DIFFERENTIALGEOMETRIE II - ÜBUNGSAUFGABEN

Inhaltsverzeichnis

Blatt 1 (Abgabe 20.4.) 2
Blatt 2 (Abgabe 4.5.) 4
Blatt 3 (Abgabe 18.5.) 6
Blatt 4 (Abgabe 1.6.) 7
Blatt 5 (Abgabe 21.6.) 8
Blatt 6 (Abgabe 5.7.) 9

Die Aufgaben sollen den Stoff der VL vertiefen und Gelegenheit bieten, Mathematik zu diskutieren, zu formulieren und zu präsentieren, sowie das Problemlösen und den Umgang mit Motivation, Frustration, Deadlines usw. zu trainieren.

Beim Aufschreiben stellen Sie sich am Besten vor, Sie sind der Prof, und die Fragen sind per Email von einem Studenten gestellt, von dem Sie nicht genau wissen, was der weiß und will.

Ich schlage die Abgabe in Zweiergruppen vor.

Blatt 1 (Abgabe 20.4.)

Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\hat{E}$ der Dualraum.

Aufgabe 1. Seien $f^i, g^j \in \hat{E}, v_k \in E$. Welche der folgenden Abbildungen sind multilinear (mit Beweis)?

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = f^1(v_1) + \ldots + f^n(v_n) + g^1(v_1) + \ldots + g^n(v_n)$$
$$\beta(v_1, \ldots, v_n) = f^1(v_1) \cdots f^n(v_n) + g^1(v_1) \cdots g^n(v_n)$$
$$\gamma(v_1, \ldots, v_n) = (f^1(v_1) + g^1(v_1)) \cdots (f^n(v_n) + g^n(v_n))$$

Aufgabe 2. Für $\alpha \in \Lambda^i(E), \beta \in \Lambda^j(E)$ gilt $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$.

Aufgabe 3. $\dim \Lambda^k(E) = \begin{pmatrix} \dim E \\ k \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. $f^1, \ldots, f^k \in \hat{E}$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow f^1 \wedge \cdots \wedge f^k \neq 0$.

Zusatzaufgabe: Das Cartan-Lemma. Seien $\sigma^1, \ldots, \sigma^k \in \hat{E}$ linear unabhängig, $\mu^1, \ldots, \mu^k \in \hat{E}$ beliebig mit

$$\sum_{i=1}^k \sigma^i \wedge \mu^i = 0. \tag{1}$$

Dann existieren $a^i_j \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu^i = \sum_{j=1}^k a^i_j \sigma^j, \quad a^i_j = a^j_i. \tag{2}$$

Lösung. Wenn für $i = 1, \ldots, k$ (2) gilt, folgt

$$\sum_{i=1}^k \sigma^i \wedge \mu^i = \sum_{i,j=1}^k a^i_j \sigma^i \wedge \sigma^j = 0,$$

denn $\sigma^i \wedge \sigma^j = -\sigma^j \wedge \sigma^i$ und $a^i_j = a^j_i$, die Terme mit $i = j$ verschwinden also und die mit $i < j$ heben die mit $i > j$ weg.

Gilt umgekhrt (1), so ergänzen wir die σ^i zu einer Basis $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$, $n = \dim E$ und bezeichnen mit e_j die Vektoren der dualen Basis von E, $\sigma^i(e_j) = \delta^i_j$. Werten wir (1) auf (e_r, e_s) aus, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^k \delta^i_r \mu^i(e_s) - \delta^i_s \mu^i(e_r) = 0.$$

Sind $r, s \leq k$, ergibt dies

$$\mu^r(e_s) = \mu^s(e_r)$$

und ist $r \leq k$ aber $s > k$, ergibt sich

$$\mu^r(e_s) = 0.$$

Dahr gilt (2) mit $a^i_j := \mu^i(e_j)$ (denn $\lambda = \lambda(e_i)\sigma^i$ für jedes Funktional $\lambda \in \hat{E}$, wie man sieht, indem man beide Seiten auf e_j anwendet).

Blatt 2 (Abgabe 4.5.)

Aufgabe 1. Sei E reeller n-dimensionaler Vektorraum. Wir definieren eine $\mathbb{R}$-Algebra A mit Generatoren $x^1, \ldots, x^n$ und Relationen $x^i x^j = -x^j x^i$ für $1 \leq i, j \leq n$ (einschließlich $i = j$). In anderen Worten: $A = F/I$, wobei F die freie Algebra in den Generatoren x^i ist, also die Menge der formalen Linearkombinationen aller Wörter in den Symbolen $x^1, \ldots, x^n$ mit dem durch Verkettung definierten assoziativen Produkt und dem leeren Wort als Einselement, und I das durch die Elemente $x^i x^j + x^j x^i$ erzeugte zweiseitige Ideal. Dann gilt: $\Lambda(E) \cong A$ als $\mathbb{R}$-Algebra.

Lösung. Die Algebra F besteht aus allen Linearkombinationen von Wörtern $x^{i_1} \cdots x^{i_r}$ mit der durch Verkettung von Wörtern definierten Multiplikation. Wir wählen eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ in E.

Wir definieren eine lineare Abbildung

$$f \colon F \to \Lambda(E)$$

indem wir die Bilder der Basiselemente vorgeben,

$$f(x^{i_1} \cdots x^{i_r}) := e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}.$$

Da $f(vw) = f(v)f(w)$ für alle Basiselemente v, w von F gilt und beide Seiten der Gleichung linear in v und w sind, ist f ein Homomorphismus von Algebren. Da $e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i$ gilt, liegen die Erzeuger $x^i x^j + x^j x^i$ des Ideals I im Kern von f; da dieser selbst ein Ideal ist, gilt $I \subseteq \ker f$ und f induziert einen wohldefinierten Homomorphismus von Algebren $g \colon A = F/I \to \Lambda(E)$.

Dieser ist surjektiv, da die Basiselemente $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}$, $i_1 < \ldots < i_r$ im Bild liegen. Es genügt zu zeigen, daß $\dim A \leq 2^n = \dim \Lambda(E)$ gilt, dann folgt $\dim A = 2^n$ und g injektiv aus $\dim \ker g + \dim \operatorname{im} g = \dim A$.

Gilt in einem Wort $x^{i_1} \cdots x^{i_r}$ $i_j > i_{j+1}$ für ein j, so ist dies modulo I gleich $x^{i_1} \cdots x^{i_{j+1}} x^{i_j} \cdots x^{i_r}$, durch wiederholtes Anwenden erhalten wir also $x^{i_1} \cdots x^{i_r} = x^{k_1} \cdots x^{k_r} + y$ für ein $y \in I$ und geeignete $k_1 \leq \cdots \leq k_r$. Gilt $k_l = k_{l+1}$ für ein l, so ist $x^{k_1} \cdots x^{k_r} \in I$. Es folgt, daß die Restklassen der Wörter $x^{k_1} \cdots x^{k_r}$ mit $k_1 < \cdots < k_r$ den Raum A aufspannen, also hat dieser Dimension $\leq 2^n$.

Aufgabe 2. Beschreiben Sie einen topologischen Raum M, der alle Axiome einer Mannigfaltigkeit erfüllt bis auf die Hausdorffeigenschaft.

Aufgabe 3. Sei $M = \mathbb{R}^n$ und betrachte $f \colon M \to M$, $x \mapsto x + y$ für ein festes $y \in M$. Berechne die Tangentialabbildung (das Differential) f_*.

Aufgabe 4. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \Gamma(TM)$, und $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion. Dann gilt $[X, fY] = f[X,Y] + X[f]Y$.

Blatt 3 (Abgabe 18.5.)

Sei
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
die 2-Sphäre im 3-dimensionalen Euklidischen Raum.

Aufgabe 1. Konstruiere explizit einen aus zwei Karten bestehenden Atlas $S^2 = U_1 \cup U_2$ und eine verträgliche Zerlegung der Eins $1 = f_1 + f_2$, wobei die Funktionen f_i in den lokalen Koordinaten der Karte U_i ausgedrückt werden sollen.

Aufgabe 2. Seien X, Y die (nicht auf ganz S^2 definierten...) Vektorfelder entlang der Längen- bzw. Breitenkreise, die in jedem Punkt $p \in S^2$ die Länge 1 im umliegenden Euklidischen Raume besitzen, $\|X_p\| = \|Y_p\| = 1$ für alle $p \in S^2$. Drücke diese und ihre Lieklammer $[X, Y]$ in den Karten aus.

Aufgabe 3. Sei $\alpha = xdy, \beta = ydx \in \Lambda^1(S^2)$. Berechne
$$d\alpha(X, Y), \quad \alpha \wedge \beta(X, Y).$$
Hierbei sind x, y, z die durch Einschränkung der Koordinaten des umliegenden $\mathbb{R}^3$ auf S^2 gegebenen glatten Funktionen.

Aufgabe 4. Berechne $\int_{S^2} \alpha \wedge \beta$. Ist $\alpha \wedge \beta$ eine Orientierung?

Blatt 4 (Abgabe 1.6.)

Aufgabe 1. Betrachte die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^3$ mit den Standardkoordinaten x, y, z. Gib eine 2-Form $\alpha \in \Lambda^2(M)$ an mit $d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz$. Existiert eine 1-Form $\beta \in \Lambda^1(M)$ mit $\alpha = d\beta$?

Aufgabe 2. Betrachte die Mannigfaltigkeit $M = S^1$ und den aus vier Karten $\varphi_i \colon S^1 \supset U_i \to (-1, 1)$, $i = 1, 2, 3, 4$, bestehenden Atlas mit

$$\varphi_i^{-1}(t) = (t, (-1)^i\sqrt{1 - t^2}), \quad i = 1, 2,$$
$$\varphi_i^{-1}(t) = ((-1)^i\sqrt{1 - t^2}, t), \quad i = 3, 4.$$

Berechne

$$\int_{S^1} x dy$$

Aufgabe 3. Alernativer Zugang zu Orientlierungen: Eine Karte $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ defniert in allen T_pM mit $p \in U$ eine Orientierung (durch den Pullback der Standardvolumenform im $\mathbb{R}^n$). Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, wenn ein Atlas existiert, der alle T_pM konsistent orientiert (sprich wenn ein Punkt in mehreren Karten liegt, müssen diese alle die gleiche Orientierung auf T_pM definieren). Beweise, daß in diesem Fall eine nirgendwo verschwindende n-Form auf M existiert.

Blatt 5 (Abgabe 21.6.)

Aufgabe 1. Beweise: Die Exponentialabbildung

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$$

ist nicht surjektiv. Hinweis: Welche Werte kann $\operatorname{tr}(\exp A)$ annehmen?

Aufgabe 2. Ist γ_X die maximale Integralkurve des linksinvarianten Vektorfeldes $\bar{X}$ auf einer Liegruppe G (mit $X = \bar{X}_e \in \mathfrak{g} = T_eG$) durch $\gamma_X(0) = e$, so gilt $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei G die Liegruppe aller Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^3.$$

Beschreibe die Orbits der adjungierten und der koadjungierten Wirkung von G auf $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{g}^*$. Existiert ein unter der adjungierten Wirkung invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$?

Aufgabe 4. Betrachte die Wirkung

$$\rhd\colon SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rhd z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Zeige: Die obere Halbebene und die Metrik

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(\operatorname{Im}(z))^2}, \quad z = x + iy$$

sind unter dieser Wirkung invariant. Ist die obere Halbebene ein homogener Raum?

Blatt 6 (Abgabe 5.7.)

Viel Text zu lesen, aber am Ende ist immer nur wenig zu tun, also keine Panik! Es geht hier darum, ein Beispiel vorzubereiten, das wir in der letzten Vorlesungswoche studieren wollen.

Aufgabe 1. Der *komplexe projektive Raum* $\mathbb{C}P^n$ ist die Menge aller (komplexen) 1-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{C}^{n+1}$. Ist

$$(z_0, \dots, z_n)^T \in \mathbb{C}^{n+1}$$

ein von Null verschiedener Vektor, so bezeichnet man den durch diesen aufgespannten Unterraum mit

$$[z_0 \colon \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^n.$$

Zeige: Die Abbildungen

$$\psi_i \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}P^n, \quad (w_1, \dots, w_n) \mapsto [w_1 \colon \cdots : 1 \colon \cdots : w_n], \quad i = 0, \dots, n$$

wobei der Eintrag 1 an der i-ten Stelle ist, sind injektiv, und die Vereinigung der Bilder

$$U_i := \operatorname{im} \psi_i$$

überdeckt ganz $\mathbb{C}P^n$.

Identifiziert man $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, so sind die ψ_i ein Atlas, der $\mathbb{C}P^n$ zu einer $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit macht (sprich die Kartenwechsel sind glatt - ist nicht schwer, aber nicht mehr Teil der Aufgabe).

Aufgabe 2. Zeige, daß die Multiplikation eines Vektors in $\mathbb{C}^{n+1}$ mit einer Matrix in $SU(n+1)$ eine transitive Wirkung von $SU(n+1)$ auf $\mathbb{C}P^n$ definiert, und daß die Isotropiegruppe (der Stabilisator) eines beliebigen Punktes (z.B. der Geraden $[1 \colon 0 \colon \cdots : 0] \in \mathbb{C}P^n$ durch den ersten Standarbasisvektor) isomorph zu $U(n)$ ist.

Sprich (keine Aufgabe, nur eine Bemerkung zum Verständnis, worum es geht): Wir erhalten einen Diffeomorphismus $\mathbb{C}P^n \cong SU(n+1)/U(n)$.

Aufgabe 3. Homogene Räume $G \to G/H$ (G Liegruppe, $H \subset G$ abgeschlossene Untergruppe) sind Beispiele von Hauptfaserbündeln. Hier wollen wir dies explizit in einem Beispiel sehen: Wir betrachten die obigen Konstruktionen für $n = 1$ und erhalten die Abbildung

$$\pi \colon SU(2) \to \mathbb{C}P^1, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto [a : -\bar{b}]$$

die $SU(2)$ zum Totalraum eines $U(1)$-Hauptfaserbündels mit Basis $\mathbb{C}P^1$ macht, wobei $U(1)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} u := \begin{pmatrix} ua & \bar{u}b \\ -u\bar{b} & \bar{u}\bar{a} \end{pmatrix}$$

wirkt, d.h. durch Multiplikation von Rechts bzgl. der Einbettung

$$U(1) = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\} \to SU(2), \quad u \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}.$$

Gib über den Karten U_i, $i = 0, 1$, aus Aufgabe 1 eine lokale Trivialisierung $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times U(1)$ an.

Den Rest der Hauptfaserbündelaxiome überlege man sich kurz, aber alles hinzuschreiben scheint unnötig.

Aufgabe 4. Gib einen Zusammnhang auf dem $U(1)$-Hauptfaserbündel $SU(2) \to \mathbb{C}P^1$ an (man wähle die Definition eines Zusmmenhangs, die einem am besten gefällt).

Beachte: Wir haben in der Übung $SU(2)$ mit S^3 identifiziert. $\mathbb{C}P^1$ hingegen kann leicht mit S^2 identifiziert werden, wenn man die beiden Karten U_i mit den Standardkarten (Nord- und Südpol auslassen) identifiziert. $U(1)$ hingeben ist ein Kreis S^1. Man kann also an jeden Puhnkt der S^2 einen Kreis kleben und die disjunkte Vereinigung dieser Kreise gibt S^3. In der letzten Vorelsungswoche werden wir versuchen, uns das anschaulich zu machen.