Differentialgeometrie
Ulrich Krähmer
TU Dresden 2017/18

The equations of mathematical physics are typically ordinary or partial differential equations for vector or tensor fields over Riemannian manifolds whose group of isometries is a Lie group. It is taken as axiomatic that the equations be independent of the observer, in a sense we shall make precise below; and the consequence of this axiom is that the equations are invariant with respect to the group action. [SW]

Kurzer Abriss

1. Topologische Räume: Grenzwert, Stetigkeit, Umgebung
2. Mannigfaltigkeiten: Differential, Integral
3. Riemannsche Mannigfaltigkeiten: Länge, Winkel
4. Poissonmannigfaltigkeiten: Dynamik
5. Liegruppen: Symmetrie
6. Hauptfaserbündel: Krümmung

Packungsbeilage (VL 1)

Organisatorisches

1. VL: Mi 2. DS, Do 1. DS (oder: TUTslot, falls algebraische Geometrie verlegbar, SEMslot, WIAslot Do 2. DS A120)
2. Dozent: (Prof.) Uli/Ulrich (Krähmer) B117 Sprechstunde Do 15-18
3. TUT: Mi 5. DS C106 (Plan: Jede 2. Woche Start 18.10.)
4. Tutorin: Stephanie Feilitzsch B116
5. Hausaufgaben: Abgabe alle zwei Wochen in Zweiergruppen oder wenns sein muss allein, immer eine Woche nach dem Tutorium in der VL (erste Abgabe 25.10.).
6. Prüfungen: Mündliche Einzelprüfungen in den Sommerferien.
7. SEM: Do 4. DS A120, Kategorientheorie, Logik, Mengelnehre...

Literatur, die ich verwendet habe

AF Agricola, Friedrich, Globale Analysis

Ba1 Baum, Differentialgeometrie

Ba2 Baum, Eichfeldtheorie

Bl Bleecker, Gauge Theory and Variational Principles

Hi Hitchin, Differential Geometry

Jä Jänich, Vektoranalysis

SW Sattinger, Weaver, Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics

Va Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations

Notation: Topologie und Analysis

1. M, N sind topoloigische Räume, Mannigfaltigkeiten etc, U, V, W sind offene Teilmengen oder Umgebungen, p, q, r Punkte
2. κ, ι sind Karten, K, I Atlanten
3. f ist eine reell- oder komplexwertige Funktionen, alle anderen Abbildungen werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet
4. δ ist eine Metrik (im Sinne metrischer Raum)

Notation: Algebra

1. A ist ein assoziativer Ring, a, b, c sind Elemente
2. $\mathbb{K}$ ist ein kommutativer Ring, z.B. $\mathbb{R}$, λ, μ, ν sind Elemente
3. $x, y, z, t \in \mathbb{R}$
4. V ist ein Modul, Bimodul, oder Vektorraum, u, v, w Elemente
5. G, H sind Gruppen, meist Lie-, g, h Elemente, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ Liealgebren

Konvergenz, Stetigkeit, Umgebung
$\rightsquigarrow$ topologische Räume (VL 1)

Worum gehts?

1. Frage: Welche Struktur auf einer Menge erlaubt es uns, konvergente Punktfolgen zu definieren?
2. Naive Antwort: Eine Metrik (Abstandsbegirff).
3. Bessere Antwort: Eine Topologie (Umgebungsbegriff).
4. Aus dem Begriff der Konvergenz ergeben sich weitere, wie z.B. der einer stetigen Abbildung.

Konvergenz in metrischen Räumen

1. Definition: Eine **Metrik** ist eine Funktion $\delta\colon M \times M \to [0, \infty)$ mit
   1. $\forall p, q \in M : \delta(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$,
   2. $\forall p, q \in M : \delta(p, q) = \delta(q, p)$,
   3. $\forall p, q, r \in M : \delta(p, q) \leq \delta(p, r) + \delta(r, q)$.

   Wir nennen (M, δ) einen **metrischen Raum**.
2. Definition: Eine Folge $\{p_n\}$ in M **konvergiert** gegen $p \in M$, wenn

   $$\forall \varepsilon \in (0, \infty) \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : m > n \Rightarrow \delta(p, p_m) < \varepsilon.$$

   Wir schreiben $p = \lim_{n\to\infty} p_n$ oder $p = \lim p_n$.

Abbildungen zwischen metrischen Räumen

1. Definition: $\varphi\colon M \to N$ ist **steitg** wenn $\lim \varphi(p_n) = \varphi(\lim p_n)$. $C(M, N)$ ist die Menge aller stetigen Abbildungen.
2. Definition: Eine stetige Bijektion mit steiger inversen Abbildung ist ein **Homöomorphismus**.
3. Eine mit Metriken vertragliche Abbildung ist eine **Isometrie**.
4. Bemerkung: Isometrien sind stets injektiv.

Beispiele metrischer Räume

1. Beispiel: Die **diskrete Metrik** auf einer beliebigen Menge M:
$$\delta(p,q) := \begin{cases} 1 & p \neq q \\ 0 & p = q. \end{cases}$$
Jede Funktion auf einem diskreten Raum ist stetig.
2. Beispiel: $M = \mathbb{R}^n$ mit dem Euklidischen Abstand als Metrik.
3. Beispiel: $M = C([0,1],\mathbb{R})$ mit
$$\delta(p,q) := \int_0^1 |p(t) - q(t)| dt.$$
4. Übung 1.1: Gib zwei Metriken auf $\{1,2,3,4,5\}$ an.

Topologische Räume

1. Bemerkung: Wir nehmen zuviel an. Dies vernebelt die Sinne.
2. Defintiion: Eine **Topologie** ist eine Menge $T \subseteq P(M)$ mit
   1. $\emptyset \in T, M \in T$,
   2. $\forall S \subseteq T : \bigcup_{U \in S} U \in T$
   3. $\forall U, V \in T : U \cap V \in T$.

   (M, T) ist ein **(topologischer) Raum**, $U \in T$ eine **offene** und $M \setminus U$ eine **abgeschlossene** Teilmenge.
3. Satz: Sei (M, δ) ein metrischer Raum. Dann ist

$$\{U \subseteq M \mid \forall p \in U \exists \varepsilon \in (0, \infty) \forall q \in U : \delta(p, q) < \varepsilon \Rightarrow q \in U\}$$

eine Topologie auf M.

Konvergenz, Stetigkeit, Umgebungsbegriff

1. Definition: $\{p_n\}$ **konvergiert** gegen p wenn
$$\forall U \in T \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : m > n \wedge p \in U \Rightarrow p_m \in U.$$
2. Definition: $\varphi\colon M \to N$ ist **stetig**, wenn das Urbild $\varphi^{-1}(U) \subseteq M$ einer offenen Menge $U \subseteq N$ offen ist.
3. Definition: $U \subseteq M$ ist eine **Umgebung** von $p \in M$, wenn
$$\exists V \in T : p \in V, V \subseteq U.$$
4. Übung 1.2: Zeige, dass die neuen Definition von Konvergenz und Stetigkeit die alten (in metrischen Räumen) verallgemeinern.
5. Übung 1.3: Entwickle eine axiomatische Definition eines topologischen Raumes als Menge mit einem Umgebungsbegriff.

Beispiele topologischer Räume

1. Beispiel: $M = \mathbb{R} \cup \{\hat{0}\}$ - es gibt eine zweite Kopie der Null. T enthält alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$ bzgl. der "normalen" Topologie, plus je zwei Kopien U', U'' derjenigen, die 0 enthalten. In U' wird $\hat{0}$ hinzugenommen, in U'' anschliessend 0 weggelassen,
$$(-4, \infty)' = (-4, \infty) \cup \{\hat{0}\}, \quad (-2, 1)'' = (-2, 0) \cup \{\hat{0}\} \cup (0, 1).$$
2. Variation: T enthält alle offenen Mengen im $\mathbb{R}$, und diejenigen, die 0 enthalten, erhalten noch $\hat{0}$ als Dreingabe.
3. Beispiel: $U \subseteq \mathbb{R}$ offen $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus U$ abzählbar oder $U = \emptyset$.
4. Übung 1.4: Das Inverse einer bijektiven stetigen Abbildung ist nicht notwendigerweise stetig.

Hausorffräume

1. Definition: M ist **Hausdorff**, wenn
$$\forall p, q \in M \exists U, V \in T : p \neq q \Rightarrow p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset.$$
2. Satz: Jeder metrische Raum ist Hausdorff.
3. Beispiel: Die reellen Geraden mit der doppelten Null $\hat{0}$ sind beide nicht Hausdorff.

Basen, 2. Abzählbarkeitsaxiom

1. Definition: $B \subseteq T$ ist eine **Basis** (nicht mit linearer Algebra verwechseln!) wenn jede offene Menge Vereinugung von Mengen in B ist. T erfülltt das **2. Abzählbarkeitsaxiom**, wenn T eine abzählbare Basis enthäalt.
2. Beispiel: Die offenen Kugeln mit rationalem Radius und Mittelpunkt in $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ bilden eine Basis der Euklidischen Topologie im $\mathbb{R}^n$.

Ableitung, Glattheit, Koordinaten $\rightsquigarrow$ Mannigfaltigkeiten (VL 2)

Worum gehts?

1. Frage: Welche Struktur auf einer Menge erlaubt es uns, die Ableitung einer Funktion in einem Punkt zu definieren?
2. Antwort: Lokal um den Punkt muss die Menge wie eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ aussehen, d.h. durch reellwertige Koordinaten konsistent beschreibbar sein (Kernidee Riemann 1854).
3. Für die Definition der Ableitung selbst werden wir dann erst noch ¨ber den Begriff der Richtung nachdenken müssen.

Karten und Atlanten

1. Definition: Eine **Karte** (oder ein **lokales Koordinatensystem**) auf einer Menge M ist eine injektive Abbildung $\kappa\colon U = U_\kappa \to \mathbb{R}^n$, wobei $U \subseteq M$ eine Teilmenge und $\kappa(U)$ offen ist. $\dim \kappa := n$.
2. Notation: $\kappa(p) = (\kappa^1(p), \ldots, \kappa^n(p)) = (p^1, \ldots, p^n)$ wenn κ klar.
3. Definition: Ein C^k-**Atlas** ist eine Menge K von Karten mit
   1. $M = \bigcup_{\kappa \in K} U_\kappa$ und $\forall \kappa, \iota \in K$ gilt
   2. $\dim \kappa = \dim \iota =: \dim K$,
   3. $\kappa(U_\kappa \cap U_\iota)$ ist offen,
   4. $\kappa \circ \iota^{-1}\colon \iota(U_\kappa \cap U_\iota) \to \kappa(U_\kappa \cap U_\iota)$ ist C^k (k-fach stetig differenzierbar).

   Man nennt $\kappa \circ \iota^{-1}$ einen **Kartenwechsel**.
4. Definition: Atlas $:=$ C^∞-Atlas.

Die assoziierte Topologie

1. Definition: $V \subseteq M$ offen $\Leftrightarrow \kappa(V \cap U_\kappa)$ offen $\forall \kappa \in K$.
2. Übung 1.5: Dies definiert eine Topologie auf M.
3. Bemerkung: Oft hat M schon eine Topologie, ist z.B. eine Teilmenge eines $\mathbb{R}^m$, $m > n$, und man sucht einen damit verträglichen Atlas.
4. Definition: K Hausdorff $\Leftrightarrow$ die assoziierte Topologie auf M ists.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit

1. Definition: $K \sim I \Leftrightarrow K \cup I$ ist Atlas.
2. Definiton: Eine **differenzierbare Struktur** auf M ist eine Äquivalenzklasse von Atlanten.
3. Definition: Eine **(glatte) Mannigfaltigkeit** ist eine Menge M mit einer differenzierbaren Struktur, die durch einen abzählbaren Hausdorffschen Atlas $K = \{\kappa_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ repräsentiert werden kann.
4. Definiton: Wir schreiben $U_i := U_{\kappa_i}$.
5. Bemerkung: Analog definiert man C^k-Mannigfaltigkeiten und für $k = 0$ topologische Mannigfaltigkeiten, brauchen wir aber nicht.

Das Beispiel

1. Definition: Die n-**Sphäre** ist

$$S^n := \{p = (p^0, p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 := \sum_{i=0}^{n} (p^i)^2 = 1\}.$$

2. Definition: Sei $U_0 := S^n \setminus (1, 0, \dots, 0)$. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to U_0, \quad (q^1, \dots, q^n) \mapsto \frac{1}{1 + \|q\|^2}(-1 + \|q\|^2, 2q)$$

ist bijektiv. Die Inverse ist die **stereographische Projektion**

$$(p^0, \dots, p^n) \mapsto \frac{1}{1 - p^0}(p^1, \dots, p^n).$$

Das Beispiel - Fortsetzung

1. Übung 1.6: Die stereographische Projektion definiert eine Karte auf fast ganz S^n, nur der Nordpol fehlt. Durch die analoge Abbildung mit einem Minus vorm p^0 erhalten wir eine Karte, die nur den Südpol ausspart. Zusammen bilden diese einen Atlas.
2. Bemerkung: Oft ist ein dazu äquivalenter Atlas aus $2(n+1)$ Karten viel einfacher zu bedienen:

$$\kappa_{2i}(p) = \kappa_{2i+1}(p) = (p^0, \ldots, \widehat{p^i}, \ldots, p^n)$$

mit

$$U_{2i} := \{p \in S^n \mid p^i > 0\}, \quad U_{2i+1} := \{p \in S^n \mid p^i < 0\}.$$

Der reelle projektive Raum

1. Definiton: Der n-**dimensionale reelle projektive Raum** $\mathbb{R}P^n$ ist die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume im $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Definition: Betrachte die surjektive Abbildung

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \to \mathbb{R}P^n, \quad p \mapsto \mathbb{R}p =: [p^0 : \ldots : p^n].$$

   Die p^i sind die **homogenen Koordinaten** auf $\mathbb{R}P^n$.
3. Bemerkung: Dies ist noch keine Karte, insbesondere gilt

$$\begin{aligned} & [p^0 : \ldots : p^n] = [q^0 : \ldots : q^n] \\ \Leftrightarrow\ & \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 : [\lambda p^0 : \ldots : \lambda p^n] = [q^0 : \ldots : q^n] \end{aligned}$$

Ein Atlas auf $\mathbb{R}P^n$

1. Satz: Sei $U_i := \{[p^0 : \ldots : p^n] \in \mathbb{R}P^n \mid p^i \neq 0\}$ und definiere

$$\kappa_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n, \quad [p^0 : \ldots : p^n] \mapsto \frac{1}{p^i}(p^0, \ldots, \widehat{p^i}, \ldots, p^n).$$

   Dann ist $\{\kappa_i\}$ ein Atlas auf $\mathbb{R}P^n$.
2. Bemerkung: Analog definiert man $\mathbb{C}P^n$ und kann diesen mit Karten nach $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ als $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit beschreiben. Die Kartenwechsel sind sogar holomorph, $\mathbb{C}P^n$ ist eine **komplexe Mannigfaltigkeit** der komplexen Dimension n. Mehr noch, sie sind polynomial, projektive Räume sind **algebraische Varietäten**.
3. Bemerkung: $[x : y] = [\lambda x : \lambda^{-1} y]$ wäre auch spannend.

Glatte Abbildungen, Diffeomorphismen

1. Definition: Seien M, N Mannigfaltigkeiten und $\{\kappa_i\}, \{\iota_j\}$ Atlanten. $\varphi\colon M \to N$ ist **glatt** $\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N} : \iota_j \circ \varphi \circ \kappa_i^{-1}$ ist glatt.
2. Bemerkung: Die Definition ist unabängig von der Wahl des Atlas.
3. Definition: Die Menge aller glatten Abbildngen wird mit $C^\infty(M, N)$ bezeichnet; $C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ (**glatte Funktionen auf** M).
4. Definiton: Ein **Diffeomorphismus** ist eine glatte bijektive Abbildung mit glatter Inversen.
5. Übung 2.1,2.2: Sind M, N Mannigfaltigketen, so wird $M \times N$ kanonisch eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim M + \dim N$. Ist

$$\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^2, \quad ([x:y],[z:t]) \mapsto [xz : xt + yz : yt]$$

glatt?

Mannigfaltigkeiten als Raum mit lokaler algebraischer Struktur
$\rightsquigarrow$ Die Garbe $C^\infty(-)$ (VL 3)

Worum gehts?

1. Idee: Die differenzierbare Struktur kann äquivalent durch die Algebren der glatten Funktionen über beliebigen offenen Mengen $U \subseteq M$ angegeben werden.
2. Vorteil: Konzeptionell eleganter Zugang, der einen auf die komplexe bzw. algebraische Geometrie vorbereitet.
3. Aber: Hier nur als Ausblick erwähnt, damit ihr die auftretenden Begriffe mal gehört habt und euch nciht wundert, dass Mannigfaltigkeiten in manchen Büchern anders definiert werden.

Algebren

1. Bemerkung: Bei mir sind Ringe immer assoziativ und unital (enthalten ein neutrales Element 1 bzgl. der Multiplikation), und Ringhomomorphismen bilden 1 auf 1 ab.
2. Definition: Ein Ring A ist **kommutativ** wenn alle Elemente **kommutieren**, $\forall a, b \in A : ab = ba$.
3. Definition: Eine **Algebra** über einem kommutative Ring $\mathbb{K}$ iat ein Ringhomomorphismus $\eta \colon \mathbb{K} \to A$, dessen Bild im **Zentrum**

$$Z(A) := \{a \in A \mid \forall b \in A : ab = ba\}$$

von A enthalten ist.

Alternative Definition einer Algebra

1. Definition: Eine Algebra ist ein $\mathbb{K}$-Modul A, der gleichzeitig ein Ring ist mit der gleichen unterliegenden abelschen Gruppe, und dessen Multiplikation $A \times A \to A$ eine bilineare Abbildung ist.
2. $\Rightarrow$: Definiere die Skalarmullitplikation als Produkt $\lambda a := \eta(\lambda)a$.
3. $\Leftarrow$: Definiere $\eta(\lambda) := \lambda 1$, wobei 1 das Einselement in A ist.
4. Beispiel: $A = \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$.
5. Beispiel: $A = M_n(\mathbb{K})$.
6. Beispiel: $A = \mathbb{C}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$.
7. Beispiel: $A = C^\infty(M), \mathbb{K} = \mathbb{R}$.
8. Definition: Ein Morphismus von Algebren ist ein linearer Ringhomomorphismus.

Garben

1. Definition: Eine **Prägarbe** F von Algebren auf einem Raum M weist offenen Mengen $U \subseteq M$ Algebren $F(U)$ zu, und Inklusionen $U \subseteq V$ Morphismen von Algebren $\rho_{V,U} \colon F(V) \to F(U)$ mit $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{F(U)}$ und $\rho_{V,U} \circ \rho_{W,V} = \rho_{W,U}$.
2. Definition: F ist eine **Garbe**, falls für alle $\{U_i\}$ offen und $f_i \in F(U_i)$ mit $\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(f_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(f_j)$ genau ein $f \in F(U)$, $U := \bigcup_i U_i$, mit $f_j = \rho_{U,U_j}(f)$ existiert.
3. Beispiel: $F(U)$ Menge aller Funktionen $U \to \mathbb{R}$, $\rho_{V,U}(f) = f|_U$.
4. Beispiel: $F(U) =$ holomorphe Funktionen $U \to \mathbb{C}$ auf einer komplexen Mfk. Ist M kompakt (z.B. $\mathbb{C}P^n$), so sind auf ganz M holomorphe Funktionen konstant, $\rho_{V,U}$ ist also i.A. nicht surjektiv.

Die Garbe der glatten Funktionen

1. Definition: Die Abbildung $U \mapsto C^\infty(U)$, die einer offenen Teilmenge die Algebra der glatten Funktionen auf $U \subseteq M$ zuweist ist die **Garbe der glatten Funktionen auf** M.
2. Bemerkung: Eine differenzierbare Struktur kann auch als Garbe von Algebren über $\mathbb{R}$ definiert werden, die
   1. eine Untergarbe $C^\infty(-)$ der Garbe aller Funktionen ist,
   2. für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte κ auf einer offenen Umgebung U mit Koordinatenfunktionen aus $C^\infty(U)$ hergibt und
   3. dann genau die Funktionen enthält, die über jede solche Karte glatte Funktionen auf $\kappa(U)$ definieren.

   Siehe z.B. [Va] für Details.

Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow$ Implizite Funktionen, Whitney, Nash-Tognoli (VL 3,4)

Worum gehts?

1. Frage: Wie erkennen wir $M \subseteq \mathbb{R}^m$ als Mannigfaltigekeit, ohne Karten explizit hinzufummeln?
2. Eine Antwort: In vielen Fällen ist M durch definierende Gleichungen gegeben, und der Satz über implizite Funktionen liefert ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Karten.
3. Satz (Whitney): Jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit kann als Untermannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^{2n}$ eingebettet werden.
4. Satz (Nash-Tognoli): Jede Mannigfaltigkeit kann durch endlich viele polynomiale Gleichungen in einem $\mathbb{R}^m$ realisiert werden, besitzt also ein Upgrade zu einer **reellen affinen Varietät**.

Der Satz über implizite Funktionen (Diffgeoversion)

1. Satz: Seien $f^1, \ldots, f^k \in \mathbb{C}^\infty(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und

$$M := \{p \in U \mid \forall i : f^i(p) = 0\}.$$

Ist das Differential $D_p\varphi$ der glatten Abbildung

$$\varphi \colon U \to \mathbb{R}^k, \quad \varphi(p) = (f^1(p), \ldots, f^k(p))$$

in jedem $p \in M$ surjektiv, so existiert auf M die Struktur einer $m-k$-dimensionalen Mannigfalt, bzgl. welcher die identische Einbettung $M \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung ist.

Beweis von Satz 36.1

1. Erinnerung: Das Differential von φ in p ist eine lineare Abbildung
$$D_p\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$
mit
$$\lim_{h\to 0} D_p\varphi(h) - \frac{\varphi(p+h)-\varphi(p)}{\|h\|} = 0.$$
2. Erinnerung: Bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^m$ ist diese lineare Abbildung durch die **Jacobimatrix** mit Einträgen
$$\frac{\partial f^i}{\partial p^j}(p), \quad 1 \le i \le k, 1 \le j \le m$$
dargestellt.

Beweis von Satz 36.1

1. Erinnerung: $D_p\varphi$ surjektiv heisst, dass die darstellende Matrix den maximalen Rang k hat.
2. Folgerung: OBdA (wenn nötig, permutiere die Koordinaten) ist die $k \times k$-Matrix mit Einträgen
$$\frac{\partial f^i}{\partial p^j}(p), \quad 1 \leq i, j \leq k$$
invertierbar.
3. Folgerung: Definieren wir
$$\kappa \colon U \to \mathbb{R}^m, \quad p \mapsto (f^1(p), \dots, f^k(p), p^{k+1}, \dots, p^m),$$
so ist $D_p\kappa$ invertierbar (stellt euch eine Blockmatrix vor).

Beweis von Satz 36.1

1. Folgerung: Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren offene Umgebungen V von p und $W = \kappa(V)$ von $\kappa(p)$, so dass κ einen Diffeomorphismus $V \to W$ definiert.
2. Beobachtung: Die im topologischen Unterraum $M \subseteq \mathbb{R}^m$ per definitionem offene Menge $V \cap M$ wird durch κ bijektiv auf eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{m-k} \subseteq \mathbb{R}^m$ abgebildet,

$$\mathbb{R}^{m-k} = \{q \in \mathbb{R}^m \mid q^1 = \ldots = q^k = 0\}$$

3. Folgerung: κ definiert eine Karte auf $V \cap M$ mit Bild $W \cap \mathbb{R}^{m-k}$.
4. Zuguterletzt: Die Glattheit eines Kartenwechsels von V_i zu V_j folgt aus der Glattheit von κ, κ^{-1}.

Das Beispiel - schon wieder

1. Beispiel: Die n-Sphäre S^n ist durch eine definierende Gleichung

$$f = \sum_i (p^i)^2 = 0$$

gegeben, und es gilt $D_p f(h) = \langle \mathrm{grad}_p f, h\rangle = 2\langle p, h\rangle$, wobei $\langle -, -\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Dessen Nichtausgeartetheit impliziert die Surjektivität von $D_p f$, und Satz 36.1 reproduziert die differenzierbare Struktur auf S^n.

2. Bemerkung: Für $n \neq 1, 2, 3, 5, 6, 12$ existieren **exotische Sphären**, die homöo- aber nicht diffeomorph zur S^n mit der "normalen" differenzierbaren Struktur sind (Milnor 1956, Milnor-Kervaire 1963).

Die orthogonale Gruppe

1. Definition: Wir bezeichnen mit
$$S_m(\mathbb{R}) = \{p \in M_m(\mathbb{R}) \mid p^T = p\}$$
den Vektorraum der **symmetrischen** $m \times m$-**Matrizen**.
2. Beispiel: Betrachte die **orthogonale Gruppe**
$$O(m) = O(m, \mathbb{R}) := \{p \in M_m(\mathbb{R}) \mid pp^T = 1\}$$
als Nullstellenmenge von
$$\varphi\colon M_m(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m^2} \to S_m(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m(m+1)/2}, \quad p \mapsto pp^T - 1.$$

Die orthogonale Gruppe

1. Dann gilt
$$D_p\varphi(h) = hp^T + ph^T.$$
Insbesondere gilt für $h = sp/2$, $s \in S_m(\mathbb{R})$,
$$D_p\varphi(h) = s,$$
also ist $D_p\varphi$ surjektiv, und $O(m)$ wird zu einer $m(m-1)/2$-dimensionalen Mannigfaltigkeit.
2. Übung 2.3: $O(m)$ wird dadurch zu einer **Liegruppe**, d.h. einer Gruppe G, die gleichzeitig Mannigfaltigkeit ist, und die Abbildung
$$G \times G \to G, \quad (p, q) \mapsto pq^{-1}$$
ist glatt.

Singuläre Varietäten

1. Betrachte die ebene kubische Kurve
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = x^2 - y^3 = 0\}.$$
Es gilt $D_{(0,0)}f = 0$, der Satz zieht also nicht. Und in der Tat ist M in $(0,0)$ nicht glatt (M ist eine **singuläre** affine Varietät).
2. Bemerkung: $\mathbb{R} \to M$, $t \mapsto (t^3, t^2)$ ist ein Homöomorphismus, die **Normalisierung** von M. Der topologische Raum M kann also sehr wohl mit einer differenzierbaren Struktur ausgestattet werden, nur taugt seine Einbettung in den $\mathbb{R}^2$ dafür nicht.
3. Übung 2.4: Kann der Satz auf die durch $f(x,y) = x^2 + x^3 - y^2$ definierte ebene Kurve angewendet werden?

Einbettbarkeit

1. Satz (Whitney 1936): Jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit kann in den $\mathbb{R}^{2n}$ eingebttet werden.
2. Satz (Nash 1952, Tognoli 1976): Jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit kann als reelle affinen Varietät in den $\mathbb{R}^{2n+2}$ eingebettet werden.
3. Bemerkung: Nichtisomorphe Varietäten können als Mannigfaltigkeiten diffeomorph sein.
4. Bemerkung: $f^1(p) = \ldots = f^k(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = 0$ mit $f := \sum_{i=1}^k (f^i)^2$, es reicht also immer eine einzige Gleichung.
5. Vorgriff: Aus Satz 36.1 folgt, dass das **Tangentialbündel** von M **stabil trivial** ist. Insbesondere ist M **orientierbar** und **spin**.

Ein Beispiel: $\mathbb{R}P^2 \subseteq \mathbb{R}^6$

1. Beispiel: Repräsentiere $p \in \mathbb{R}P^2$ als $[x : y : z]$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und definiere eine Einbettung $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^6$ durch

$$[x : y : z] \mapsto (xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2) =: p.$$

Das Bild ist eine reelle affine Varietät mit definierenden Gleichungen

$$p^1 p^2 = p^3 p^4, \quad p^1 p^3 = p^2 p^5, \quad p^2 p^3 = p^1 p^6,$$

$$(p^1)^2 = p^4 p^5, \quad (p^2)^2 = p^4 p^6, \quad (p^3)^2 = p^5 p^6, \quad p^4 + p^5 + p^6 = 1.$$

2. Bemerkung: $[x : y : z] \mapsto (xy, xz, yz, x^2 - y^2)$ definiert eine Einbettung des $\mathbb{R}P^2$ in den $\mathbb{R}^4$. In den $\mathbb{R}^3$ passt $\mathbb{R}P^2$ aber nicht, z.B. da er nicht orientierbar ist.

Kurven, Richutngen, Ableitungen

$\rightsquigarrow T_p^{(*)}M$

Worum gehts?

1. Frage: Wie definieren wir eine Richtung auf einer Mannigfaltigekeit und die Ableitung einer glatten Funtion in dieser Richtung?
2. Antwort: Tangentialraum und Differential als Linearisierung einer Mannigfaltigkeit bzw. glatten Abbildung in einem Punkt.
3. Geometrische Definition für eingebettete Mannigfaltigkeiten naheliegend, wir werden aber drei intrinsische Zugänge durchkauen. Der erste ist abstrakt, aber direkt und hilfreich in Beweisen.
4. Philosophie: Studiere M (Punkte, Zustände, Ereignisse) durch Abbildungen $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ (Kurven, Trajektorien, Weltlinien) und $f\colon M \to \mathbb{R}$ (Funktionen, Observablen, Koordinaten). Definiere ein Differential von f und eine Richtung von γ als Äquivalenzklasse mit Bezug auf die Ableitung von $f \circ \gamma$.

Partielle Ableitungen

1. Bemerkung: Wenn nichts dazugesagt wird, ist M fur den Rest der Vorlesung eine glatte Mannigfaltigkeit.
2. Definition: Eine **Kurve durch** $p \in M$ ist eine glatte Abbildung
$$\gamma \colon (x, y) \to M, \quad x < 0 < y, \quad \gamma(0) = p.$$
3. Definition: Sei $U \subseteq M$ offen. Die **partielle Ableitung** von $f \in C^\infty(U)$ in $p \in U$ in Richtung von γ ist
$$\partial_\gamma f(p) := (f \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}.$$
4. Bemerkung: Die Rollen von f, γ sind völlig symmetrisch.

Der Tangentialraum und der Kotangentialraum

1. Definition: Identifiziere Kurven mit gleicher partieller Ableitung,

$$\gamma \sim \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \partial_\beta f(p) = \partial_\gamma f(p) \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

analog $f \sim g$ für $f, g \in C^\infty(M)$. Die Menge der Äquivalenzklassen

$$d_p f := [f]$$

(**Differential von** f **in** p) ist der **Kotangentialraum** $T_p^* M$, die der Klassen (**Tangentialvektor** oder **Richtung von** γ **in** p)

$$\dot\gamma(0) = \gamma'(0) = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} := [\gamma]$$

ist der **Tangentialraum** $T_p M$.

Vektorraumstruktur von $T_p^{(*)}M$

1. Bemerkung: $T_p^*M = C^\infty(M)/\sim$ ist kanonisch ein Vektorraum, denn $[0] \subseteq C^\infty(M)$ (glatte Funktionen mit verschwindenden partiellen Abl.) ist ein Untervektorraum, und $f \sim g \Leftrightarrow f - g \sim 0$..
2. Bemerkung: T_pM ist kanonisch ein Untervektorraum des Dualraums von T_p^*M vermöge der Einbettung

$$\varphi\colon T_pM \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p^*M, \mathbb{R}), \quad \varphi([\gamma])([f]) := \partial_\gamma f(p).$$

3. Bemerkung: Wir werden noch zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist.
4. Notation: $d_pf(v) := \partial_v f$, $v \in T_pM$.
5. Bemerkung: $d_p\colon C^\infty(M) \to T_p^*M$ ist eine lineare Abbildung.
6. Übung 2.5: Setze $\alpha(t) := \gamma(t^2)$. Ist $[\alpha] = 2[\gamma]$?

Lokalität von T_p^*M

$\rightsquigarrow T_p^*M \cong T_p^*U$

Worum gehts?

1. Ziel: Wir zeigen, dass der Tagential- und der Kotangentialraum in einem Punkt p durch beliebige offene Umgebungen U definiert wird.
2. Werkzeug: Es existieren glatte Funktionen, die um p konstant 1 sind, aber noch innerhalb von U konstant 0 werden.

Lokalität

1. Bemerkung: Auch $f \in C^\infty(U)$, $U \subseteq M$ offen, definiert ein Differential $d_p f$, $p \in U$, welches mit $[\gamma] \in T_p M$ paart.
2. Satz: Es existiert $b \in C^\infty(U)$ und $W \subseteq V \subseteq U$ offen mit $p \in W$, $b|_{U \setminus V} = 0$, $b|_W = 1$ ("**bump function**"). Insbesondere ist $fb|_W = f|_W$, sprich $d_p f = d_p(fb)$, und fb kann trivial zu einer glatten Funktion auf ganz M fortgesetzt werden. Umgekehrt ist $d_p g = d_p gb$ für $g \in C^\infty(M)$, und gb entsteht durch triviale Fortsetzung aus $gb|_U \in C^\infty(U)$.
3. Beweis: ObdA ist U eine Karte (= ein Kartengebiet, unterscheiden wir nicht mehr so genau). Nun siehe Lemma 54.1 unten.
4. Korollar: $C^\infty(U) \to T_p^* M$, $f \mapsto d_p f$ ist ein Isomorphismus.
5. Achtung: Heisst nicht, dass $\rho_{M,U} \colon C^\infty(M) \to C^\infty(U)$ surjektiv ist!

Existenz von bump functions

1. Lemma: Sei $\varepsilon > 0$ und $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$g(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0, \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$h(t) := \frac{g(t+2)g(2-t)}{(g(t+2)+g(-1-t))(g(2-t)+g(t-1))}$$

$$b(p^1, \ldots, p^n) := h(\varepsilon^{-1}p^1) \cdots h(\varepsilon^{-1}p^n)$$

gegeben. Dann ist $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $b(p) = 1$ für $\|p\| < \varepsilon$ und $b(p) = 0$ für $\|p\| > 2\sqrt{n}\varepsilon$.

Übergang zu einer Karte

$$\rightsquigarrow T_p^* U \cong T_{\kappa(p)}^* \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n, \; T_p M \cong T_{\kappa(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

Worum gehts?

1. Ziel: Wählen wir U (vom letzten Abschnitt) als Kartengebiet, erhalten wir Isomorphismen $T_p^*U \cong T_{\kappa(p)}^*\mathbb{R}^n$ und $T_pM \cong T_{\kappa(p)}\mathbb{R}^n$.
2. Anschliessend machen wir uns klar, dass in der Analysis schon $T_{\kappa(p)}\mathbb{R}^n \cong T_{\kappa(p)}^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ gezeigt wurde.

Übergang zu einer Karte

1. Satz: Ist $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte, so induziert diese Isomorphismen von Algebren bzw. Vektorräumen

$$C^\infty(U) \to C^\infty(\kappa(U)), \quad f \mapsto f \circ \kappa^{-1},$$

$$T_p^* M \to T_{\kappa(p)}^* \mathbb{R}^n, \quad d_p f \mapsto d_{\kappa(p)}(f \circ \kappa^{-1}),$$
$$T_p M \to T_{\kappa(p)} \mathbb{R}^n, \quad [\gamma] \mapsto [\kappa \circ \gamma].$$

2. Beweis: $f \circ \gamma = (f \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \gamma)$.
3. Bemerkung: Später wird der letzte Isomorphismus mit $D_p\kappa = (\kappa_*)_p$ bezeichnet werden und der davor mit $(\kappa^*)^{-1} = (\kappa^{-1})^*$.

$T_q^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

1. Satz: Sei $M = \mathbb{R}^n$, $p^i \in C^\infty(M)$ die i-te Standardkoordinate. Dann ist $\{d_q p^1, \ldots, d_q p^n\}$ eine Vektorraumbasis des $T_q^* M$, und es gilt

$$d_q f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p^i}(q) d_q p^i,$$

2. Sprich: Die Notation $d_q f$ ist mit der aus der Analysis kompatibel.
3. Bemerkung: Wir lassen in Gleichungen wie oben in Zukunft immer häufiger das $\sum_{i=1}^n$ weg. Sobald ein Index doppelt auftritt, einmal oben, einmal unten (kryptisch, ich weiss) wird über diesen summiert (**Ricci-Kalkül, Einsteinsche Summenkonvention**).

Beweis von Satz 58.1

1. Erzeugend: Die Formel wurde in der Analysis bewiesen, wir reden jetzt einfach von der Richtungsableitung einer Funktion auf $\mathbb{R}^n$.
2. Linear unabhängig: Betrachte die Paarung mit der Kurve

$$\gamma_j(t) := q + te_j,$$

wobei e_j der j-te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^n$ ist. Dann gilt

$$d_q p^i([\gamma_j]) = \delta^i_j.$$

$T_q\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

1. Satz: Die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^n \to T_q\mathbb{R}^n$, $v \mapsto [\gamma]$, $\gamma(t) = q + tv$ ist ein (kanonischer) Isomorphismus von Vektorräumen.
2. Beweis: Folgt aus (dem Beweis von) Satz 58.1. Dieser sagt uns $\dim T_q^*\mathbb{R}^n = n$, also gilt in Anbetracht von Bemerkung 50.2 $\dim T_q\mathbb{R}^n \leq n$, und der Beweis von Satz 58.1 liefert die n linear unabhn̈gigen $[\gamma_j]$, also gilt $=$ und diese sind eine Basis. Da ψ eine Basis auf eine Basis abbildet, ist ψ ein Isomorphismus.
3. Korollar: Für jede Mannigfaltigkeit liefert Bemerkung 50.2 einen Isomorphismus $T_pM \cong (T_p^*M)^*$.

Notation

1. Definition: Wir setzen
$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial p^i} := [\gamma_i] \in T_q\mathbb{R}^n,$$
manchmal noch mit (q) dekoriert.
2. Definition: Ist eine Karte κ auf M fest gewählt und $q = \kappa(p)$, so verwenden wir die Notation $d_p p^i, \partial_i(p) = \frac{\partial}{\partial p^i}(p)$ auch für die vermöge Satz 57.1 korrespondierenden Elemente von $T_p^{(*)}M$.

Ein Tensor ist, was sich wie einer transformiert
$\rightsquigarrow$ T_pM in Koordinaten

Worum gehts?

1. Frage: In eier Karte sieht M lokal wie $\mathbb{R}^n$ aus und $T_pM \cong \mathbb{R}^n$. Was passiert aber in einer anderen Karte?
2. Antwort: Elemente von T_pM transformieren sich wie Vektoren.
3. Bemerkung: Eigentlich wussten wir das schon, wollen uns aber klarmachen, dass der Begriff eines an M angepappten Vektors auch so intrinsisch definiert werden kann.

Ein Vektor ist, was sich wie ein Vektor transformiert

1. Satz: Seien $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^n, \iota\colon V \to \mathbb{R}^n$ zwei Karten, γ Kurve durch $p \in U \cap V$, identifiziere $T_{\kappa(p)}\mathbb{R}^n \cong T_{\iota(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ vermöge Satz 60.1 und sei $u := \kappa_*[\gamma] = [\kappa \circ \gamma], v := \iota_*[\gamma] \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$D_{\iota(p)}(\kappa \circ \iota^{-1})v = u.$$

2. Beachte: Hier ist $D_q\varphi$ das Differential des Kartenwechsels $\varphi = \kappa \circ \iota^{-1}$ wie in der Analysis.
3. Beweis: $f \circ \gamma = (f \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \gamma) = (f \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \iota^{-1}) \circ (\iota \circ \gamma)$. Hier werden drei Abbildungen $\mathbb{R}^k \supset W \to \mathbb{R}^l$ komponiert, man kann also die Kettenregel aus der Analysis anwenden.

Die Umkehrung

1. Satz: Sei $p \in M$ und für jede Karte κ um p ein Vektor $v_\kappa \in \mathbb{R}^n$ gegeben mit $D_{\iota(p)}(\kappa \circ \iota^{-1})v_\iota = v_\kappa$. Dann ist $v_\kappa = \kappa_*[\gamma]$ für ein eindeutiges $[\gamma] \in T_pM$.
2. Beweis: $\gamma(t) := \kappa^{-1}(\kappa(p) + tv_\kappa)$. Um die Eindeutigkeit zu sehen, paare mit den Differentialen der Koordinatenfunktionen der Karte.
3. Zusammenfassung: Ein Tangentialvektor kann bei Wahl einer Karte äquivalent als ein Vektor im $\mathbb{R}^n$ angegeben werden, mit einer expliziten Transformationsvorschrift, wie er sich bei einem Kartenwechsel ändert.
4. Übung 2.6: Definiere für $f \in C^\infty(M)$ und jede Karte κ eines Atlas den Vektor $v_\kappa := \mathrm{grad}_{\kappa(p)}(f \circ \kappa^{-1}) \in \mathbb{R}^n$. Ist $\{v_\kappa\} \in T_pM$?

Physikerversion: Vektoren in Koordinaten

1. Handfest: Seien $p^1, \ldots, p^n$ und $q^1, \ldots, q^n$ zwei lokale Koordinatensysteme um $r \in M$. Dann ist (Bew: leite p^k ab)

$$\frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial p^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^j}$$

Sind $(\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ also die Komponenten des Vektors $\lambda^i \frac{\partial}{\partial p^i}$ und $(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ die bzgl. der anderen Basis $\frac{\partial}{\partial q^i}$, so gilt

$$\lambda^i \frac{\partial}{\partial p^i} = \mu^j \frac{\partial}{\partial q^j} = \mu^j \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p^i} \Rightarrow \lambda^i = \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \mu^j .$$

2. Erinnerung: Einsteinsche Summenkonvention!

Keime und Derivationen

$\rightsquigarrow$ Ein algebraischer Zugang zu T_pM

Worum gehts?

1. Beobachtung: Man kann die Leibnizregel $(fg)' = f'g + fg'$ zur definierenden Eigentschaft eines Tangentialvektors machen.
2. Vorteil: Kompakte, rein algebraische Definition, die auch auf den Begriff des Vektorfeldes gut vorbereitet. Algebraische Strukturen (z.B. die Hintereinanderausführung) werden sichtbar, und man kann die Begriffe auf Situationen verallgemeinern, in denen von der geometrischen Struktur nur eine Algebra glatter Funktionen übrigbleibt (algebraische Geometrie, nichtkommutative Geometrie).
3. Bonus material: Der Halm einer Garbe.

Derivationen

1. Definition: Ein **Bimodul** über einer $\mathbb{K}$-Algebra A ist ein linker und rechter A-Modul V, dessen Wirkungen miteinander vertauschen,

$$\forall a, b \in A, v \in V : (av)b = a(vb).$$

2. Beispiel: $V = A$, beide Wirkungen durch Multiplikation.
3. Definition: Eine **Derivation** von A mit Werten in V ist eine lineare Abbildung $\partial\colon A \to V$, die die **Leibnizregel** erfüllt,

$$\forall a, b \in A\colon \partial(ab) = a\partial(b) + \partial(a)b.$$

4. Notation: $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, V)$, $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A) := \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A, A)$.

Tangentialvektoren als Derivationen

1. Satz: Sei $A = C^\infty(M)$ und $V = \mathbb{R}$ mit Auswertung in p als linke und rechte Wirkung. Dann ist V ein A-Bimodul und die Abbildung

$$[\gamma] \mapsto (f \mapsto \partial_{[\gamma]} f(p))$$

induziert eine wohldefinierte Abbildung

$$T_pM \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M), \mathbb{R}).$$

2. Beweis: Partielle Ableitungen sind Derivationen (wisst ihr aus Ana).
3. Ziel: Die Abbildung ist bijektiv.

Der Hauptsatz der Differential- un Integralrechnung

1. Lemma: $\partial \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M), \mathbb{R}), f \in C^\infty(M), d_p f = 0 \Rightarrow \partial(f) = 0.$
2. Beweis: Wähle Koordinaten $p^1, \ldots, p^n$ um p. Für q in der Karte gilt

$$f(q) = f(p) - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(q + t(p-q))dt = f(p) - g_i(q)h^i(q)$$

mit

$$g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p^i}(q + t(p-q))dt, \quad h^i(q) = (p^i(p) - p^i(q)).$$

Jetzt wende ∂ an, benutze die Leibnizregel, und den Umstand, dass $g_i(p) = h^i(p) = 0$ gilt.

Derivationen als Tangentialvektoren

1. Satz: Die Abbildung aus Satz 70.1 ist ein Isomorphismus
$$T_pM \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M), \mathbb{R}).$$
2. Beweis: Lemma 71.1 liefert uns in Verbidung mit dem 1. Isomorphiesatz eine Einbettung
$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M), \mathbb{R}) \subseteq (T_p^*M)^*.$$
Mit Korollar 60.3 erhalten wir eine Umkehrabbildung $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M), \mathbb{R}) \to (T_p^*M)^*$ der Abbildung 70.1.
3. Bemerkung: $d_p \colon C^\infty(M) \to T_p^*M$ ist eine Derivation bzgl. der durch Multiplikation mit dem Wert einer Funktion gegebenen Bimodulstruktur.

Der Halm C_p^∞

1. Definition: Der **Halm** C_p^∞ der Garbe C^∞ in $p \in M$ ist die Algenra
$$C_p^\infty := \varinjlim_{p \in U} C^\infty(U)$$
Für C^∞ heisst dies (Lemma 54.1): $C_p^\infty = C^\infty(M)/\sim$ mit
$$f \sim g :\Leftrightarrow \exists U : f|_U = g|_U.$$
Hierbei sind U, V, W natürlich offen.
2. Definition: $[f]$ ist der **Keim** von f in p.
3. Bemerkung: $\partial_{[\gamma]} f(p)$ hängt nur vom Keim $[f]$ in p ab (es geht ja um Grenzwerte von Folgen, die gegen p konvergieren), alos gilt auch $T_pM \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R})$.

Wie könnte ein Beispiel überhaupt aussehen?
$\rightsquigarrow$ T_pM für eingebettete Mannigfaltigkeiten

Worum gehts?

1. Problem: Alle drei Zugänge bieten nicht viel Möglichkeiten, um Beispiele zu disktuieren.
2. Aber: Für eine eingebttete Mannigfaltigkeit “ist” T_pM (kanonisch isomorph zu) dem Raum, den wir uns vorstellen.

Das Beispiel

1. Satz: Für $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ Sei

$$p^\perp := \{q \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, q\rangle = 0\}.$$

Für $q \in p^\perp$ definiere $\gamma_{p,q} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\gamma_{p,q}(t) = \cos(\|q\|t)p + \sin(\|q\|t)\frac{q}{\|q\|}.$$

Dann ist

$$p^\perp \to T_pS^n, \quad q \mapsto [\gamma_{p,q}]$$

ein Isomorphismus.

Beweis

1. Beweis: Beachte, dass

$$\gamma(0) = p,\ \gamma(\mathbb{R}) = S^{n+1} \cap \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{p, q\},\ \dot\gamma(0) = q,\ \|\dot\gamma(t)\| = \|q\|$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. I Insbesondere ist $\gamma_{p,q}$ eine Kurve in S^{n+1} durch p, und wenn p^i die Standardkoordinaten im $\mathbb{R}^{n+1}$ aufgefasst als galtte Funktionen auf S^{n+1}, so ist

$$d_p p^i([\gamma_{p,q}]) = q^i.$$

Die Abbildung ist also injektiv, und beide Vektorräume haben die Dimension n.

Allgemeiner

1. Satz: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^m$ durch den Satz über impizite Funktionen durch $f^1, \ldots, f^k$ gegeben, so gilt

$$T_pM \simeq \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathrm{grad}_p f^1, \ldots, \mathrm{grad}_p f^k\}^{\perp} = \ker D_p\varphi.$$

2. Beweis: Die beiden Räume haben die gleiche Dimension $m - k$. Kurven in M durch p sind auch Kurven in $\mathbb{R}^m$ durch p, man erhält eine Einbettung $T_pM \to T_p\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$. Und ist γ eine solche Kurve, so gilt

$$f^i \circ \gamma = 0 \Rightarrow d_pf^i([\gamma]) = \langle \mathrm{grad}_p f^i, [\gamma] \rangle = 0,$$

so war der Gradient definiert.

Die orthogonale Liealgebra

1. Beispiel: Sei $M = O(m)$ und $p = e$ das Einselement (die $m \times m$ Einheitsmatrix).
2. Wir hatten hier $D_p\varphi(h) = hp^T + ph^T$ gezeigt, sprich für $p = e$

$$\mathfrak{o}(m) := T_e O(m) \simeq \{h \in M_m(\mathbb{R}) \mid h^T = -h\}.$$

3. Man bezeichnet allgemeiner $T_e G$ für eine Liegruppe G mit $\mathfrak{g}$, die **Liealgebra** der Liegruppe. Wir werden zeigen, dass diese mehr Information über G enthält, als man zunächst erwarten würde.

Die Ableitung einer glatten Abbildung

$\rightsquigarrow$ Das Differential $D_p\varphi$

Worum gehts?

1. Wir definieren des Differential $D_p\varphi$ einer Abbildung $\varphi\colon M \to N$.
2. Die erlaubt es uns z.B., den Begriff einer Untermannigfaltigkeit zu defineiren und den Satz über impplizite Funktionen vom Fall $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^k$ zu verallgemeinern.

Das Differential

1. Definition: Das **Differential** von $\varphi\colon M \to N$ ist die lineare Abbildung
$$D_p\varphi\colon T_pM \to T_{\varphi(p)}N, \quad [\gamma] \mapsto [\varphi \circ \gamma].$$
2. Sind $p^1, \dots, p^m$ bzw. $q^1, \dots, q^n$ lokale Koordinaten auf M bzw. N und $f \in C^\infty(N)$, so gilt
$$d_pf((D_p\varphi)(\frac{\partial}{\partial p^i}(p))) = \frac{\partial}{\partial p^i}(f \circ \varphi)(p) = \frac{\partial \varphi^j}{\partial p^i}(p)\frac{\partial f}{\partial q^j}(\varphi(p))$$
oder
$$D_p\varphi(\frac{\partial}{\partial p^i}(p)) = \frac{\partial \varphi^j}{\partial p^i}(p)\frac{\partial}{\partial q^j}(\varphi(p)).$$

Untermannigfaltigkeiten

1. Definition: Eine (eingebettete) **Untermannigfaltigkeit** $M \subseteq N$ ist eine Mannigfaltigkeit M, die ein topologischer Unterraum einer Mannigfaltigkeit N ist, und für welche die Inklusion ι glatt ist und in allen Punkten $p \in M$ ein injektives Differential $D_p\iota$ hat.
2. (Kein) Beispiel: $\gamma\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (t^2-1, t(t^2-1))$. Das Bild hatten wir schon mal in einer Übungsaufgabe betrachtet... Hier scheitert allein die topologische Bedingung.

Nochmal der Satz über implizite Funktionen

1. Satz: Sei $\varphi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, deren Differential in jedem Punkt surjektiv ist. Dann ist $\varphi^{-1}(q)$ für jedes $q \in N$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $\dim M - \dim N$, und es gilt $T_p\varphi^{-1}(q) \simeq \ker D_p\varphi$.
2. Beweis: Kann lokal auf den ursprünglichen Satz 36.1 zurückgeführt werden, wo $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^k$ war.

Vektorfelder und 1-Formen

$\rightsquigarrow$ Das (Ko)tangentialbündel $T^{(*)}M$

Worum gehts?

1. Wir verbinden nun alle (Ko)tangentialräume zu einer Mannigfaltigkeit, dem (Ko)tangentialbündel $T^{(*)}M$.
2. Dies ist ein erstes Beispiel eines Vektorbündels, d.h. einer Mannigfaltigkeit (Totalraum des Bündels), die durch ankleben von Vektorräumen (Fasern des Bündels) an die Punkte einer Mannigfaltigkeit (Basis des Bündels) entstanden ist.
3. Ein Schnitt eines solchen Bündels wählt auf glatte Weise einen Vektor in jeder Faser aus.
4. Ein Schnitt von TM ist ein Vektorfeld auf M, einer von T^*M eine 1-Form.

Das Tangetialbündel

1. Definiton: $\bigcup_{p \in M} T_pM$ ist das **Tangentialbündel** TM von M.
2. Definition: Ist $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M um p und sind $\frac{\partial}{\partial p^1}(q), \ldots, \frac{\partial}{\partial p^n}(q)$ die Koordinatenvektoren in T_qM, $q \in U$, so ist

$$\hat{\kappa}\colon \bigcup_{q \in U} T_qM \to \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda^i \frac{\partial}{\partial p^i}(q) \mapsto (\kappa(q), \lambda^1, \ldots, \lambda^n)$$

   eine Karte auf TM.
3. Übung: Auf diese Weise definiert jeder Atlas auf M einen Atlas auf TM; TM wird dadurch eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit.
4. Bemerkung: Die Abbildung, die p auf den Nullvektor on T_pM abbildet, bettet M als Untermannigfaltigkeit in TM ein.

Faserbündel

1. Seien E, F, M Mannigfaltigkeiten.
2. Definition: Ein **Faserbündel** mit **Totalraum** E**, Faser** F und **Basis** M ist eine glatte Abbildung $\pi \colon E \to M$, so dass eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M existiert sowie Abbildungen
$$\tau_i \colon \pi^{-1}(U_i) \to F$$
so dass
$$\hat{\tau}_i \colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F, \quad p \mapsto (\pi(p), \tau_i(p))$$
ein Diffeomorphismus ist.
3. Idee: An jeden Punkt $q \in M$ ist eine Kopie von $\pi^{-1}(q) \cong F$ (die **Faser über** q) geklebt, und diese Fasern verschmelzen zu E. Die Mfk M parametrisiert also die Familie dieser Fasern.

Lokale Trivialisierungen

1. Definition: $\{U_i, \hat{\tau}_i\}$ ist eine **lokale Trivialisierung** von $\pi\colon E \to M$.
2. Bemerkung: Diese definitert **Übergangsfunktionen**

$$\gamma_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{Diff}(F), \quad \hat{\tau}_i \circ \hat{\tau}_j^{-1}(q, f) = (q, \gamma_{ij}(q)(f)).$$

3. Bemerkung: Man überlegt sich unschwer

$$\gamma_{ii}(q) = \gamma_{ij}(q)\gamma_{ji}(q) = \gamma_{ij}(q)\gamma_{jk}(q)\gamma_{ki}(q) = \mathrm{id}_F,$$

wobei im dritten Fall $q \in U_i \cap U_j \cap U_k$ liegen muss (d.h. $\{\gamma_{ij}\}$ ist ein **Čech-1-Kozykel** mit Werten in der Garbe $C^\infty(M, \mathrm{Diff}(F))$).
4. Etwas mehr Arbeit: Das Faserbündel und die lokale Trivialiserung kann aus den $\{\gamma_{ij}\}$ bis auf einen geeigneten Begriff ovn Isomorphismus rekonstruiert werden.

Mehr Struktur: Vektorbündel

1. Idee: Gib den Fasern F mehr Struktur = reduziere ihre Symmetriegruppe auf eine Untergruppe $G < \mathrm{Diff}(F)$ (die **Strukturgruppe**).
2. $F = \mathbb{K}^n$, $G = GL(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$: E ist ein **reelles** bzw. **komplexes Vektorbündel** vom **Rang** n.
3. Beispiel $E = TM$, $n = \dim M$ - die Karten $\hat{\kappa}_i$ sind linear in der Faser und somut eine lokale Trivialisierung.
4. Beispiel: Das Möbiusband unendlich ausgedehnt - hier ist $M = S^1$ und $F = \mathbb{R}$.