)* Ja, das reicht schon, Stück höher, Stück höher. *(S2 stellt C.y=12 ein)* Also bei zwölf und
133 fünf, ja?
134 S2: Ja, ungefähr. *(S1 zeichnet)*
Zeit: 30'07''

S1 zeichnet und S2 diktiert die Punkte. Es wird die Situation B.x=5, C.y=12 gezeichnet. S1 fragt, ob der Flächeninhalt denn wirklich 15 sei und S1 meint, dass es gerundet so sei, aber S1 gibt sich damit nicht zufrieden und stellt die Situation so ein, dass nun genau der Wert 15 unter der linken Abbildung erscheint. Auch P(2,5|6) wird eingezeichnet mit dem Rechteck. Im Graphen wird auch das Maximum als ‚dickerer' Punkt eingezeichnet.

Nachdem S1 fertig gezeichnet hat, suchen sie ein zweites Beispiel.

Zeit: 31'32''
135 S2: Und jetzt?
136 S1: *(10 sek)* Ähm, äh, *(blättert um)* ach so, noch eins (..) brauch ich jetzt.
137 S2: Wieder mit fünfzehn?
138 S1: Wieder verschieben, ja. *(S2 schiebt B zögerlich nach rechts)* Verschieb einfach höher. Ja (.)
139 *(S2 stellt B.x=8 ein)* bei acht und dann- *(S2 schiebt C.y runter auf C.y=8 und dann langsam weiter*
140 *in Richtung C.y=7,5)* Ja, lass einfach.
141 S2: *(eingestellt ist B.x=8, C.y=ca. 7,5, P(4|3,76), Flächeninhalt=15,04)* Ok, bei sieben Komma fünf
142 (.) und bei acht.
Zeit: 32'14''

S1 zeichnet diese Situation, obwohl sie nicht genau ist.

Dann liest S1 die Frage ‚Wie findet man diese Dreiecke?' vor.

Zeit: 33'22''
143 S2: Indem man P immer auf der Mitte lässt von der ganzen Strecke *(fährt mit Maus die Strecke BC ab)*
144 P ist immer in der Mitte von der (.) auf der Strecke von CB und dann verschiebt man C und B bis
145 irgendwann der Flächeninhalt fünfzehn (   ). *(S1 schreibt)*
Zeit: 33'37''

Sie notieren als Lösung: *P lässt man in der Mitte von Strecke BC und verschiebt B oder C bis der Flächeninhalt 15 beträgt.*

S1 liest die nächste Aufgabe vor: ‚Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der größte Flächeninhalt genau bei x=4 angenommen wird. Skizziere auch die dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen.'

Zeit: 34'22'
146 S2: *(schiebt B auf B.x=4 und geht mit der Maus auf C, lässt dann ab)* Was?
147 S1: Hier, der größte Flächeninhalt muss da sein. *(zeigt auf Monitor)*
148 S2: *(schiebt C auf C.y=17)* So?
149 S1: Ja, und jetzt schieb mal weiter rüber.
150 S2: Ich dachte bei vier.
151 S1: Ja, mach einfach erstmal. *(S1 schiebt B zögerlich nach rechts)* Rüber, rüber, rüber, rüber , rüber.
152 *(S2 stellt B.x=11 ein)* Du musst es so weit rüberschieben, dass-
153 S2: Ach, dass das hier bei vier ist, oder? *(weist mit der Maus auf das Maximum im Graphen)*

S1: Ja. *(S2 lässt B.x=11 und will C verschieben)* Nein, nicht so! Genau so!
S2: Das? *(verschiebt B zögerlich)*
S1: Ja. Hmm, nach da.
S2: Naja, bei vier.
S1: Ja.
S2: Mach mal die Finger weg, sonst sehe ich es ja nicht *(stellt B.x sich langsam annähernd auf B.x=8 ein)* So?
S1: Ja. *(liest)* Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass Rechteck mit dem größten Flächeninhalt genau bei x ist gleich vier angenommen wird. *(S1 zeichnet)*
Zeit: 35’09’’

Es wird die Situation B.x=8, C.y=17 und P(4|8,5) gezeichnet.

Dann suchen sie eine weitere Situation und äußern, dass sie nun keine Lust mehr hätten.

Zeit: 36’26’’
S2: *(verschiebt C nach unten und nach oben zurück auf C.y=17)* Hä? Das ist doch der Größte.
S1: Mhm, es müssen nur zwei verschiedene sein.
S2: Wenn die sagt der Größte,, das ist doch der Größte.
S1: Aber wir sollten doch auf x ist gleich vier *(S2 verschiebt C nach unten)* Ja, mach einfach. Den (.) ja.
S2: *(stellt C.y=10 ein)* Bei zehn.
S1: Bei zwanzig, ja? *(das Maximum beträgt hier genau 20!) (S1 zeichnet)*
Zeit: 36’45’’

Sie lassen die Beantwortung der Frage ‚Wie findet man diese Dreiecke?’ aus.

Dann liest S1 die nächste Aufgabe ‚Zeichne ein Dreieck, so dass das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ein Quadrat ist.’ S2 verschiebt C ein wenig und sagt dann sofort: ‚Na, bei zehn und bei zehn.’ Die Situation B.x=10=C.y wird eingestellt. P liegt die ganze Zeit in der Mitte und es ist ein Quadrat zu sehen. S2 zeichnet diese Situation sofort. Sie antworten dann auf die Frage ‚Welche Eigenschaft hat das Dreieck in diesem Fall?’, dass die gleichen Seitenlängen vorliegen und notieren dazu: *Die gleichen Seitenlängen (zwei von ihnen -> gleichschenklig)*
Dann sagen sie, dass sie ‚nicht mehr können’ und halten die Aufnahme an.
Auf die Frage ‚Welche Eigenschaft haben die einbeschriebenen Rechtecke in diesem Fall’ wurde notiert (allerdings ist unklar, ob dies im nachhinein geschah): *es sind Quadrate, gleiche Seitenlängen, rechte Winkel*

Einbeschriebene Rechtecke
Gymnasium 2
Schüler mit Noten im 1er-2er-Bereich

Abkürzungen:
S1 Schüler 1
S2 Schüler 2
M Mädel von hinten
L Lehrer (hier: Forscher)

Die beiden benötigen eine Minute, um die Lernumgebung im Browser zu öffnen und mit der Bearbeitung der Aufgaben zu beginnen. Sie lesen zunächst die Aufgabenstellung auf dem Monitor. S2 äußert sofort, dass er die Aufgabe nicht versteht (‚Verstehe ich nicht') und sie vermuten zunächst, dass der Punkt P mit den anderen Punkten A, B, C ein Rechteck bilden soll, wovon es dann aber nur einen geben würde (nämlich P auf (10|15)). Sie beschließen dann, die Aufgabenstellung nochmals durchzulesen und bekommen dann von ihrer Klassenlehrerin den Hinweis, sich die Abbildung auf dem AB anzusehen (wo ein einbeschriebenes Rechteck zu sehen ist). Danach beginnen sie damit P zu auf BC zu bewegen.

Das Transkript beginnt bei der Bearbeitung von Aufgabe 1a): ‚Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt des Rechtecks verändert, wenn man P auf BC von B nach C bewegt.' S1 hat inzwischen P so bewegt, dass verschiedene einbeschriebene Rechtecke zu sehen waren. S2 hat inzwischen Aufgabe 1a) gelesen und gibt eine erste Antwort. Zu diesem Zeitpunkt liegt P nicht auf BC, es ist also kein Rechteck zu sehen.

Zeit: 2'47''
S2: Naja, wahrscheinlich gar nicht, wa?
S1: Warte ( )
S2: Guck mal, mach mal so *(S2 übernimmt die Maus und klickt auf den Button ‚P auf BC fixieren')*
S1: Ja, aber jetzt ist er da fixiert.
S2: Nein. Auf BC fixiert. *(S2 bewegt P auf BC, so dass ein Rechteck erscheint, dann benutzt er den Button nochmals und fixiert somit P auf BC)* Mann, nimm mal den ( ) *(S2 schubst S1, damit er Platz hat, die Maus zu bewegen)*
S1: Was? Ich bin hier dran, du musst eigentlich schreiben.
S2: *(bewegt P auf BC)* Ich muss aber auch probieren, sonst lerne ich ja nichts.
S1: Null geht nicht. Außer werden es zwei Linien. *(S2 bewegt P auf C)* Dann ist es kein Rechteck mehr.
S2: Natürlich ist es ein Rechteck.
S1: Nein.
S2: (Immerhin) ein Dreieck. *(bewegt P auf BC)*
S1: Ja, aber, nein, ja, dann ein Dreieck wäre aber falsch.
S2: Nein.
S1: Doch. Also, das geht nicht.
S2: Was geht nicht?
S1: Der Flächeninhalt kann nicht Null sein.
S2: Natürlich kann der Flächeninhalt Null sein.
S1: Nein. Frau Müller, kann der Flächeninhalt Null sein?
Zeit: 3'45''

S1 fragt die Klassenlehrerin, ob der Flächeninhalt Null sein kann und äußert, dass eine Linie ja kein Rechteck sei. Frau Müller antwortet nicht. Die beiden witzeln ein wenig über das Thema.

S1 nimmt die Maus und bewegt P wieder und fordert dazu auf, zunächst zu beschreiben, wie sich der Flächeninhalt verändert.

Zeit: 4'20''
S1: *(bewegt P auf P.x=9 und dann auf P.y=1 und wählt schließlich eine Position, wo P(9|1) ungefähr erreicht ist. Anmerkung: Der Punkt P(9|1) ist nicht genau zu erreichen: Entweder man stellt P(9|1,5) oder P(9,3|1) ein. Der Schüler wählt eine mittlere Position.)* So, hier ist es ungefähr (.) neun. *(Er bewegt P auf die (ungefähren) Koordinaten P(8,5|2,3))* Hier ist es ungefähr (.) achtzehn. (..) Der Flächeninhalt verdoppelt sich. *(Stellt P(8|3) ein)* Drei mal acht vierundzwanzig. *(3 sek)*

Willst du das nicht aufschreiben?
S2: Was?
S1: Wie der sich verändert. *(bewegt P in Richtung C)*
S2: Ja, dann sag mir was.
S1: Ähm (.) anfänglich (.) wird er noch größer. *(bewegt P auf B und dann in Richtung C)* Der größtmögliche Flächeninhalt ist erreicht, wenn (.) ähm *(bewegt P zwischen P.x=5,5 und 6,5 und lässt ihn bei P.x=6,5 stehen)* wenn die größte-
S2: Orthogonale
S1: Nee, wenn die, wenn ‚h' gebildet wird.
S2: Orthogonale
S1: Nee, ‚h'.
S2: Ist doch das Gleiche.
S1: Ja, ja, aber Orthogonale kann auch hier sein oder da *(zeigt auf Monitor)*.
S2: Nein.
S1: Na, die Orthogonale durch den Punkt A.
S2: Ja. *(beginnt zu schreiben)*
S1: *(diktierend)* Flächeninhalt (.) wächst
S2: *(schreibend)* Flächeninhalt am größten bei der Orthogonale durch A
S1: Und wächst unproportional.
S2: Dazu müsste man mal einen Graphen sehen, wa?
S1: Ja. (.) Kommt bestimmt noch. *(S2 schreibt)*
Zeit: 5'30''

S2 notiert zunächst: *Flächeninhalt am größten, wenn P auf der Orthogonalen durch A liegt. Flächeninhalt verändert sich unproportional.*
(Anmerkung: später wird *Orthogonalen durch A* durchgestrichen und durch *Hälfte der Strecke BC* ersetzt.)

Im folgenden bearbeiten sie die Frage ‚Wann ist der Flächeninhalt gleich 0?' Wieder beginnt eine Diskussion darum, ob es sich in diesen Fällen überhaupt um Rechteck handelt bzw. ob man von ‚Flächeninhalt' sprechen kann. S1 malt dann (vermutlich) ein Punkt und meint, dass dies dann auch ein Rechteck oder ein Dreieck sei. Schließlich fragen sie L, und L bringt das Stichwort ‚entartetes Rechteck' ein. S1 scheint aber immer noch unzufrieden damit. Sie notieren schließlich als Lösung: *Wenn P auf C oder B liegt (es handelt sich um ein entartetes Viereck)*
Bearbeitung von Aufgabe 1c) ‚Welche Werte kann der Flächeninhalt annehmen? Auch 100?'
Zeit: 9'21''
S2: Kann der Flächeninhalt auch hundert annehmen?
S1: Nö. *(schiebt P auf ca. P(6|6))*
S2: Na, dann zeig mir wie, warum nicht.
S1: Weil das hier die (.) der größtmögliche Flächeninhalt ist *(stellt P(6|6) genau ein)* und das ist sechs mal sechs sind sechsunddreißig (..) nicht mit diesen Werten auf den Achsen. *(S2 schreibt)*
Zeit: 9'39''

S2 notiert zunächst: *Der größtmögliche ist ca. 36.* Dies wird später abgeändert zu *37,5* (s. unten).
L weist die beiden auf den ‚Hinweis einblenden-Button' hin. S1 benutzt ihn. Da das Applet nicht hoch gescrollt wurde, sehen die beiden im weitern Verlauf nicht die Zeile ‚Der Flächeninhalt der Rechtecks beträgt....'. Sie berechnen den Flächeninhalt immer wieder.

Während S2 schreibt, wendet sich S1 schon der nächsten Aufgabe zu: ‚Gibt es mehrere verschiedene Rechtecke, die aber denselben Flächeninhalt besitzen? Wenn ja, suche mehrere Beispiele dafür!'
S1 stellt den Punkt P(6,16|5,76) ein und holt einen Taschenrechner. S2 blickt auf den Monitor.

Zeit: 10'41''
S1: *(den Taschenrechner bedienend)* Sechs Komma eins sechs mal (..) fünfunddreißig Komma vier acht. Das geht ja auf der anderen Seite auch. *(nimmt die Maus)* Merk dir mal (.) fünf sieben sechs *(Anmerkung: P.y=5,76)*
S2: Mach ich.
S1: *(bewegt P langsam in Richtung C und pendelt zwischen P(5,72|6,42) und P(5,8|6,3) hin und her)*
S2: Du bewegst dich aber schon, oder?
S1: Ja, ich darf jetzt nur nicht (drüber). Ich muss Null Komma vier (.) null Komma <u>null</u> vier *(stellt P(5,76|6,36) ein.)*
S2: Das ist aber nicht gleich.

62 S1: Stimmt.
63 S2: Ja, zum Beispiel so *(schiebt P auf C)* und so *(schiebt P auf B)*. Die haben den gleichen
64 Flächeninhalt.
65 S1: [Nimm mal die *(grinst)* (.) Spezialfälle (.) raus.
66 S2: Nö.
67 S1: Doch. (..) Und selbst wenn (.) ist nicht gleich. Das ist-
68 S2: Natürlich. [Zehn mal null und hundert mal null
69 ist das das ist genau das gleiche.
70 S1: Spezialfälle aller Spezialfälle.
Zeit: 11'39''

S1 lehnt die Spezialfälle als Möglichkeit ab und will andere Lösungen suchen. Da das Applet nicht hoch gescrollt ist, hat er Probleme, den Punkt P von ganz unten wegzubewegen und macht ein paar Bemerkungen dazu. Schließlich gelingt es ihm, den Punkt P zu bewegen.

Zeit: 12'01''
71 S1: Wart mal, ich versuch mal irgendwas (.) irgendwas einfaches *(bewegt P und landet schließlich bei*
72 *P(2|12))*
73 S2: Mach doch mal (.) vier mal drei.
74 S1: Zwei und zwölf (.) sind vierundzwanzig. *(bewegt P und stellt P(8|3) ein)*
75 S2: Acht und drei sind ooah.
76 S1: Also, es geht.
Zeit: 12'22''

S2 notiert auf dem AB: *Ja, es geht. Z.B. (2|12) und (8|3).*

Die Aufgabe ‚Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten von P und dem Flächeninhalt des Rechtecks?' beantworten sie schnell und notieren *Die multiplizierten Koordinaten geben den Flächeninhalt an.*

Dann wechseln sie zu Aufgabe 2 und lesen die Aufgabenstellung auf dem Monitor.

Zeit: 14'01''
77 S1: *(bewegt P und es erscheint die Spur des Punktes (x|F(x)) in der rechten Darstellung))*
78 S2: Hehe, das ist voll lustig. *(S2 betrachtet den Monitor, während S1 P schnell hin und her bewegt)*
79 Öh, öh, ja ok, an der Wendestelle ist die Orthogonale überschritten.
80 S1: Dann ist ja (.) Warte *(stellt P so ein, dass das Maximum erreicht ist)*
81 S2: *(schaut auf Monitor)* Na, scheiße. Das ist aber nicht die Orthogonale (.) Uuh, das ist die
82 Winkelhalbierende.
83 S1: *(versucht weiterhin genau das Maximum zu treffen und bewegt P um das Maximum herum hin und*
84 *her)* Die Winkelhalbierende? Sagen wir, das muss dann hier fünfundvierzig Grad sein.
85 S2: Ja, stimmt. (..) *(S1 versucht weiterhin genau das Maximum zu treffen)* Wo ist denn das?
86 S1: Hier ist *(stellt P(5,01|7,49) ein und lässt ihn dort stehen)*
87 S2: Fünf mal sieben ist fünfunddreißig.
88 S1: Ja, ist ja (.) nee. *(bedient den Taschenrechner)* Fünf Komma null eins
89 S2: [Das ist ja (.) scheiße, das wirft
90 meine ganze Ideologie über den Haufen *(bewegt P in der Gegend des Maximums)*
91 S1: Ja (.) Huppsa, huppsa, fünf Komma null eins. Ja, siebenunddreißig Komma fünf zwei noch was.
92 S2: *(stellt P(5,04|7,44) ein)* Ja, und was ist das für ein Punkt? (..) Ist das genau die Hälfte?
93 S1: Ähm.
94 S2: Ja, sieht so aus, oder?
95 S1: Fünfzehn Quadrat-
96 S2: Na guck mal, na klar doch *(zeigt auf Monitor)* fünf ist die Hälfte von zehn und sieben Komma fünf
97 ist die Hälfte von fünfzehn.
98 S1: [*(rechnet mit Taschenrechner)* ( ) ist achtzehn Zentimeter
99 S2: Was machst du denn jetzt für einen Schwachsinn? (.) Boah, Junge, es ist doch klar, *(zeigt auf*
100 *Monitor)* hier ist fünf und da ist sieben Koma fünf (.) und das sind jeweils die Hälften.
101 S1: Stimmt. (.) Warte ich mach trotzdem mal, nur um zu gucken *(misst mit dem Geodreieck die*
102 *Strecken auf dem Bildschirm ab)*
103 S2: Das ist bestimmt nicht (.) nee das sind zehn ( )
104 S1: Hier sind es fünf (.) Es müsste eigentlich neun sein-
105 S2: Ja, das ist ja nicht genau *(S1 misst wieder mit dem Geodreieck auf dem Monitor)*

S1: Doch, schon
S2: Das ist ja auch nicht fünfzehn lang *(S2 zeigt auf Monitor)*
S1: Nein, aber fünfzehn Kästchen.
S2: Du verdeckst die Kamera.
S1: *(grinst und nimmt Hand runter)* Fünfzehn Kästchen sind es.
S2: Ja, aber nicht fünfzehn Zentimeter.
S1: Ja, aber ich zähle ja hier auch nur in Kästchen.
Zeit: 15'46''

S1 zählt zehn Kästchen ab und misst dann nochmals mit dem Geodreieck nach. Dabei geht er sehr genau vor und gibt erst nach dem Abmessen sein ‚Ok' zur Behauptung, dass P genau in der Mitte von BC liegt, wenn das Maximum erreicht ist. S2 weist darauf hin, dass sie dann ihre Lösung zu Aufgabe 1a) ‚berichtigen' müssen. Er ersetzt in Aufgabe 1a) die Aussage *...auf der Orthogonale durch A...* durch *...auf der Hälfte der Strecke BC...* .

Sie beantworten dann auch gleich die Frage 2c) ‚Wann ist der Flächeninhalt am größten?' mit *Wenn P auf der Hälfte von BC liegt.*

Dann bewegt S1 den Punkt P zwischen den Punkt B und C hin und her. S2 schaut vom AB, auf dem er gerade die Lösung zu 2c) notiert hat, auf.

Zeit: 17'30''
S1: *(bewegt P zwischen B und C hin und her)*
S2: Was ist denn das? Ist das die gleiche hier? *(zeigt auf Monitor)* Die gleiche (Anzahl)? Mach mal bei C *(S1 schiebt P auf B)* Ja.
S1: Natürlich, da ist ja auch der Flächeninhalt null. *(bewegt P weiterhin zwischen B und C hin und her)*
Zeit: 17'37''

S2 beginnt mit dem Skizzieren des Graphen. Dazu fordert er zunächst auf das Maximum einzustellen. Sie stellen fest, dass F(5)=37,5 ist und S2 zeichnet den Punkt (5|37,5) ein. Dann entwickelt sich folgendes Gespräch.

Zeit: 18'46''
S1: Die siebenunddreißig Komma fünf muss aber irgendwas mit den Werten hier bestimmt zu tun haben.
S2: Ja, das ist AC durch zwei mal BC durch zwei.
S1: Ja, aber nicht so einfach.
S2: Doch.
Zeit: 19'02''

Dann entsteht eine längere Pause, in der S2 weiter den Graphen skizziert. Er fordert S1 auf noch einen Punkt einzustellen, übernimmt das dann aber selbst und stellt P(7,5|3,75) ein und zeichnet. Für die Zeichnung benutzt er die Punkte (0|0), (2|24) (ist schon eingezeichnet vorgegeben), (7,5|ca. 28), (10|0).

Die beiden beginnen dann mit der Bearbeitung von Aufgabe 2b) ‚Erkläre anhand des Graphen, welche Flächeninhaltswerte einmal, zweimal, bzw. keinmal vorkommen.'

Zeit: 20'25''
S1: Der Wert siebenunddreißig Koma fünf kommt einmal vor.
S2: *(schreibend)* einmal, Komma, da er (.) der größte Wert ist.
S1: Mhm.
S2: Dann hat-
S1: Keinmal kommen die Werte außerhalb dieser Kurve *(bewegt P schnell zwischen B und C hin und her)* vor.
S2: *(blickt auf Monitor, während S1 P bewegt)* Na also, oder unter Null. Größer siebenunddreißig Komma fünf oder unter null (.) kleiner null.
S1: Mhm. *(S2 schreibt und S1 bewegt P weiter)*
S2: *(schreibend)* Die Werte größer ( )
S1: [*(P bewegend)* Na, der Wert fünfundzwanzig kommt ja auch nie vor.
S2: Natürlich.
S1: Mmh. Guck. *(bewegt P)* Hier nicht *(Es erscheint der Wert 25,1 als Flächeninhaltsangabe auf dem Monitor)* Ja, fünfundzwanzig eins- hmm na ok ich ( )

137 S2: [( ) irgendwann kommt der bestimmt vor.
138 S1: *(versucht den Flächeninhaltswert 25 einzustellen und erreicht mit P(2,12|11,82) der Wert*
139 *F(2,12)=25,085)* Hier kommt ja auch fünfundzwanzig vor.
Zeit: 21'18''

S2 notiert auf den Arbeitsbogen *37,5 einmal, da er der größte Wert ist // Werte > 37,5 oder < 0 kommen nicht vor.*

Während S2 schreibt, bewegt S1 den Punkt P hin und her und stellt dann die Frage:

Zeit: 21'45''
140 S1: Was ist eigentlich x?
141 S2: Na, die hier *(zeigt auf Monitor)* (Das) ist <u>die</u> Achse.
142 S1: *(bewegt P)* Aber hier ist-
143 S2: Mach mal zu zehn. *(S1 stellt P.x=10 ein)* Mach mal zu null. *(S1 stellt P.x=0 ein)* Ich hoffe das
144 erklärt deine Frage.
145 S1: Stimmt. Ja, ok. Ok, hast Recht, hast Recht.
146 S2: So, wunderbar. Und was kommt zweimal vor? Werte-
147 S1: Null.
148 S2: Ja, Werte wie Null *(beginnt zu schreiben)* Jeder Wert kommt eigentlich zweimal vor. *(bewegt P*
149 *hin und her)* Man kann den Punkt immer um ein Kleinstel verschieben.
150 S1: [Alle Alle Werte zwischen (.)
151 zwischen null und siebenunddreißig fünf.
152 S2: Ja.
Zeit: 22'24''

S2 ergänzt *Alle Wert 0<x<37,5 kommen zweimal vor.*

Dann entdeckt S1, dass der Flächeninhaltswert ja auch angezeigt wird und stellt das erste Mal die Mitte P(5|7,5) exakt ein.
Die beiden wenden sich dann der Bearbeitung von Aufgabe 1d) zu: ‚Warum hat der Graph diese Gestalt? Erkläre!'

Zeit: 23'06''
153 S1: Na, weil der Flächeninhalt (.) ähm von B zum Punkt (.) P *(Anmerkung: Es ist P(5|7,5) eingestellt.)*
154 ähm größer wird (.) und dann unregelmäßig (.) und ab siebenunddreißig Komma fünf wieder
155 kleiner wird, weil das der größte Wert war.
156 S2: Ok. *(beginnt zu schreiben) (3 sek) (schreibend)* Das ähm Rechteck (..) wird unproportional größer
157 *(9 sek)* das Rechteck wird unproportional größer bis es *(9 sek)* Flächeninhalt *(4 sek)* äh (..) AC
158 durch zwei mal (.) AB durch zwei *(4 sek)* So. *(18 sek)*
159 S1: *(wartend und nichts tuend)* Was hast du geschrieben?
160 S2: Warte, ich bin noch nicht fertig. *(S1 verschiebt P, während er wartet)* Ähm, das Rechteck wird
161 unproportional größer bis der Flächeninhalt siebenunddreißig Komma fünf groß ist. In Klammer
162 AC durch zwei mal AB durch zwei. Dann wird das Rechteck wieder kleiner, das heißt der Graph
163 fällt ab. Der Graph ist achsensymmetrisch.
164 S1: Ist er das?
165 S2: Ja. *(S1 bewegt P hin und her)*
166 S1 Na ( )
167 S2: [Weil alle Werte nämlich doppelt vorkommen. *(S1 bewegt P langsam bis zum Maximum)* Ist ja
168 genau bei fünf am höchsten Punkt.
169 S1: Ja.
Zeit: 25'46''

Auf dem Arbeitsbogen steht: *Das Rechteck wird unproportional größer bis der Flächeninhalt 37,5 groß ist (AC/2 . AB/2). Dann wird das Rechteck wieder kleiner. Der Graph ist achsensymmetrisch.*

Die beiden wechseln dann zu Aufgabe 3 und S2 liest Aufgabe 3a) ‚Beschreibe, wie sich der Flächeninhaltsgraph verändert, wen Du die Seiten des Dreiecks veränderst.' Während S2 die Aufgabe vorliest, bewegt S1 die Punkte P und C. Er schiebt C wieder auf die Ausgangsposition C.y=15. Der Graph ist zunächst nicht eingeblendet, die beiden beobachten nur den Punkt (x|F(x)).

Zeit: 26'09''

170 S1: Wenn man (.) C auf der y-Achse- *(bewegt B hin und her)* (..) Mein Gott.
171 S2: Mein Gott. *(S1 bewegt B weiter hin und her)*
172 S1: Ähm, wenn man C auf der y-Achse nach oben und nach unten verschiebt *(bewegt C runter und*
173 *hoch)* so verschiebt sich auch der höchste Punkt des (.) Flächeninhaltsgraphen.
174 S2: Mhm.
175 S1: *(S1 schaltet den Graphen ein und bewegt C hoch und runter)* Der Rest des Graphen passt sich an.
176 S2: Und bei, ja, und wenn man B auf x verschiebt, stau- wird der Graph in Richtung (.) *(S1 bewegt B*
177 *hin und her)* auf der x-Achse gestaucht.
178 S1: Hm, ja, dann (.) dann geht der höchste Punkt linear runter oder *(S1 bewegt B hin und her, P ist ca.*
179 *in der Mitte BC bei diesen Bewegungen)*
180 S2: Ja, aber es wird gestaucht auch.
181 S1: *(B bewegend)* Linear?
182 S2: Ja.
188 S1: Ja.
189 S2: Gut. *(beginnt zu schreiben)*
190 S1: *(B bewegend, 4 sek)* Na, dann verändern sich x und der höchste Punkt.

Zeit: 27'05''

S2 schaut auf und sagt ‚ja'. Dann schreibt S2 folgende Lösung auf: *Verschiebt man C auf der y-Achse, so verschiebt sich der Wendepunkt in y-Richtung. Verschiebt man B auf der x-Achse, so verschiebt sich der Wendepunkt auf einem linearen Funktionsgraphen, der durch den Ursprung geht.*

S2 liest dann Aufgabe 3b) ‚Was für Graphen kannst du erzeugen?' vor. Sie einigen sich innerhalb von Sekunden auf folgende Antwort: *Parabeln aller Art. Immer achsensymmetrisch.*

Auch die nächste Aufgabe ‚Wie findet man jeweils den größten Flächeninhalt? Woran erkennt man das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt in der linken Abbildung, woran im Graphen?' bearbeiten sie schnell (innerhalb von 1'30'') mit der Bemerkung, dass sie das doch schon erledigt hätten und schreiben:
links: (AC/2 . AB/2)
Graph: Der Wendepunkt gibt die x-Koordinate an

Dann liest S2 Aufgabe 3d) vor ‚Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist. Skizziere auch die dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen.'

Zeit: 32'26''

191 S1: *(bewegt C nach unten auf C.y=6, P liegt genau in der Mitte von BC)* Ähm. *(bewegt B nach links)*
192 S2: Naja, fünfzehn (.) Was könnte man da nehmen?
193 S1: Drei, fünf *(C.y=6, S1 stellt B.x=5 ein)*
194 S2: Nein, das ist doch dann (.) dreißig.
195 S1: Äh, quatsch, drei, zehn *(stellt B.x=10 ein)* Ist dann nicht dreißig. *(stellt P genau in die Mitte BC)*
196 S2: Nee, drei, zehn ist dreißig, aber eins Koma fünf (.) nee, eins Komma fünf mal fünf ist *(12 sek, in*
197 *denen S1 die Punkte C.y=6 und B.x=10 und P(5,3) ganz genau einstellt und S2 sich umsieht)*
198 S1: So. Flächeninhalt fünfzehn.
199 S2: Hä? Ach so, zehn und sechs.
200 S1: Mhm.

Zeit: 33'12''

S2 zeichnet diese Situation (C.y=6, B.x=10). Er zeichnet auch das Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt. Dann suchen sie eine weitere Situation mit maximalem Flächeninhalt 15. S1 sagt er habe eine gute Idee und stellt die symmetrische Situation C.y=10, B.x=6, P.x=3 ein.

Zeit: 35'38''

201 S2: Ja, zehn und sechs. Super, Felix.
202 S1: Tja, Musst ja erst mal drauf kommen.
203 S2: Mhm.

Zeit: 35'46''

Dann stellt S1 die Situation noch genauer ein, während S2 den Aufschrieb organisiert. Beide witzeln noch ein wenig über das ‚Aufgenommen-werden' herum. Dann beginnt S2 zu zeichnen.

Zeit: 36’23’’
204 S2: Super *(schaut vom AB auf)* So, Graph.
205 S1: Müsste eigentlich (.) *(schaut auf den Monitor)* nee, doch nicht (.) Ist ein anderer.
206 S2: Ich weiß.
207 S1: Obwohl der Flächeninhaltgleich ist.
Zeit: 36’35’’

S2 zeichnet die Situation B.x=6, C.y=10. Er zeichnet auch das Rechteck maximalen Flächeninhalts.

Dann liest S2 die Aufgabe ‚Wie findet man diese Dreiecke?’ vor.
Zeit: 36’45’’
208 S1: Indem man wieder (.) Ja, man muss den Punkt P heraus haben, dass man, wenn man die Pu-
209 Koordinaten miteinander multipliziert der Flächeninhalt rauskommt. Und den Punkt P findet man
210 heraus, indem man die Strecke AC und BC jeweils durch zwei teilt. Dadurch kriegt man die x- und
211 y-Koordinate raus.
212 S2: Ok.
213 S1: Hatten wir ja noch nie.
214 S2: Ja, man nimmt einfach-
215 M: Und seid ihr schon bei Aufgabe 3e)?
216 S1: Nein.
Zeit: 37’05’’

Sie witzeln ein wenig mit den Mädels herum.

Zeit: 37’16’’
217 S2: Man kann (.) man sagt jetzt zum Beispiel fünfzehn durch (.) drei (.) ja
218 S1: Mhm.
219 S2: Dann nimmt man den (.) dann hat man fünf raus. Dann nimmt man fünf mal zwei und drei mal
220 zwei. Und dann hat man (.) die beiden Werte hier *(zeigt auf Monitor)*
Zeit: 37’27’’

Die beiden witzeln kurz herum.
S2 beginnt zu schreiben und sagt dabei:

Zeit: 37’54’’
221 S2: *(schreibend)* Fünfzehn durch (.) irgendeine Zahl *(4 sek)* Warte, ich hab ne Idee (.) Fünfzehn-
222 S1: *(witzelnd)* Au, au, au
223 S2: durch x gleich y
Zeit: 38’04’’

S2 notiert schließlich: *15:x=y 2. x.2 und y.2 3. Nun hat man die Koordinatenabschnitte*

S1 liest Aufgabe 3e) vor: ‚Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der größte Flächeninhalt genau bei x=4 angenommen wird. Skizziere auch die dazugehörigen Flächeninhaltsgraphen.’

Zeit: 38’57’’
224 S1: Also, dass B auf vier liegt *(stellt B.x=4 ein)*, oder was?
225 S2: Dass P dann auf x vier liegt, ja.
226 S1: Ach, P soll auf x vier liegen.
227 S2: Ja, P muss auf x vier liegen, damit der größte Flächeninhalt dann da *(zeigt auf Monitor)* ist.
228 S1: *(stellt B.x=8 ein)* Ähm, müssen wir acht.
229 S2: [und davon (müssen) wir zwei
230 S1: *(verschiebt C.y=10 auf C.y=8 und P.x=4)* Aah. So (..) Einmal.
231 S2: Sicher?
232 S1: Mhm. *(S2 zeichnet)*
Zeit: 39’27’’

Es klingelt und S2 zeichnet weiter. Sie unterhalten sich off-topic. Dann stellt S2 noch fest: ‚Solange man den Punkt auf der y-Achse verschiebt, ist egal’. Sie stellen noch eine weitere Situation ein (C.y=10, B.x=8), die S2 zeichnet. S2 notiert *1. x auf 8 2. y-Wert egal.*

Während S2 noch eine Lösung für Aufgabe 3f) zu formulieren versucht, beschäftigt sich S1 schon anderweitig. S2 versteht zunächst nicht, was bei Aufgabe 3f) gefragt ist. Er braucht das Applet nicht, um zu wissen, dass die Dreiecke gleichschenklig sein müssen. Er notiert noch schnell *rechtwinklig; gleichschenklig* und *es handelt sich um Quadrate.*
L stoppt die Aufnahme.

Antworten auf dem Fragebogen

Die Schülerantworten wurden schon im Anhang an das Transkript zur Lernumgebung ‚Dreiecksfläche' genannt.

Bezogen auf die Lernumgebung ‚Einbeschriebene Rechtecke' bemerkte der Schüler, dass ihm der Computer bei der Bearbeitung der Aufgabe ‚Einbeschriebene Rechtecke' sehr geholfen hätte und schreibt zu Frage, was genau er besser verstanden hätte, weil der Computer zur Verfügung stand: *Das Verständnis, dass die Flächeninhalte der Rechtecke immer zweimal vorkommen und die Funktion eine Parabelförmige ist.*

Einbeschriebene Rechtecke
Gymnasium 2
Schülerinnen mit Noten im 2er-3er Bereich

Abkürzungen:
S1 Schülerin 1
S2 Schülerin 2
J Junge
L Lehrer (hier: Forscher)

Die beiden lesen zunächst die Aufgabenstellung auf dem Monitor (ohne dabei auf den AB zu schauen, auf dem eine Situation mit einbeschriebenem Rechteck zu sehen ist). Sie fragen sich, was für Rechtecke wohl gemeint seien und was insbesondere das Wort ‚einbeschrieben' bedeute. S1 versucht zunächst C zu bewegen und danach benutzt sie den Button ‚P auf BC fixieren' (beide Male geschieht nichts). Das Transkript startet, als S2 die Anweisung auf dem Monitor zum Gebrauch des Applets das erste Mal laut vorliest. Im Klassenraum ist es noch unruhig, da die Netzverbindung nicht funktioniert und L gerade CDs mit den Lernumgebungen verteilt. Die Schüler organisieren sich noch.

Zeit: 1'06''
S2: *(auf Monitor lesend)* Schiebe den Punkt P so, dass (.) ein einbeschriebenes Rechteck erscheint. *(S1 bewegt P auf BC, allerdings zu ungenau, so dass noch kein Rechteck erscheint)* Was ist denn einbeschrieben?
S1: *(fragt in den Klassenraum)* Was heißt denn einbeschrieben? *(11 sek, es kommt keine Antwort)*
L: *(entfernt)* Habt ihr Screenflow gestartet?
S1/S2: Ja.
S1: *(bewegt P über BC, es erscheint ein einbeschriebenes Rechteck)* Ah, guck mal. *(ein weiteres Rechteck erscheint)* Guck mal.
S2: *(auf den Monitor schauend)* Ah, wahrscheinlich heißt einbeschrieben, dass das in dem Dreieck drin ist.
S1: Ist ja einfach, muss ( )
S2: *(auf Monitor lesend)* Wann ist der Flächeninhalt gleich Null? (..)
S1: Arrr! (.) Welcher Flächeninhalt?
S2: Na der des Rechtecks.
Zeit: 2'05''

Es folgt eine kurze Ansage von L zur Benutzung der CD. S1 und S2 unterbrechen deshalb kurz ihre Arbeit.

Zeit: 2'34''
S2: *(bewegt P auf B, bisher ist P noch nicht auf BC fixiert, weswegen das Rechteck immer wieder in Abhängigkeit von der Lage von P verschwindet)* Na, der Flächeninhalt ist gleich Null (..) wenn das auf Punkt B
S1: oder C liegt.
S2: *(S2 bewegt P ca. in die Mitte BC, so dass ein Rechteck erscheint. Sie lässt mehrere verschiedene Rechtecke erscheinen.)*
S1: Boah, ich bin so müde.
S2: Warte, schreib hier mal. *(gibt den AB an S1)*
Zeit: 2'49''

S1 notiert zur Aufgabe 1b) ‚Wann ist der Flächeninhalt gleich 0?' die Antwort *Wenn P=B=C*

Dann bemerken sie, dass Aufgabe 1a) ‚Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt des Rechtecks verändert, wenn man P auf BC von B nach C bewegt.' noch zu bearbeiten ist.

Zeit: 3'16''
S2: Ok, also der Flächeninhalt *(bewegt P auf B, P ist noch nicht auf BC fixiert)* ist bei B gleich Null *(bewegt P auf BC langsam von B ausgehend in Richtung C)* dann wird er immer größer *(bewegt P weiter in Richtung C und kommt ab und zu ab von der Strecke BC)*
S1: Warum wird er denn immer größer?
S2: Naja, weil er von hier, *(bewegt P auf B und dann langsam in Richtung C)* hier ist er ja Null und

dann wird er ja erstmal größer.
S1: Woher weißt du denn, dass der größer ist. Der ist bloß nicht so lang.
S2: [Ja, er ist auf jeden Fall größer als Null. (.) Also
wird er ja erstmal größer. *(S1 grinst)* Ja, ist doch so. *(bewegt P auf P(8|3))* Und jetzt müssen wir
messen, oder?
S1: Nee, ist der (.) ich glaub der Flächeninhalt ist immer gleich.
S2: Jetzt haben wir drei zu acht. Drei mal acht ist achtzehn. *(schiebt P auf ca. P(7,2|4,2))* Jetzt haben
wir (..) vier mal sieben ist einundzwanzig, jetzt ist er zum Beispiel größer. Jetzt haben wir *(schiebt
P auf ca. P(6,68|4,98))* fünf mal sechseinhalb sind (.)
S1: Dreißig.
S2: Über dreißig. *(schiebt P auf P(6|6))*
S1: Sechs mal sechs sechsunddreißig. Er wird immer größer *(beginnt zu schreiben)*
S2: Ja, bis sechs mal sechsunddreißig wird er größer *(stellt P auf ca. P(5,2|7,1))* Jetzt haben wir sieben
mal fünf ist dreißig, also bis *(stellt P(6|6) ein)* zu dem Punkt sechs sechs
S1: [bis zur Mitte, oder? Ach so-
S2: Bis Punkt sechs sechs steigt er an (.) und dann fällt er wieder ab.
S1: [Kann man vielleicht sagen, dass er dass er bis zur Mitte des-
(schiebt P auf ca. P(5,2|7,1))
S2: Nein.
S1: der Geraden?-
S2: Nein, jetzt haben wir nämlich wieder sieben mal fünf (.) sieben mal fünf, ach fünfunddreißig. Er
nimmt wieder ab (.) Bis zum Punkt sechs mal sechs steigt er (.) und dann sinkt er. *(S1 schreibt)*
Zeit: 4'48''

S1 notiert zunächst auf dem AB: *Er wird bis zum Punkt P(6|6) größer, dann wieder kleiner.*

Dann lesen sie Aufgabe 1c) ‚Welche Werte kann der Flächeninhalt annehmen? Auch 100?'

Zeit: 5'20''
S2: Nein, er kann den Wert bis sechsunddreißig annehmen. Weil das ist ja unser größter Wert, nä.
S1: Darf ich mal? *(übernimmt die Maus von S2, stellt P(6|6) ein) (23 sek, in denen die beiden kurz vom
Geschehen in der Klasse abgelenkt sind)* Ja, ok. *(S1 schreibt)*
S2: *(schiebt P auf ca. P(5,32|7,02))* Warte mal, hier haben wir (.) fünf Komma zwei und sieben. *(holt
einen Taschenrechner und berechnet)* sechsunddreißig Komma vier, der ist größer (..)
S1: Ja, sag ich doch, bis zur Mitte der Geraden.
S2: *(stellt ca. P(4,68|7,98) ein)* Jetzt haben wir (.) vier Komma acht mal acht sind achtunddreißig
Komma vier. Ja ok, bis zur Mitte der Geraden steigt er und dann nimmt er wieder ab.
S1: Das ist aber schon über der Mitte, oder? (..) Rechne mal aus. Satz des Pythagoras, wie lang die ist.
S2: *(misst mit dem Geodreieck auf dem Monitor)* Das sind zehn Zentimeter-
S1: Zehn Quadrat mal fünfzehn zum Quadrat *(tippt in den Taschenrechner ein)*-
S2: Hää, das sind einfach zehn Zentimeter-
S1: [Nee, plus fünfzehn zum Quadrat *(den Taschenrechner bedienend)* ist
gleich die Wurzel aus der Anzahl (..) ach so (.) also die ist achtzehn lang, also die Hälfte sind
neun.
S2: Ja, stimmt aber nicht, weil es nicht die gleichen Maße sind.
S1: Was?
S2: Ich weiß nicht, wo da jetzt die Hälfte ist. Weil, wenn ich da jetzt mein Geodreieck so anlege, sind
das nur zehn Zentimeter. *(legt Geodreieck an und misst auf dem Monitor die Länge von BC)* Das
bringt uns doch nichts.
S1: Dann mach das doch mal mit, miss die mal aus. Dann können wir es ja mit dem machen.
S2: *(misst mit dem Geodreieck)* Hier haben wir (..) fünf Komma fünf *(6 sek, misst)* Ähm *(misst, 5 sek)*
und hier ko- haben wir acht Komma fünf
S1: *(10 sek, S1 bedient den Taschenrechner und berechnet wahrscheinlich Wurzel(5,5*5,5+8,5*8,5))*
Zehn.
S2: (Das hätt ich aus raus) Die Hälfte von zehn ist fünf *(misst mit dem Geodreieck auf dem Monitor,
5 sek)* Ja, es ist ungefähr die Hälfte.
S1: *(schreibend)* Bis zum Punkt (..) bis zum Mittelpunkt
S2: [bis zur Mitte (.) der Geraden
Zeit: 8'30''

S1 korrigiert die Antwort zu Aufgabe 1a) und schreibt *...zum Mittelpunkt BC....* (‚Punkt (6|6)' wird durchgestrichen). Dann wenden sie sich wieder Aufgabe 1c) zu.

Zeit: 9’04’’

S2: *(liest)* Welche Werte kann der Flächeninhalt annehmen? Auch hundert? Nein. *(4 sek)*
S1: Aber warum?
S2: Na, weil die Werte dafür nicht gegeben sind. Weil man dann irgendwie zehn mal zehn bräuchte oder so. Und dafür das Dreieck einfach zu klein ist. (..) Oder fünfzig mal zwei. Oder fünf mal (.) fünfundzwanzig.
S1: Ja, aber guck mal. Ja, zehn mal zehn geht nicht, weil *(bewegt P auf P(10|10))*
S2: Das sind einfach (.) das Dreieck ist einfach zu klein dafür.
S1: Ja.

Zeit: 9’39’’

Sie notieren als Lösung: *Nein, da die Maße des Dreiecks dazu zu klein sind.*

Dann liest S1 Aufgabe 1d) vor: ‚Gibt es mehrere verschiedene Rechtecke, die aber denselben Flächeninhalt besitzen? Wenn ja, suche mehrere Beispiele dafür!’ S2 hat inzwischen P(4|9) eingestellt.

Zeit: 10’01’’

S2: Ja klar, gibt es die
S1: [Ja.
S2: Hier neun mal vier haben wir sechsunddreißig-
S1: Guck mal, das ist so eine Gerade. Erst (.) steigt es und dann sinkt es wieder *(sie malt mit dem Stift eine nach unten geöffnete Parabelform in die Luft)*
S2: (Wenn ja, suche mehrere) Beispiele (dafür). Also schreib erstens
S1: *(schreibend)* Ja, Komma (.) warte mal *(beginnt zu schreiben)* darf ich das aufmachen (.) aufmalen, die Gerade?
S2: *(nickt)* (Mach doch)
S1: *(schreibend)* Die Flächeninhalte *(3 sek)* die Flächeninhalte

Zeit: 10’30’’

Während S1 schreibt, unterhält sich S2 off-topic mit anderen. Dann albern beide kurz mit der Kamera herum.

Zeit: 11’17’’

S1: Guck mal hier. Wir können einmal (.) *(bewegt P)*
S2: Schreib einfach mal Beispiele auf.
S1: Ja, mach ich doch gerade.
S2: [Vier. Ja nimm doch vier mal neun und sechs mal sechs
S1: [vier-
S2: Schreib auf-
S1: vier mal neun
S2: P neun und vier und P *(S1 nimmt den Taschenrechner)*. Man Anna neun mal vier ist sechsunddreißig und sechs mal sechs ist auch sechsunddreißig.

Zeit: 11’43’’

S2 notiert als Lösung zu Aufgabe 1d): *Ja, die Flächeninhalte bilden im Koordinatensystem eine Parabel (sie skizziert eine nach unten geöffnete Parabel, die ‚in O startet’) P(4|9), Q(6|6)*

Dann erhalten die beiden von L den Hinweis, dass man P auf BC fixieren kann und zusätzlich einen Hinweis mit den Daten einblenden kann. Die beiden nutzen die Buttons. Es erscheinen die Koordinaten von P, aber es erscheint NICHT der Wert des Flächeninhalts, da das Applet nicht hoch genug gescrollt wurde. S2 bewegt P auf BC.

Zeit: 12’26’’

S2: Was gibt der uns denn da jetzt gerade an?
S1: Die Koordinaten fünf Komma drei sechs mal (.)
S2: Ach so. *(stellt P(6|6) ein)*
S1: Also (.) dann geh mal auf die Mitte. Die Mitte müsste ja (.)
S2: Was haben wir gesagt (sechs)
S1: Die Mitte müsste ja hier die Mitte *(zeigt auf Monitor)* und da die Mitte sein. *(S2 stellt P(5,04|6,44) ein)* Also fünf mal (.) sieben Komma fünf
S2: [sieben Komma fünf. *(stellt genau P(5|7,5) ein)* Da. *(3 sek)* Hier.

Dann sind beide kurz abgelenkt, weil sich ein Mitschüler ihren Taschenrechner genommen hatte.

114 S1: Das ist genau die Hälfte (.) der Geraden. Also bis zum Punkt *(schreibt)*

S1 ergänzt bei der Lösung zu Aufgabe 1a) den Mittelpunkt *P(5|7,5)*.

S2 liest die Aufgabenstellung 1e) ‚Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten von P und dem Flächeninhalt des Rechtecks?'

Zeit: 13'36''
115 S2: Na, aah, wir können ja mal gucken.
116 S1: *(liest)* zwischen den Koordinaten
117 S2: *(bewegt P)* Also man kann nicht sagen, je größer P, desto größer der Flächeninhalt des Rechtecks.
118 Das stimmt nicht.
119 S1: Kann ja P größer sein (.) oder kleiner.
120 S2: *(verschiebt P, 5 sek)* Hmm.
121 S1: *(verschiebt P, 8 sek)* Boys, was schreibt denn ihr bei ‚e' auf?
Zeit: 14'20''

Es gibt ein paar off-topic Witzeleien. Dann antworten die Jungs von vorne, dass der Flächeninhalt sich ergibt, wenn man die Koordinaten multipliziert. Die beiden erwidern, dass das doch ‚klar' sei.
Sie notieren: *Wenn man die Koordinaten multipliziert, kommt der FI vom Rechteck raus.*

Dann wechseln sie zu Aufgabe 2. S2 übernimmt den AB und S1 die Maus. S2 liest die Aufgabenstellung auf dem Arbeitsbogen.

Zeit: 16'49''
122 S2: *(liest auf dem AB)* Skizziere den Graphen in obiger Abbildung. *(3 sek)* Der ist doch schon
123 skizziert.
124 S1: Wo ist der da skizziert? Das ist ein Dreieck, Camilla.
125 S2: Wie soll ich den Graphen denn machen?
126 S1: Naja (..) gib mir wieder *(S1 nimmt S2 den AB weg)*
127 S2: (Na, mach mal-)
128 S1: Also, bei eins, wenn x eins ist, ist der (.) Flächeninhalt (..) das muss man ausrechnen. *(S1 schiebt P*
129 *auf P.x=1)*
130 S2: Hah, guck mal da *(weist auf den Monitor, wo die Spur des Punktes (x|F(x)) zu sehen ist)*
131 S1: Ach so. *(S1 bewegt P erst auf C und danach bis B und wieder zurück)* Ja, das ist genau das, was
132 ich gemalt habe.
133 S2: Also einfach eine Parabel. *(S2 nimmt den AB wieder an sich)*
134 S1: *(bewegt P)* Ist voll cool.
135 S2: [Wo ist der höchste Punkt?
136 S1: *(zu ihrem Mitschüler)* Navid. *(stellt ca. P(5|7,5) ein)*
137 S2: Bei
138 S1: Ja, bei fünf Komma fünf mal sieben Komma fünf.
139 S2: Ja, aber ich will wissen, wo <u>da</u> der höchste Punkt ist.
140 S1: Bei (.)
141 S2: In der Mitte
142 S1: Na, bei fünf Komma fünf mal sieben Komma fünf ausgerechnet *(nimmt den Taschenrechner)*
143 S2: Sag mir doch einfach, wo der da ist.
144 S1: Nee, bei <u>fünf</u> mal sieben Komma fünf *(bedient Taschenrechner, 3 sek)* Siebenunddreißig Komma
145 fünf.
146 S2: *(zeichnet, 8 sek)* So, genug skizziert.
Zeit: 18'22''

S2 zeichnet in der Skizze die Punkte (0|0), (10|0), (2|24), (5|37,5) ein.

Dann unterhalten sie sich kurz mit dem Tischnachbarn darüber, dass es ‚cool' aussieht, wenn ‚die Punkte da bleiben'. Sie wenden sich dann der Bearbeitung von Aufgabe 2b) zu: ‚Erkläre anhand des Graphen, welche Flächeninhaltswerte einmal, zweimal, bzw. keinmal vorkommen.'

Zeit: 18'39''
147 S2: *(S1 bewegt P schnell hin und her)* Sechsunddreißig kommt einmal vor *(beginnt zu schreiben und*

schreibt die Ziffer ‚36’) Nee, was war das? *(blickt auf)* Was war der (.) unser höchster Wert? (..)
S1: Fünf mal sieben Komma fünf.
S2: *(streicht ‚36’ durch, schreibend)* Fünf mal sieben Komma fünf gleich einmal.
S1: <u>entspricht</u> (.) nicht <u>gleich</u> *(S2 macht aus dem ‚=’ ein ‚entspricht’-Zeichen)* Ähm, ansonsten alle Werte (.) die bei den beiden (..)
S2: die kleiner sind
S1: Nee.
S2: Doch. (..)
S1: Geht ja nicht (.) Es kann nur einer kleiner werden, der andere muss größer werden. *(3 sek)*
S2: Also schreiben wir auf kleiner fünf mal sieben Komma fünf (.) und fünf mal kleiner sieben Komma fünf (.) kommen zweimal vor.
S1: (Ja.) *(bewegt P hin und her)*
S2: *(schreibend)* Fünf mal kleiner sieben Komma fünf (.) entspricht (.) zweimal. Und ähm (.) größer als fünf mal sieben Komma fünf (.) entspricht (keinmal). Ok.
Zeit: 19’48’’

S2 notiert: *~~36~~ 5.7,5 ‚Zeichen für ‚entspricht’’ 1x*
(<5).7,5; 5.(<7,5) 5 ‚Zeichen für ‚entspricht’’ 2x
>5.7,5 ‚Zeichen für ‚entspricht’’ 0x

Aufgabe 1c) ‚Wann ist der Flächeninhalt am größten?’ wir sofort durch *P(5|7,5)* beantwortet.
Auch Aufgabe 1d) ‚Warum hat der Graph diese Gestalt? Erkläre!’ wird sofort beantwortet und es wird als Lösung notiert: *Da sich die Werte des Flächeninhalts doppeln, entsteht eine Parabel.*

Dann wechseln sie zu Aufgabe 3. S1 verschiebt C runter und hoch und danach B nach links und rechts. Dann schaltet sie den Graphen ein und verschiebt wieder B. Währenddessen gibt S2 ihre Lösung von Aufgabe 2b) an Mitschüler weiter. Dann beginnt S1 eine Lösung zu Aufgabe 3a) ‚Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn Du die Seiten des Dreiecks veränderst.’ zu formulieren.

Zeit: 21’47’’
S1: Der Flächeninhalt wird jeweils kleiner je kleiner die (.) x- und y- (.) äh je kleiner die Achsenabschnitte werden. *(bewegt C)*
S2: Mhm. *(lesend)* Wenn du sie Seiten des Dreieck veränderst. *(während S2 schiebt S1 C schnell hoch und runter und macht dabei Laute wie ‚däm, däm, däm,...’)* Was ist, wenn Du nur eine Seite (..)
S1: Dann wird er auch kleiner. *(S2 schreibt und murmelt dabei)*
S2: *(lesend)* Was für einen Graph kannst du erzeugen? (.) Es ist immer eine Parabel (..) *(schiebt C nach oben und unten)* dessen Amplitude immer so groß ist wie der x- (.) oder wie der (.) jeweilige-
S1: *(schreibt und murmelt, S1 sieht sich im Klassenraum um und trinkt Wasser)*
Zeit: 22’53’’

S2 notiert zu Aufgabe 3a): *Wenn man die Länge der Seiten verkürzt wird auch der Flächeninhalt kleiner, wenn man die Seiten verlängert wächst der Flächeninhalt.*

Zu Aufgabe 3b) notiert sie: *Es entsteht immer eine Parabel, deren Höhe und Breite von der Länge des Achsenabschnitts abhängt.*

Dann liest S1 Aufgabe 1c) ‚Wie findet man jeweils den größten Flächeninhalt? Woran erkennt man das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt in der linken Abbildung, woran im Graphen?’ S2 schreibt noch, während S1 sagt:

Zeit: 24’12’’
S1: Der größte Inhalt liegt auf der Mitte der Strecke BC.
S2: *(lesend)* Woran erkennt man das das Rechteck (.) in der linken Abbildung (woran im) Graphen
S1: [Mach doch erstmal wie findet man den-
S2: Ja, darf ich erstmal die Aufgabe bitte zu Ende lesen?
S1: [Mach doch erstmal das Erste.
S2: Ja, ok, was?
S1: *(diktierend)* Wenn man den Mittelpunkt der Strecke BC (.) nimmt. *(S2 schreibt)* (..) Oh, guck mal, da steht sogar der Flächeninhalt des Dreiecks immer. *(S2 schreibt weiter, S1 verschiebt P, 6 sek)* Neues Special, guck mal Camilla.
S2: *(schaut kurz auf und schreibt dann sofort weiter, S1 bewegt P)* Mhm.

S1: *(S1 bewegt P langsam auf die Mitte BC und beobachtet den Monitor, dann setzt sie ab und liest die nächste Aufgabe)* Gib mehrere verschiedene Dreiecke an-

S2: Ja, siehst du, du hast die Aufgabe nämlich gar nicht zu Ende gelesen. Das solltest du nämlich vielleicht erstmal tun.

(beide witzeln kurz mit ihren Tischnachbarn herum)

S1: *(lesend)* Woran erkennt man das Rechteck mit dem Flächeninhalt in der <u>linken</u> Abbildung (.) woran im Graphen?

S2: In der linken Abbildung darunter, dass der Flächeninhalt drunter steht-

S1: Ja, da haben wir das schon (.) der Mittelpunkt-

S2: [und in der (.) ja

S1: und in der rechten der ähm (.) der höchste Punkt der Parabel

S2: [der höchste Punkt

Zeit: 26’08’’

S2 notiert: *Wenn man den Mittelpunkt der Strecke BC ermittelt, ist der Flächeninhalt am größten, im Graphen ist es der höchste Punkt der Parabel.*

Dann liest S2 Aufgabe 3d) laut vor: ‚Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der maximale Flächeninhalt der einbeschriebenen Rechtecke gleich 15 ist.’

Zeit: 26’40’’

S1: *(nimmt Maus und lässt sie wieder los)* Au, da müssen wir ja rechnen.

S2: Das steht doch da unten *(zeigt auf Monitor)*

S1: Ja, aber dann w- hab ich immer noch nicht den größten (.) weißt du, dann muss ich ja erstmal in die Mitte gehen *(weist mit Maus auf P)* (..) Wir müss- können wir mit dem Pythagoras ausrechnen. x ist gleich (..)

S2: Rechne acht mal elf *(Bemerkung: es ist B.x=8 und C.y=11 eingestellt)* (..) ach Quadrat (muss ja auch Quadrat) (..)

S1: (Wir haben) wie kann man das denn rechnen?

S2: Wir müssen doch einfach *(5 sek)* Mach doch einfach hier, ist doch scheißegal *(bewegt P)* Das steht doch da drunter *(bewegt P, so dass als Flächeninhaltswert ca. 15 erscheint)*

S1: [Stimmt (der höchste) ist drei mal fünf, drei mal fünf

S2: Das steht doch da drunter.

S1: Ja, aber dann ist es nicht der <u>maximale</u> (.) Flächeninhalt.

S2: Er soll aber *(schaut auf den AB)* ach so.

S1: *(bewegt P, und versucht die Seiten auf 3 und 5 einzustellen, was aber in der Konstellation nicht funktioniert, 6 sek)*

S2: Es geht nicht.

S1: Dann muss ich das hier verändern *(bewegt B, sie versucht nun B so zu schieben, dass der Punkt P(5|3) auf der Strecke BC liegt, dabei achtet sie nicht darauf, dass P in ihrem Fall nicht im Maximum liegt, 12 sek)*

S2: Hier (.) wie findet man diese Dreiecke *(zeigt auf AB)*

S1: *(eingestellte Konstellation: B.x=ca.7, C.y=ca.11, P(5|3))* So (.) jetzt ist trotzdem der höchste Punkt nicht <u>da</u> *(weist mit Maus auf den Scheitelpunkt der Parabel) (3 sek)*

S2: Ähm.

S1: *(versucht den Punkt auf dem Graphen zu schieben)* Kann ich den hier nicht verschieben?

S2: Nee, kannst du nicht.

S1: Scheiße. *(13 sek)* Wir müssen das mit dem Pythagoras machen.

S2: Ey, das ist aber voll kacke.

S1: Ja, aber es ist das einzige, weil mit ausprobieren dauert es ja ewig.

S2: Wie willst du denn das mit dem Pythagoras machen? Dann hast du den Flächeninhalt immer noch nicht raus. *(3 sek)* Mit dem Pythagoras bringt dir das gar nichts.

S1: Doch.

S2: Wieso denn?

S1: [Mit dem Pythagoras kann ich die Strecke immer jeweils ausrechen und kann dann den (.) den Mittelpunkt nehmen. (..) Und der muss ja dann fünfzehn sein, also muss der-

S2: *(derzeitige Konstellation: C.y=11, B.x=7)* [Also sieben zum Quadrat Nein der muss nicht fünfzehn sein. Der <u>Flächeninhalt</u> von <u>dem</u> Ding muss fünfzehn sein.

S1: [Ja, stimmt.

S2: *(10 sek)* Jungs, wie macht man d?

J: *(von vorne)* drei d?

232 S2: Ja.
233 J: Sind wir noch nicht.

(Sie unterhalten sich kurz, dass sie langsamer seien, weil sie schließlich aufgenommen werden. Dann antwortet ein anderer Mitschüler auf die Frage von S2)

234 J2: x, y die beiden Punkte (in/von) dem Graphen
235 S2: Ja.
236 J2: ( ) also müssen zusammen sechzig ergeben, wenn du die multiplizierst.
237 S2: Warum?
238 J2: Weil (.) du hast ja hier
239 S2: Ah, weil ich fünfzehn mal vier gleich sechzig.
240 J2: (hier ein Quadrat, das heißt) fünfzehn muss ein Viertel davon sein. Weil du hast ja hier immer
241 ein Viertel ( ) genau von dem Quadrat gebildet.
242 S2: Ok, also ich muss immer.
243 J2: Das heißt du musst jetzt zum Beispiel zehn und sechs als Punkte für den Graphen-
244 S2: Ach so, dann muss immer das Verhal- Verhältnis (.) ein Sechstel sein.
245 J2: Ja.
246 S2: Ok, also könnte ich auch (.) acht und (.) irgendwas nehmen. (.) Acht und acht Sechstel sind acht
247 und (.) vier Drittel.
248 S1: wir können drei Komma acht
249 J2: Ihr müsst halt irgendwas nehmen, was mal ( ) musst du irgendwas nehmen, was mit dem Punkt
250 hier mal genommen sechzig ergibt.
251 S1: *(verschiebt B und P während S2 und J2 sich weiter unterhalten)*
252 S2: Ach so. Also nehm ich jetzt zum Beispiel (.)
253 J2: Zehn und sechs.
254 S2: Aha, ok. Verstehst du das?
255 S1: *(C verschiebend)* Nö.
256 S2: Also du brauchst ein Verhältnis von ähm (.)
257 S1: Eins zu vier *(C ganz nach unten verschiebend)*
258 S2: Ja (..) und deshalb nimmst du hier sechzig durch acht *(bedient den Taschenrechner, 60:8=7,5)*
259 Dann musst du hier sieben Komma fünf nehmen und da acht *(S1 stellt B.x=8 und C.y=7,5 ein)* und
260 dann ist der größte (..) Flächeninhalt (..) müsste eigentlich fünfzehn sein. *(S1 verschiebt nun P in*
261 *die Mitte BC, d.h. P(4|3,75))* Ja, nä?
262 S1: Ja, da. Dann schreib auf. Ich hab das (ja) nicht verstanden. Ach so, musst erst mal einmalen. *(S2*
263 *zeichnet, S1 wartet und unterhält sich mit dem Tischnachbarn über seine Lösung zur Aufgabe)*
264 J3: Ich hab einfach das Ding so langgezogen, bis hier fünfzehn rauskam. Gut, nä.
265 S1: Das ist auch gut. Guck mal, Camilla *(S2 schaut auf Monitor)* Bis da fünfzehn rauskommt *(Maus*
266 *über dem Graphen)* Guck ich mach auf sechs *(stellt B.x=6 ein)* und zieh so lange *(bewegt C nach*
267 *oben)*
268 S2: An C. *(S1 stellt C.y=10 ein, P bleibt dabei immer in der Mitte, Maximum ist nun bei 15)*
Zeit: 31'55''

S2 zeichnet die beiden Lösungen: *B.x=8, C.y=7,5 und B.x=6, C.y=10.* Als Antwort auf die Frage ‚Wie findet man diese Dreiecke?' notieren ohne viele Überlegungen: *Man braucht auf der x-Achse eine Zahl die mit n multipliziert 60 ergibt, oder man nimmt einen beliebigen Punkt auf der x-Achse und zieht den Punkt auf der y-Achse so lang, dass im Graphen der höchste Punkt bei 15 liegt.*

Dann lesen beide Aufgabe 3e): ‚Zeichne zwei verschiedene Dreiecke, so dass der größte Flächeninhalt genau bei x=4 angenommen wird.'

Zeit: 34'09''
269 S1: Ey, jetzt können wir aber den Pythagoras anwenden *(bewegt B nach links auf B.x=4)* Jetzt haben
270 wir nämlich eine Seite (..)
271 S2: Nein, kannst du immer noch nicht machen (..) Es geht um den Flächeninhalt von <u>dem</u> Ding *(zeigt*
272 *mit der Hand auf den Monitor)* und da bringt dir der Pythagoras überhaupt nichts. *(8 sek)*
273 S1: Ach so. Jetzt versteh ich. Bei x ist gleich vier. *(zieht B.x auf B.x=8)* Also da hin.
(Es folgt eine kurze Ablenkung durch den Tischnachbarn zu einem anderen Thema, 10 sek)
274 S2: *(liest)* Zeichne zwei verschiedene, so dass der größte Flächeninhalt bei x gleich vier
(Wieder kurze Ablenkung durch den Tischnachbarn, 35 sek)
275 S1: *(bewegt C hoch und runter, B.x=8)* Ja, da kann man jeden beliebigen Graph nehmen.

S2: Ich verstehe nicht, was x gleich vier heißt, ob der-

S1: [Hier *(zeigt auf Monitor)*

S2: Ja, ob der- ach so

S1: Dann nehm ich jetzt mal dreizehn einfach *(stellt C.y=13 ein)*

S2: Acht und dreizehn. *(zeichnet, 7 sek)* Und nehmen wir (.) sechs und *(stellt B.x=6 ein, dann schiebt sie P auf P.x=4, S1 unterhält sich währenddessen mit dem Tischnachbarn und wendet sich wieder dem Monitor zu als S2 sagt)* Du das stimmt doch überhaupt nicht. Der grö- (.) der Flächeninhalt steigt doch hier jetzt noch *(schiebt P.x von P.x=4 auf P.x=3)* Ist doch falsch.

S1: Guck mal. *(schiebt P von P.x=3 auf P.x=4 und bewegt dann B nach rechts, dabei bewegt sich P auf P.x=5)* Ach so, nee der muss ja bei vier sein *(bewegt B wieder auf B.x=6)*

S2: [bei acht, nee bei acht

S1: Bei vier.

S2: Nee, den Graph, den du mir gerade gesagt hast, da war er bei acht.

S1: *(schiebt B ganz nach rechts, dabei bewegt sich P auf P.x=7)* Geht aber gar nicht.

S2: Auf acht, da *(zeigt auf Monitor)*

S1: *(stellt kurz B.x=8 (dabei ist P.x=ca. 5,5), aber dann schnell auf B.x=4, so dass P.x=4 ist)* Ich muss den aber bei vier haben x. Und jetzt- *(setzt Maus auf C (will C bewegen))*

S2: Ja, x ist doch dann bei vier. Hast du mir doch gesagt.

S1: Ja-

S2: Du, schau mal, du hattest *(übernimmt die Maus)* ihn auf acht *(stellt B.x=8 ein)* Dann hast du gesagt, so stimmt es. Dann musst du einfach P noch verschieben *(stellt P.x=4 ein)* So jetzt haben wir fünfundzwanzig Komma neun fünf *(schiebt P über das Maximum hinaus weiter in Richtung C und wieder zurück über das Maximum hinaus in Richtung B)* Ok. Da stimmt es. *(stellt P.x=4 ein)* So. Aber wie ist das jetzt anders?

S1: *(nimmt die Maus und verschiebt B nach rechts auf B.x=10 und danach P auf P.x=4. Dann schiebt sie C nach unten und wieder hoch)*

S2: Dann stimmt es nämlich nicht.

S1: Warum haben wir das dann? (.) Haben wir zufällig das richtig gemacht, oder was? *(stellt C.y=13 und B.x=8 ein, also die erste gezeichnete Situation)*

S2: Ja, ich weiß nicht wie du es gemacht hast, Anna. *(S1 stellt B.x=9,5 ein)*

S1: Ich hab den einfach auf vier gezogen. *(stellt P.x=4 ein, 4 sek)*

S2: *(weist auf Monitor)* Der ist da noch größer, wenn du ihn weiter runter ziehst.

S1: *(bewegt B nach links bis B.x=8 und wieder nach rechts auf B.x=10, dann bewegt sie wieder C und stellt P.x=4 ein. Dann schiebt sie B wieder auf B.x=8 und wieder zurück auf B.x=9,5, dann bewegt sie wieder C)*

S2: Ich versteh das nicht. *(S1 schiebt B auf B.x=8,2)* Jungs, habt ihr schon Aufgabe 3e)?

J: Nein.

S2: Alex (..) hast du 3e)?

J3: *(es antwortet nicht Alex, sondern der Tischnachbar)* Ich mach auch grade 3e).

S2: Wir verstehen das nicht.

J3: Ja, ich habe es auch gerade nicht verstanden. Sie hat es mir erklärt. Und zwar (.) äh, das Maximum muss halt bei x gleich vier sein, ja?

S2: Ja.

S1: [Das haben wir auch schon.

J3: [der höchste Punkt, also müsst ihr einfach gucken (.) also das zieht ihr auf vier *(S1 stellt P.x=4 ein)* das Ding zieht ihr auf vier und dann guckt ihr, dass das dann am höchsten ist halt. Und wenn es dann am höchsten ist, dann (   )

S2: [ist jetzt zufällig so *(B.x=8,2, so dass es in dieser Situation ungefähr hinkommt)*

J3: Ja, genau dann kannst du sagen äh (.) dann kannst du die Punkte ja bestimmen. Dann ist das (.) ähm (.) acht und dreizehn.

S1: [acht und dreizehn.

S2: Ja.

J3: Dann musst du es halt zeichnen.

S2: Ja, ok. Und wie ist jetzt unser Zweites?

J3: Was?

S2: Acht und dreizehn haben wir schon.

J3: Ja, gut, dann müsst ihr das aufschreiben.

S2: Haben wir schon.

S1: (?)

S2: Nee. *(stellt B.x=10 ein und schiebt dann C nach oben)*

J3: Na, dann zieht ihr das hier halt weiter runter. Macht ihr das hier auf zehn, was weiß ich.

S1: Das muss immer bei acht bleiben, Camilla.
J3: Das muss immer bei acht bleiben.
S1: Bei x muss es bei acht bleiben. *(S2 stellt B.x=8 ein)*
S2: Ok. *(schiebt C auf C.y=16)*
S1: Und dann kannst du das da oben verschieben. Das hatte ich nämlich vorhin auch. Deswegen habe ich mich so gewundert, dass es plötzlich nicht mehr geht.
S2: Ja, und jetzt haben wir acht und sechzehn. *(zeichnet, 5 sek)* Wieso hat sich denn das da jetzt verändert? *(6 sek)*
S1: Das ist der Flächeninhaltsgraph dazu.
S2: Hmm, ok dann nehmen wir noch acht und sechzehn *(zeichnet)*
S1: Guck mal auf der Rückseite, da ist bestimmt noch eins.
S2: Nee, es gibt keine Rückseite. *(zeichnet weiter)*
Zeit: 40’32’’

S2 vergleicht die Konstellation (B.x=4/C.y=16) nochmals mit der ersten Konstellation (B.x=4/C.y=13), indem sie die letztere nochmals mit dem Applet herstellt. Dann stoppen sie die Aufnahme.
S2 zeichnet beide Konstellationen in dasselbe Koordinatensystem.

Die Lösungen zu den restlichen Aufgaben auf der letzten Seite, haben sie wohl im nachfolgenden Unterrichtsgespräch ergänzt:
‚Wie findet man diese Dreiecke?’: *Der Punkt muss auf der x-Achse immer bei 8 liegen.*

3f) ‚Zeichne ein Dreieck, so dass das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ein Quadrat ist.’: *C.y=8=B.x*
‚Welche Eigenschaft hat das Dreieck in diesem Fall?’: *Das Dreieck ist gleichschenklig und hat einen rechten Winkel.*

‚Welche Eigenschaft haben die einbeschriebenen Rechtecke in diesem Fall?’: *Der Umfang der Rechtecke bleibt immer gleich.*

Antworten auf dem Fragebogen

Außer den schon im Anschluss der Transkripte zur Lernumgebung ‚Dreiecksfläche’ gegebenen Antworten vermerkt S2 zur Lernumgebung ‚Einbeschriebene Rechtecke’, dass ihr der Computer sehr geholfen hätte und schreibt dazu: *Man konnte viel mehr ausprobieren, verschieben, sich besser über den Sachverhalt klar werden.*

Literaturverzeichnis

[And88] B. Andelfinger, editor. *Geometrie – Didaktischer Informationsdienst Mathematik*. Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest, 1988.

[Art02] Michèle Artigue. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7:245–274, 2002.

[Ban97] A. Bandura. *Self-efficacy. The exercise of control.* Freeman, New York, 1997.

[BDHW01] Peter Borneleit, Rainer Danckwerts, Hans-Wolfgang Henn, and Hans-Georg Weigand. Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. *Journal für Mathematikdidaktik*, 22(1):73–90, 2001.

[Ben91] Peter Bender. Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen der Sekundarstufen. In Helmut Postel, Arnold Kirsch, and Werner Blum, editors, *Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel*, pages 48–60. Schroedel Verlag, Hannover, 1991.

[BK79a] Werner Blum and Arnold Kirsch. Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis IV. *Der Mathematikunterricht*, 25(3), 1979.

[BK79b] Werner Blum and Arnold Kirsch. Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht*, 25(3):6–24, 1979.

[Blu00] Werner Blum. Perspektiven für den Analysisunterricht. *Der Mathematikunterricht*, 46(4/5):5–17, 2000.

[Bra05] Holger Brandes. Lev S. Vygotskij und die elementarpädagogische Debatte. *Studientexte aus der Evangelischen Hochschule für Soziale Arbeit Dresden (FH)*, 3, 2005.

[Bro83] Guy Brousseau. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Revue de Didactique des Mathématiques*, 4(2):165–198, 1983.

[BT83] Werner Blum and Günter Törner. *Didaktik der Analysis*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1983.

[BT92] M. Bakar and D. Tall. Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 23(1):39–50, 1992.

[BZ07] I. Biza and T. Zachariades. Using Dynamic Geometry to introduce Calculus concepts. In D. Küchemann, editor, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, pages 7–12, 2007.

[Cle89] John J. Clement. The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2):77–87, 1989.

[Cor92] Bernard Cornu. Limits. In D. O. Tall, editor, *Advanced Mathematical Thinking*, pages 153–166. Kluwer, Dordrecht, 1992.

[Cos95] Y. M. Coston. The effect of a graphics calculator enhanced college algebra curriculum and cooperative learning on mathematics achievement and attitude. In L. Lum, editor, *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*. Reading MA: Addison-Wesley, 1995.

[DBH$^+$04] Wim Van Dooren, Dirk De Bock, An Hessels, Dirk Janssens, and Lieven Verschaffel. Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction*, 14:485–501, 2004.

[DDBvG09] Paul Drijvers, Michiel Doorman, Peter Boon, and Sief van Gisbergen. Instrumental orchestration - theory and practice. In V. Durant-Guerrier, S. Soury-Lavergne, and F. Azarello, editors, *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2009.

[DE80] Tommy Dreyfus and Theodore Eisenberg. Intuitions on Functions. *Journal for Experimental Education*, 1980.

[DH92a] Ed Dubinsky and Guershon Harel, editors. *The concept of function: Aspects and epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.

[DH92b] Ed Dubinsky and Guershon Harel. The nature of the process concept of function – The case of function. In Guershon Harel and Ed Dubinsky, editors, *The concept of function: Aspects and epistemology and pedagogy*, pages 85–106. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.

[Dui96] Reinders Duit. Lernen als Konzeptwechsel im naturwissenschaftlichen Unterricht. In R. Duit and Chr. von Rhöneck, editors, *Lernen in den Naturwissenschaften. Beiträge zu einem Workshop an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg*, pages 145–162. Kiel, 1996.

[Eis92] Theodore Eisenberg. On the development of a sense for functions. In Guershon Harel and Ed Dubinsky, editors, *The concept of function: Aspects and epistemology and pedagogy*, pages 153–174. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.

[Fes10] Andreas Fest. Creating interactive user feedback in DGS using scripting interfaces. *Acta Didactica Napocensia*, 3(2):79–88, 2010.

[FK09] Andreas Fest and Ulrich Kortenkamp. From CAS/DGS Integration to Algorithms in Educational MathSoftware. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 3(3), 2009.

[FLM07] Rossana Falcade, Colette Laborde, and Maria Alessandra Mariotti. Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66:317–333, 2007.

[FM85] Roland Fischer and Günther Malle. *Mensch und Mathematik - Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. BI Wissenschaftsverlag, Zürich, 1985.

[FMG94] J. Ferrini-Mundi and K. Graham. Research in calculus learning: understanding limits, derivatives and integrals. In J.J. Kaput and E. Dubinsky et al., editors, *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, pages 31–45. MAA, Washington DC, maa notes 33 edition, 1994.

[FPR06] Francesca Ferrara, Dave Pratt, and Ornelia Robutti. The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez and P. Boero, editors, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pages 237–273. Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands, 2006.

[Fre73] Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 1+2. Klett, Stuttgart, 1973.

[Fre83] Hans Freudenthal. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel, 1983.

[GLO92] E. P. Goldenberg, P. Lewis, and J. O'Keefe. Dynamic representation and teh development of an understanding of functions. In Guershon Harel and Ed Dubinsky, editors, *The concept of function: Aspects and epistemology and pedagogy*, pages 235–260. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.

[Gut08] August Gutzmer, editor. *Meraner Lehrplan 1905: Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten*, pages 104–114. 1908.

[Hei88] M. Kathleen Heid. Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1):3–25, 1988.

[His02] Horst Hischer. Zur Geschichte des Funktionsbegriffs. Preprint 54, Universität des Saarlandes, February 2002.

[Hof07] Andrea Hoffkamp. Funktionales Denken fördern durch den Einsatz von Dynamischer Geometrie Software (DGS). In *Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. Bericht über die 25. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik"*. Franzbecker, 2007.

[Hof09a] Andrea Hoffkamp. Dynamisierter Repräsentationstransfer und Metavariation – ein Ansatz zur Förderung funktionalen Denkens durch Computereinsatz. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Franzbecker, 2009.

[Hof09b] Andrea Hoffkamp. Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. In *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematical Education*, Lyon, 2009.

[Hof09c] Andrea Hoffkamp. Funktionales Denken mit dem Computer unterstützen. In *Zur Zukunft des Analysisunterrichts vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit Neuer Medien (und Werkzeuge). Bericht über die 27. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik"*. Franzbecker, 2009.

[Hof10] Andrea Hoffkamp. Empirische Befunde und neue Gestaltungsprinzipien für einen inhaltlichen Zugang zur Analysis durch Computereinsatz. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Franzbecker, 2010.

[Hof11a] Andrea Hoffkamp. Dynamischer Darstellungstransfer bei Funktionen: Annäherung an Konzepte der Analysis. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(38):14–19, 2011.

[Hof11b] Andrea Hoffkamp. The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus – design principles and empirical results. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 43(3):359–372, 2011.

[HP08] Steffen Hahn and Susanne Prediger. Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematikdidaktik*, 3/4(29):163–198, 2008.

[Huß01] Stephan Hußmann. *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen – Theoretische und empirische Studie zu den Auswirkungen konstruktivistischer, computerorientierter Lernarrangements im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auf die Begriffsbildung und das Problemlöseverhalten*. Dissertation, Universität Essen, 2001.

[Jah84] Hans Niels Jahnke. Anschauung und Begründung im Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Franzbecker, 1984.

[Jan78] Claude Janvier. *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations*. PhD thesis, University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education, Nottingham, 1978.

[Kap87] James Kaput. Representation Systems and Mathematics. In Claude Janvier, editor, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pages 19–26. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1987.

[Ker81] Daphne Kerslake. Graphs. In K.M. Hart et al, editor, *Children's Understanding of Mathematics*, pages 120–136. John Murray, London, 1981.

[Kö96] Claudia Kösters. Was stellen sich Schüler unter Funktionen vor? *mathematik lehren*, 75:9–13, 1996.

[Kor07] Ulrich Kortenkamp. Combining CAS and DGS – Towards Algorithmic Thinking. In Li Shangzhi et al, editor, *Symbolic Computation and Education*. World Scientific, 2007.

[KRG] Ulrich Kortenkamp and Jürgen Richter-Gebert. The Interactive Geometry Software Cinderella, Version 2.0. Springer. `http://www.cinderella.de`.

[Kro97] Martin Kronfellner. *Historische Aspekte im Mathematikunterricht*. Hölder Pichler Tempsky, 1997.

[Kro98] Manfred Kronfellner. Historische Aspekte im Mathematikunterricht. In Willibald Dörfler and Roland Fischer, editors, *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*. Hölder–Pichler–Tempsky, Band 24, 1998.

[Krü00a] Katja Krüger. *Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*. Logos Verlag, Berlin, 2000.

[Krü00b] Katja Krüger. Kinematisch–funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47:221–241, 2000.

[Kul03] Kultusministerkonferenz, editor. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Luchterhand, Darmstadt, 2003.

[Leu03] A. Leung. Dynamic geometry and the theory of variation. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty, and J.T. Zilliox, editors, *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 2003.

[Lie26] Walther Lietzmann. *Methodik des Mathematischen Unterrichts, Teil 1*. Quelle & Meyer, Leipzig, 2 edition, 1926.

[Mal80] M. A. Malik. Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *Int. Journal of mathematics education in science and technology*, 11(4):489–492, 1980.

[Mal84] Günther Malle. Problemlösen und Visualisieren in der Mathematik. In Hermann Kautschitsch and Wolfgang Metzler, editors, *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun*, pages 65–121. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1984.

[Mal93] G. Malle. *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg, 1993.

[Mal00] Günther Malle. Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, 103:8–11, 2000.

[May94] Robert L. Mayes. Implications of Research on CAS in College Algebra. *International Derive Journal*, 1(2):21–37, 1994.

[May05] R. Mayer, editor. *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*. Cambridge University Press, New York, 2005.

[MEB88] Z. Markovits, B. Eylon, and M. Bruckheimer. Difficulties Students have with the Function Concept. In *The Ideas of Algebra, K-12*, pages 43–60. NCTM Yearbook, 1988.

[Möl07] Kornelia Möller. Genetisches Lernen und Conceptual Change. In Joachim Kahlert et al, editor, *Handbuch Didaktik des Sachunterrichts*, pages 258–266. Klinkhardt, Bad Heilbrunn, 2007.

[MP94] Susanne Müller-Philipp. *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht – Eine Analyse für die Sekundarstufe I unter Berücksichtigung lernpsychologischer Erkenntnisse und der Einbeziehung des Computers als Lernhilfe*. Waxmann Verlag GmbH, Münster/New York, 1994.

[MV91] Hermann Maier and Jörg Voigt, editors. *Interpretative Unterrichtsforschung*. Aulis Verlag, Köln, IDM-Reihe, Band 17 edition, 1991.

[MV94] Hermann Maier and Jörg Voigt, editors. *Verstehen und Verständigung – Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung*. Aulis Verlag, Köln, IDM-Reihe, Band 19 edition, 1994.

[Oeh65] Wilhelm Oehl. *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*. Schroedel Verlag, Hannover, 1965.

[Oss00] Günther Ossimitz. *Entwicklung systemischen Denkens*. Profil, München, 2000.

[Oss01] Günther Ossimitz. Unterscheidung von Bestands- und Bewegungsmassen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Verlag Franzbecker, 2001.

[Pal91] Jeanette R. Palmiter. Effects of computer algebra systems on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2):151–156, 1991.

[Pia72] Jean Piaget, editor. *The Principles of Genetic Epistemology*. Routledge & Kegan Paul, London, 1972.

[Pre04] Susanne Prediger. Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen. *mathematik lehren*, 123:10–13, 2004.

[Rei74] H.C. Reichel. Zur Didaktik der Integralrechnung für Höhere Schulen. *Didaktik der Mathematik*, 2:167–188, 1974.

[RGK10] Jürgen Richter-Gebert and Ulrich Kortenkamp. The power of scripting: DGS meets programming. *Acta Didactica Napocensia*, 3(2):67–78, 2010.

[Rot08] Jürgen Roth. Zur Entwicklung und Förderung Beweglichen Denkens im Mathematikunterricht – Eine empirische Längsschnittuntersuchung. *Journal für Mathematikdidaktik*, 1(29):20–45, 2008.

[Rut07] Kenneth Ruthven. Teachers, technologies and the structures of schooling. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research n Mathematics Education, CERME 5*, pages 52–67, 2007.

[S^+85] Malcolm Swan et al. *The language of functions and graphs*. Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham, 1985.

[Sal94] G. Salomon. *Interaction of media, cognition, and learning*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1994.

[Sch71] Ernst Schuberth. *Die Modernisierung des Mathematischen Unterrichts. Ihre Geschichte und Probleme unter besonderer Berücksichtigung von Felix Klein, Martin Wagenschein und Alexander I. Wittenberg*. Dissertation, Stuttgart, 1971.

[Sch93] M. Schneider. A way to analyse several difficulties the pupils meet in calculus. In M. Artigue and G. Ervynck, editors, *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, Québec, Canada, 1993. ICME-7.

[Sch98] Heinz Schumann. Dynamische Behandlung elementarer Funktionen. *Mathematik in der Schule*, 38(2):109–119, 1998.

[Sch99] Inge Schwank. On predicative versus functional cognitive structures. In I. Schwank, editor, *Proceedings of CERME 1, Vol. II*, pages 84–86, Osnabrück, 1999.

[Sch00] Franz Schlöglhofer. Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *mathematik lehren*, 103:16–17, 2000.

[Sch01] Inge Schwank. Prädikative versus funktionale art logischen denkens. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Verlag Franzbecker, 2001.

[Sfa91] Anna Sfard. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22:1–36, 1991.

[Sfa94] Anna Sfard. Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1):44–54, 1994.

[SfB06a] Jugend und Sport Berlin Senatsverwaltung für Bildung, editor. *Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik*. Oktoberdruck AG, Berlin, 2006.

[SfB06b] Jugend und Sport Berlin Senatsverwaltung für Bildung, editor. *Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I, Jahrgangsstufe 7-10, Mathematik*. Oktoberdruck AG, Berlin, 2006.

[Sie87] Anna Sierpinska. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18:371–387, 1987.

[Sie92] Anna Sierpinska. On understanding the notion of function. In Guershon Harel and Ed Dubinsky, editors, *The concept of function: Aspects and epistemology and pedagogy*, pages 25–58. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992.

[Sie94] Anna Sierpinska, editor. *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press, London, Washington, DC, 1994.

[Ste86] Hubertus Stellmacher. Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht. In Gerd von Harten and Hans Niels Jahnke et al, editors, *Funktionsbegriff und funktionales Denken*, pages 21–34. IDM-Reihe, Band 11, Aulis Verlag, Köln, 1986.

[Stö08] Pascal Stölting. *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I – Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in*

Deutschland und Frankreich. PhD thesis, Universität Regensburg und Universität Paris 7 – Denis Diderot, 2008.

[Tal94] David Tall. Understanding the processes of advanced mathematical thinking. Preprint of an invited ICMI lecture at the International Congress of Mathematicians, August 1994.

[Tal96] David Tall. Functions and calculus. In Alan Bishop et. al., editor, *International Handbook of Mathematics Education*, chapter 8, pages 289–325. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1996.

[Thu90] William Paul Thurston. Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society*, 37(7):844–850, 1990.

[Toe28] Otto Toeplitz. Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Vorträge auf der 90. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Hamburg*, 10, 1928.

[Ull99] V. Ullrich, editor. *Die nervöse Großmacht 1871-1918*. Fischer TB, Frankfurt/M., 1999.

[VD89] Shlomo Vinner and Tommy Dreyfus. Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 20(4):356–366, 1989.

[Vog06] Markus Vogel. *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation*. Franzbecker Verlag, Hildesheim, 2006.

[Voi84] Jörg Voigt. *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht – Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Beltz, Weinheim, 1984.

[Vol89] Hans-Joachim Vollrath. Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10(1):3–37, 1989.

[VV04] Lieven Verschaffel and Stella Vosniadou. Extending the conceptual change appraoch to mathematics learning and teaching. In L. Verschaffel and S. Vosniadou, editors, *Conceptual change in mathematics learning and teaching, special issue of Learning and Instruction*, pages 445–451. Elsevier, 2004.

[VV06] Stella Vosniadou and Xenia Vamvakoussi. Examining mathematics learning from a conceptual point of view: Implications for the design of learning environments. In L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boeckaerts, and S. Vosniadou, editors, *Instructional Psychology: Past, present, and future trends – Sixteen essays in honour of Erik De Conte. Advances in Learning and Instruction Series*. Elsevier, 2006.

[Vyg74] Lev S. Vygotskij. *Denken und Sprechen*. S. Fischer Verlag, Frankfurt/M., 1974.

[Vyg78] Lev S. Vygotskij. *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1978.

[Wei07] Philipp Weinmeister. Unendlichkeitsrechnung in der Schule. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 38:1–15, 1907.

[Wei88] Hans-Georg Weigand. Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften. *Journal für Mathematikdidaktik*, 9(88):287–325, 1988.

[WH02] T. Wilhelm and D. Heuer. Fehlvorstellungen in der Kinematik vermeiden – durch Beginn mit der zweidimensionalen Bewegung. *Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule*, 51(7):29–34, 2002.

[You76] A.P. Youshkevitch. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of exact Sciences*, 16:36–85, 1976.

[ZC91] Walter Zimmermann and Steve Cunningham. Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? In W. Zimmermann and S. Cunningham, editors, *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, pages 1–8. MAA Notes No. 19, 1991.

[ZPC+07] T. Zachariades, P. Pamfilos, C. Christou, R. Maleev, and K. Jones. Teaching Introductory Calculus: approaching key ideas with dynamic software. In *Paper presented at the CETL-MSOR Conference 2007 on Excellence in the Teaching & Learning of Maths, Stats & OR*, University of Birmingham, 2007.