Differentialgeometrie II
Faserbündel und Eichfeldtheorie

Ulrich Krähmer

TU Dresden

Sommersemester 2017

Basierend auf: D. Bleecker "Gauge Theory and Variational Principles', weitere Literatur H. Baum "Differentialgeometrie", H. Baum "Eichfeldtheorie", I. Agricola und T. Friedrich "Globale Analysis", K. Jänich "Vektoranalysis"

Vorgeplänkel

Differentialgeometrie I

- Grundstruktur: Mannigfaltigkeit (Analysis)
- Wirklich spannende Struktur: Metrik (Geometrie)
- Träger dieser Struktur: Tangentialraum
- Felix Klein: Denke in Symmetriegruppen!
- Beispiel: Metrik $\rightsquigarrow$ Symmetrien reduzieren sich von $GL(n)$ (Vektorraum) auf $O(n)$ (Euklidischer Raum)
- Invarianten: Krümmung
- Ziel: Allgemeinere und konzeptionellere Theorie

Eichfeldtheorie

- Vektorfeld $\rightsquigarrow$ Fermionen
- Zusammenhang $\rightsquigarrow$ Boson
- Krümmung $\rightsquigarrow$ Feldstärke
- Standardmodell $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ klassische Feldtheorie $=$ Quantenmechanik

Grober Plan

- Hauptfaserbündel: Nimm eine Mannigfaltigkeit $B \times$ Symmetriegruppe G, aber global vermurkst und verdreht (topologisch gekrümmt).
- Beispiel: $B = S^2$ und $G = U(1) = S^1$ lassen sich zu S^3 zusammenfügen (Hopffaserung)
- Assoziierte Bündel: Realisiere G durch Symmetrien einer neuen Faser F, z.B. Vektorraum
- Zusammenhang, Krümmung

0.1 Multilineare Algebra und Multilinearformen

Literatur:

- [AF] Kapitel 1
- [Jä] 3.1-3.3 Alternierende Formen, 4.2 Orientierung, 12.1 - 12.3 Metrik, Volumenform, *-Operator

Vektorräume

- E, F - Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, meist $\mathbb{R}$
- $u_1, \ldots, u_p \in E$
- $\hat{E} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ - Duaalraum; $\hat{v}^1, \ldots, \hat{v}^q \in \hat{E}$

Tensor ist die Macht des Bösen

- $T^{p,q}(E,F)$ - Vektorraum aller F-wertigen (p,q)-Tensoren auf E = multilineare Abbildungen

$$f\colon \underbrace{\hat{E}\times\cdots\times\hat{E}}_{p}\times\underbrace{E\times\cdots\times E}_{q}\to F,$$

- $u_1\otimes\cdots\otimes u_p\otimes\hat{v}^1\otimes\cdots\otimes\hat{v}^q\in T^{p,q}(E):=T^{p,q}(E,\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}&(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^p,y_1,\ldots,y_q)\\ &\quad\mapsto\hat{x}^1(u_1)\cdots\hat{x}^p(u_p)\hat{v}^1(y_1)\cdots\hat{v}^q(y_q)\in\mathbb{K}\end{aligned}$$

"elementarer Tensor" - allgemeine Tensoren sind Linearkombinationen von elementaren Tensoren

Koordinaten

- $e_1, \ldots, e_n$ - Basis in E
- $\hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n$ - duale Basis in $\hat{E}$, $\hat{e}^i(e_j) = \delta^i_j$
- $f = \sum f^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \hat{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}^{j_q}$
- Tritt ein Index in einer Formel oben und unten auf, wird summiert (Einsteinkonvention, Ricci-Kalkül).
- Bsp.: $f = \sum f_i \hat{e}^i = f_i \hat{e}^i \in \hat{E}, v = v^j e_j \in E$

$$f(v) = \sum_{i,j} f_i v^j \hat{e}^i(e_j) = f_i v^i \in \mathbb{K}$$

Sind alle Indizes gesättigt, erhält man eine von der Basis unabhängige Größe

Alternierende Tensoren

- Auch: äußere Formen oder k-Formen genannt
- $T^{0,k}(E,F) \supset \Lambda^k(E,F) :=$ alternierende (antisymmetrische) Tensoren,

$$f(u_1, \ldots, u, \ldots, u, \ldots, u_k) = 0.$$

- $\Lambda^0(E,F) = F$, $\Lambda^k(E) := \Lambda^k(E, \mathbb{K})$
- In Koordinaten: $f_{j_1 \ldots j_q}$wechselt das Vorzeichen bei jeder Vertauschung von zwei Indizes
- Achtung: Manche Autoren würden $\Lambda^k(\hat{E})$ schrieben! Auch: Unterraum vs. Quotient.

Das äußere Produkt

- $\alpha \in \Lambda^i(E), \beta \in \Lambda^j(E) \rightsquigarrow (\alpha \wedge \beta)(u_1, \ldots, u_{i+j}) :=$

$$\frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma \in S_{i+j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(i)}) \beta(u_{\sigma(i+1)}, \ldots, u_{\sigma(i+j)})$$

  mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1 =$ Signum der Permutation σ
- In Koordinaten (bedenke: $\sum$ - Einstein!):

$$(\alpha \wedge \beta)_{k_1 \ldots k_{i+j}} = \frac{1}{i!j!} \alpha_{m_1 \ldots m_i} \beta_{m_{i+1} \ldots m_{i+j}} \delta^{m_1 \ldots m_{i+j}}_{k_1 \ldots k_{i+j}}$$

$$\delta^{m_1 \ldots m_{i+j}}_{k_1 \ldots k_{i+j}} := \sum_{\sigma \in S_{i+j}} \operatorname{sgn}(\sigma) \hat{e}^{k_1}(e_{m_{\sigma(1)}}) \cdots \hat{e}^{k_{i+j}}(e_{m_{\sigma(i+j)}})$$

- $\alpha \in \Lambda^0(E) \rightsquigarrow \alpha\beta := \alpha \wedge \beta$.

Basis von $\Lambda^k(E)$

- Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
&(\hat{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}^{i_k})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \\
&= (\hat{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}^{i_k})_{j_1 \ldots j_k} \\
&= \delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} \\
&= \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma) & i_{\sigma(r)} = j_r \\ 0 & \{i_1, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_k\} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Beweis: Vollständige Induktion.
- Insbesondere setzen wir

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} := \delta^{12 \ldots n}_{i_1 \ldots i_n}$$

Die äußere Algebra

- $\Lambda(E) := \bigoplus_{k=1}^{n} \Lambda^k(E)$ ist eine unitale assoziative Algebra bzgl. $\wedge$ - "äußere Algebra von E".
- Auch hier: Mancher würde dies die äußere Algebra von $\hat{E}$ nennen und man denke über universelle Quotienten vs. universelle Unterräume nach

Metriken (Skalarprodukte)

- $g \in T^{0,2}(E)$ Metrik $:\Leftrightarrow$ symmetrisch, nichtausgeartet

$$g(u,v) = g(v,u), \quad g(u,-) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

- Sylvesterscher Trägheitssatz: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ex. eine Orthonormalbasis (ONB) $e_1, \ldots, e_n$, d.h.

$$\eta_{ij} := g(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i = j = 1, \ldots r \\ -1 & i = j = r+1, \ldots, n \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- $(-1)^g := \det(\eta_{ij})$, manche Autoren schreiben $(-1)^{ind\, g}$ (Index von g)

Basiswechsel

- $v_1, \ldots, v_n, v_i = a_i^j e_j$ - neue Basis von E
- $g_{ij} := g(v_i, v_j) = g(a_i^r e_r, a_j^s e_s) = a_i^r a_j^s \eta_{rs}$
- $\Rightarrow |g| := |\det(g_{ij})| = |\det(a_i^j)^2 (-1)^g|$
  $\Rightarrow |\det(a_i^j)| = |g|^{1/2}$ - man denke an Transformationsformel für Integrale im $\mathbb{K}^3$
- g^{ij} - Einträge der inversen Matrix
- $\omega^{i_1 \ldots i_k} := g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}$ implementiert den Isomorphismus $E \to \hat{E}, v \mapsto g(v, -)$ und den induzierten Isomorphismus $E^{\otimes n} \to \hat{E}^{\otimes n}$ in Koordinaten, der inverse Isomorphismus nutzt g_{ij} (auch als Teil des Ricci-Kalküls zu sehen)

Induzierte Metrik auf $\Lambda^k(E, F)$

- $\alpha, \beta \in \Lambda^k(E) \rightsquigarrow \tilde{g}(\alpha, \beta) := \frac{g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k}}{k!} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta_{j_1 \dots j_k}$

$$= \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta_{j_1 \dots j_k}$$

  Hier $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ mit $i_1 < \dots < i_k$, analog $\mathbf{j}$ ($\sum$ weil nicht durch alle Werte der Indizes laufen). Wir arbeiten in der Basis $v_1, \dots, v_n$ und g^{ij} sind wie oben.
- $\alpha, \beta \in \Lambda^0(E) \rightsquigarrow \tilde{g}(\alpha, \beta) := \alpha\beta$
- h Metrik auf F, $f_1, \dots, f_m$ Basis, $h_{ab} := h(f_a, f_b)$, $\alpha = \alpha^a f_a, \alpha^a \in \Lambda^k(E) \rightsquigarrow \widetilde{gh}(\alpha, \beta) := h_{ab}\tilde{g}(\alpha^a, \beta^b)$.

Volumenformen, Orientierungen

- $e_1, \ldots, e_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ Basen, $v_i = a_i^j e_j$
- Basen gleich orientiert $:\Leftrightarrow \det(a_i^j) > 0$.
- Orientierung := Wahl einer der beiden Möglichkeiten
- $\Rightarrow \hat{v}^r = b_s^r \hat{e}^s$ mit $a_j^s b_s^i = \delta_j^i$

  $$\hat{v}^1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}^n = b_{s_1}^1 \cdots b_{s_n}^n \hat{e}^{s_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}^{s_n} = \det(b_s^r)\mu$$

  mit $\mu := \hat{e}^1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}^n \in \Lambda^n(E)$
- μ Volumenform bzgl. Metrik $g :\Leftrightarrow e_1, \ldots, e_n$ ONB
- Orientierung = Wahl von μ (zwei Möglichkeiten!)
- $v_1, \ldots, v_n$ positiv orientiert $\Leftrightarrow \mu(v_1, \ldots, v_n) > 0$
- Dann $\mu = \hat{e}^1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}^n = |g|^{1/2} \hat{v}^1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}^n$

Der $*$-Operator (alias Stern-, Hodge-)

Theorem

Sei g eine Metrik auf E und μ eine Volumenform. Dann ex. ein eindeutiger Isomorphismus

$$*\colon \Lambda^k(E) \to \Lambda^{n-k}(E), \quad n := \dim E$$

für den $\alpha \wedge *\beta = \tilde{g}(\alpha, \beta)\mu$ gilt.

Beweis

- μ Basis von $\Lambda^n(E)$ (Hausaufgabe)
- $\Rightarrow \forall \alpha \in \Lambda^k(E), \gamma \in \Lambda^{n-k}(E) \exists! \delta = \delta(\alpha, \gamma) \in \mathbb{K}$:

$$\alpha \wedge \gamma = \delta \mu.$$

- $\delta(-, -)$ bilinear, nichtausgeartet (betrachte $\gamma = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}} \ldots$)

$$\Rightarrow \qquad \Lambda^{n-k}(E) \to \widehat{\Lambda^k(E)}, \quad \gamma \mapsto \delta(-, \gamma)$$

ist injektiv.

Beweis

- $\dim \Lambda^k(E) = \dim \Lambda^{n-k}(E)$ (Hausaufgabe!)

  $$\Rightarrow \qquad \Lambda^{n-k}(E) \to \widehat{\Lambda^k(E)}, \quad \gamma \mapsto \delta(-,\gamma)$$

  ist bijektiv.
- $\tilde{g}(-,\beta) \in \widehat{\Lambda^k(E)}$, also ex. $\gamma =: *\beta$ wie gefordert. $\square$

$*$ in Koordinaten

Theorem

g Metrik auf E, μ Orientierung, $v_1, \dots, v_n$ pos. orientierte Basis, $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} \hat{v}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{v}^{i_k}$. Dann

$$*\omega = |g|^{1/2} \frac{1}{k!} \omega^{j_1 \dots j_k} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \hat{v}^{j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \hat{v}^{j_n}$$

Achtung! Bleecker hat $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} \hat{v}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{v}^{i_k}$ in der Voraussetzung. Darf nicht mißverstanden werden.

Beweis

- Sei $\tilde{*}\omega$ die rechte Seite. Ziel: $\alpha \wedge \tilde{*}\beta = \tilde{g}(\alpha, \beta)\mu$.

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \tilde{*}\beta)_{i_1 \dots i_n} \\
&= \frac{1}{k!(n-k)!} \alpha_{j_1 \dots j_k} (\tilde{*}\beta)_{j_{k+1} \dots j_n} \delta^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_n} \\
&= \frac{|g|^{1/2}}{k!(n-k)!k!} \alpha_{j_1 \dots j_k} \beta^{m_1 \dots m_k} \varepsilon_{m_1 \dots m_k j_{k+1} \dots j_n} \delta^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_n} \\
&= \frac{|g|^{1/2}}{k!(n-k)!} \alpha_{j_1 \dots j_k} \beta^{j_1 \dots j_k} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \delta^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_n} \\
&= \frac{|g|^{1/2}}{k!} \alpha_{j_1 \dots j_k} \beta^{j_1 \dots j_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = (\tilde{g}(\alpha, \beta)\mu)_{i_1 \dots i_n} \square
\end{aligned}
$$

Insbesondere

Ist $e_1, \ldots, e_n$ ONB, $i_1 < \ldots < i_k$, $\omega = \hat{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}^{i_k}$, dann

$$\omega^{j_1 \cdots j_k} = \eta^{j_1 j_1} \cdots \eta^{j_k j_k} \omega_{j_1 \cdots j_k} = \eta^{j_1 j_1} \cdots \eta^{j_k j_k} \delta^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_k}$$

(keine Summe!) und $|g| = 1$, also wird

$$\begin{aligned} * \left(\hat{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}^{i_k}\right) &= |g|^{1/2} \frac{1}{k!} \omega^{j_1 \cdots j_k} \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} \hat{v}^{j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \hat{v}^{j_n} \\ &= \frac{1}{k!} \eta^{j_1 j_1} \cdots \eta^{j_k j_k} \delta^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_k} \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} \hat{e}^{j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \hat{e}^{j_n} \\ &= \eta^{i_1 i_1} \cdots \eta^{i_k i_k} \varepsilon_{i_1 \cdots i_k j_{k+1} \cdots j_n} \hat{e}^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \hat{e}^{j_n} \text{ (keine Summe!)} \end{aligned}$$

mit $j_{k+1} < \ldots < j_n$, $\{i_1, \ldots, i_k, j_{k+1}, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}$.

Dualität -fast

Theorem

$$\omega \in \Lambda^k(E) \Rightarrow * * \omega = (-1)^{k(n-k)}(-1)^g \omega$$

Beweis: Verwende "Insbesondere", $\omega = \hat{e}^{i_1} \wedge \dots \hat{e}^{i_k}$,

$$* * \omega = (-1)^g \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_{k+1} \dots j_n} \varepsilon_{j_{k+1} \dots j_n i_1 \dots i_k} \omega$$

Übungsaufgaben

Sei E endlichdimensionaler Vektorraum, $\hat{E}$ der Dualraum.

1. Seien $f^i, g^j \in \hat{E}$, $v_k \in E$. Welche der folgenden Abbildungen sind multilinear (mit Beweis)?

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = f^1(v_1) + \ldots + f^n(v_n) + g^1(v_1) + \ldots +$$
$$\beta(v_1, \ldots, v_n) = f^1(v_1) \cdots f^n(v_n) + g^1(v_1) \cdots g^n(v_n)$$
$$\gamma(v_1, \ldots, v_n) = (f^1(v_1) + g^1(v_1)) \cdots (f^n(v_n) + g^n(v_n))$$

2. Für $\alpha \in \Lambda^i(E), \beta \in \Lambda^j(E)$ gilt $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$.
3. $\dim \Lambda^k(E) = \binom{\dim E}{k}$.
4. $f^1, \ldots, f^k \in \hat{E}$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $f^1 \wedge \cdots \wedge f^k \neq 0$.

0.2 Mannigfaltigkeiten und Tensoranalysis

Literatur:

- [AF] Kapitel 2,3
- [Jä] Hier und da
- [Ba1] Kapitel 2

Mannigfaltigkeiten

- $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ als Menge
- Karte (lokales Koordinatensystem): $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ injektive Abb. mit offenem Bild
- Topologie: $V \subset M$ offen $\Leftrightarrow \varphi_i(V \cap U_i)$ offen $\forall i \in I$
- $\{\varphi_i\}$ Atlas $\Leftrightarrow \varphi_i \cap \varphi_j^{-1} \colon \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ sind C^∞ (unendlich oft stetig differenzierbar), abzählbar viele U_i überdecken M, M Hausdorffsch
- $\{U_i\}$, $\{\tilde{U}_j\}$ äquivalent $\Leftrightarrow$ Vereinigung ist auch Atlas
- Äquivalenzklasse $=:$ differenzierbare Struktur
- Mfk. $=$ Menge $+$ differenzierbare Struktur

Glatte Abbildungen

- M, N Mannigfaltigkeiten
- $f : M \to N$ glattie Abbildung $\Leftrightarrow \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ glatt für alle Karten φ_i auf M bzw. ψ_j auf N
- $N = \mathbb{R}$: "f glatte Funktion auf M", $f \in C^\infty(M)$
- f Diffeomorphismus $:\Leftrightarrow$ bijektiv, f^{-1} glatt

Der Tangentialraum

- Kurve durch $x \in M$ = glatte Abb. $f\colon (a,b) \to M$, $a < 0 < b$, $f(0) = x$
- $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists \varphi$ Karte mit $(\varphi \circ f_1)'(0) = (\varphi \circ f_2)'(0)$
- $T_x M$ Tangentialraum := Vektorraum aller Äquivalenzklassen, $f'(0) = \frac{d}{dt} f(t)|_{t=0}$ = Klasse von f
- Für $g\colon M \to \mathbb{R}$: $X[g] := (g \circ f)'(0) \in \mathbb{R}$ partielle Ableitung von g in x in Richtung $X := f'(0) \in T_x M$

Tangentialbündel und Vektorfelder

- Vektorfelder: $X\colon M \to TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$,
$$X_x \in T_xM, \quad \forall f \in C^\infty(M)\colon X_-[f] \in C^\infty(M)$$
- $\Gamma(TM) = C^\infty(M)$-Modul aller Vektorfelder

Satz

$X[-]$ *ist Derivation der* $\mathbb{R}$*-Algbera* $C^\infty(M)$,
$$X[fg] = X[f]g + fX[g],$$
alle Derivationen sind von dieser Form, und die Derivation charaktierisiert X *eindeutig*, $\Gamma(TM) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$.

- $[X, Y][-] = X[-] \circ Y[-] - Y[-] \circ X[-]$.

Das Differential

- $f\colon M \to N$ glatte Abb.
- $f_{*x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ Differential

$$g'(0) \mapsto (f \circ g)'(0)$$

  für $g\colon (a,b) \to M$
- Notation: $Y \to^f \tilde{Y} :\Leftrightarrow f_{*x}(Y(x)) = \tilde{Y}(f(x))$ für $Y \in \Gamma(TM)$, $\tilde{Y} \in \Gamma(TN)$. Ist f surjektiv, $f_* Y = \tilde{Y}$
- Sprich: $\tilde{Y}[g] \circ f = Y[g \circ f]$
- Ist auch $Z \to^f \tilde{Z}$, so $[Y,Z] \to^f [\tilde{Y},\tilde{Z}]$

Koordinatenvektorfelder

- $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ Karte,

$$(\partial_i)_x := \frac{d}{dt}\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i)|_{t=0}$$

- $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ ist Basis von $\Gamma(TU)$ als $C^\infty(U)$-Modul
- Auf $U \cap \bar{U}$,

$$a^i\partial_i = \bar{a}^j\bar{\partial}_j$$

mit

$$\bar{a}^j(x) = a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}(\bar{\varphi}^j \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(x)} \text{ oder } \bar{a}^j = a^i\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$$

$\rightsquigarrow$ Vektorfelder sind Tupel von Funktionen mit dieser Transformationseigenschaft

Vollständige Vektorfelder

- $Y \in \Gamma(TM)$ vollständig $:\Leftrightarrow \forall x \in M \exists f_x : \mathbb{R} \to M$ auf ganz $\mathbb{R}$ deifnierte Kurve durch x mit $f_x'(t) = Y_{f_x(t)}$ (gilt immer wenn kompakte randlose Mfk, f_x ist eindeutig nach Picard-Lindelöf)
- Dann $\varphi_t : M \to M$, $x \mapsto f_x(t)$ Einparametergruppe von Diffeomorphismen (Fluß von Y)
- Lieableitung von $g : M \to \mathbb{R}$ entlang Y in $x \in M$:

$$\frac{d}{dt} g(\varphi_t(x))|_{t=0} = Y_x[g]$$

- **Def** Lieableitung von $Z \in \Gamma(TM)$ entlang Y:

$$(L_Y Z)_x = \frac{d}{dt} \varphi_{t*}^{-1}(Z_{\varphi_t(x)})|_{t=0}$$

$L_Y Z$

- **Stz** $L_Y Z = [Y, Z]$
- **Bew** Sei $\varphi = \varphi_t \colon M \to M$ Fluß von Y, $\varphi_{*x} \colon T_x M \to T_{\varphi(x)} M$ Differential, $\tilde{Z} \in \Gamma(TM)$ mit

$$\varphi_* \tilde{Z} = Z \Leftrightarrow \varphi_{*x}(\tilde{Z}_x) = Z_{\varphi(x)} \Leftrightarrow \tilde{Z}_x = \varphi^{-1}_{*\varphi(x)}(Z_{\varphi(x)}).$$

  Dann ist $\frac{d}{dt}\tilde{Z}|_{t=0} = L_Y Z$
- Für $g \in C^\infty(M)$ gilt $\tilde{Z}[g \circ \varphi] \overset{(*)}{=} Z_{\varphi(-)}[g]$
- $\frac{d}{dt}$RHS von $(*)|_{t=0} = Y[Z[g]]$
- $\frac{d}{dt}$LHS von $(*)|_{t=0} = Z[Y[g]] + L_Y Z[g]$ (denke: $\tilde{Z} \approx Z + tL_Y Z$, $g \circ \varphi \approx g + tY[g]$)

Lieableitung in Koordinaten

- $Y = a^i \partial_i, Z = b^j \partial_j$ in Koordinaten
- Dann
$$[Y, Z] = (a^i \partial_i(b^j) - b^i \partial_i(a^j))\partial_j$$
- Beispiel: $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$, $Z = y\frac{\partial}{\partial x}$ auf $M = \mathbb{R}^2$

Tensorfelder, Differentialformen

- $T^{p,q}M := \bigcup_x T^{p,q}(T_xM)$
- 1-form $\alpha\colon M \to T^{0,1}M$, $x \mapsto \alpha_x \in T^{0,1}(T_xM)$ so daß $x \mapsto \alpha_x(Y_x) \in C^\infty(M)$ für $Y \in \Gamma(TM)$ gilt
- Tensorfeld $S\colon M \to T^{p,q}M$, $x \mapsto S_x \in T_x^{p,q}M$, für α^i, X_j 1-Formen bzw Vektorfelder gilt

$$S(\alpha^1, \dots, \alpha^p, X_1, \dots, X_q) \in C^\infty(M),$$

$\mathcal{T}^{p,q}(M) = \Gamma(T^{p,q}M)$ Raum aller Tensorfelder S

- k-Form $= S \in \mathcal{T}^{0,k}(M)$ mit $S_x \in \Lambda^k(T_xM)$, $\Lambda^k(M)$ Raum der k-Formen, $\wedge$ punktweise

Etwas Topologie

- abgeschlossene Mengen, Abschluß, offene Überdeckung, Kompaktheit
- Lokalkompakt: Jeder Punkt hat offene Umgebung mit kompaktem Abschluß (gilt auf Mfks!)
- M Hausdorff impliziert, daß kompakte Teilmengen abgeschlossen sind (nimm Punkt draußen und trenne von jedem drinnen mit einer offenen Teilmenge, endlich viele davon pberedecken die Teilmenge, nimm Durchschnitt der zugeörigen offenen Mengen um den draußen)
- Träger einer glaten Funktion

Zerlegungen der Eins

Definition

Zerlegunung der Eins = Menge $P \subset C^\infty(M)$ mit $\sum_{f \in P} f(x) = 1$ für alle $x \in M$. P ist einem Atlas $\{U_i\}$ untergeordnet, wnen $\forall f \in P \exists i : \mathrm{supp}(f) \subset U_i$

Theorem

Jedr Atlas besitzt eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

- Beweis: 2. Abzählbarkeitsaxiom: es ex. abzählbare Basis B_j der Topologie, und oBdA $\bar{B}_j$ kompakt (Basis = jede offene Menge ist Vereinigung von diesen, nimm in den abzählbar vielen Karten die offenen Kugeln mit rationalem Radius und Mittelpunkt).

Beweis weiter

- Wir konsturieren offene Überedeckung V_i von M mit $\bar{V}_j \subset V_{j+1}$: V_1 irgendein B_j, $\bar{V}_1$ kann durch endlich viele B_j überedeckt werden (Kompaktheit), V_2 Vereinigung dieser, weiter induktiv.
- Für gegebenees j und $x \in \bar{V}_{j+1} \setminus V_j \subset V_{j+2} \setminus \bar{V}_{j-1}$ wähle $U_i \ni x$, eine offene Menge $S \subset U_i \cap V_{j+2} \setminus \bar{V}_{j-1}$ und $f \in C^\infty(M)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset S$ und $f \equiv 1$ auf offener Menge $W_x \subset S$
- Kompaktheit $\Rightarrow$ endlich viele W_x überdekcen $\bar{V}_{j+1} \setminus V_j$ (variiere x über alle ihr Elemente), seien $f_1^j, \ldots, f_s^j$ die zugeh. Funktionen

Beweis weiter

- Jedes $y \in M$ ist in genau einem

  $$M_j := \bar{V}_j \setminus \bar{V}_{j-1} \subset V_{j+2} \setminus \bar{V}_{j-1} \subset M_{j+2} \cup M_{j+1} \cup M_j,$$

  also ex. höchstens enldich viele f_s^k mit $f_s^k(y) \neq 0$ $(k \in \{j, j-1, j-2\}) \Rightarrow$ wir können

  $$g_r^k(y) := f_r^k(y) / \sum_{j,s} f_s^j(y)$$

  definieren und die tuns. $\square$

k-Formen in Koordinaten

- $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ Karte
- $dx^i \in \Lambda^1(U)$ duale Basis zu ∂_j

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Lambda^k(U),$$

(Summation!) mit

$$\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}) \in C^\infty(U)$$

- Zerlegun der eins erlaubt uns oft oBdA in einer Karte zu arbeiten

Cartan's d kryptisch

Definition

$d\colon \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ “äußere Ableitung”

$$d\omega(X_1,\dots,X_{k+1})$$
$$= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}X_j[\omega(X_1,\dots,\hat{X}_j,\dots X_{k+1})+$$
$$\sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{k+1})$$

$X_1,\dots,X_{k+1} \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder

Insb.: $f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow df \in \Lambda^1(M)$, $df(X) = X[f]$,

Lokal

Theorem

Für ω wie auf vorletzter Seite (lokale Koordinaten) gilt

$$d\omega = \frac{1}{k!} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$

$$\frac{1}{k!} \partial_j \omega_{i_1 \dots i_k} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Corollary

$(\Lambda, \wedge, d)$ *ist DGA (differentiell graduierte Algebra)*

Beweis

- Die rechte Seite in der Definition von d ist $C^\infty(M)$-multilinear (Rechnung), also kann man die Aussage mit einer Zerlegung der Eins auf Karten runterdrücken und dann ausrechnen, wenn alle X_i Koordinatenvektorfelder sind, dann wirds leicht $\square$

Pull-back

Definition

Der Pullback von $\omega \in \Lambda^k(N)$ entlang $f\colon M \to N$ ist

$$f^*\omega(X_1, \ldots, X_k) := \omega(f_*X_1, \ldots, f_*X_k)$$

Satz

$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

Satz

f^* ist Morphismus von DGAs

Orietierungen

Definition

Orientierung $= \omega \in \Lambda^n(M)$, $n = \dim M$, mit $\omega_x \neq 0$ für alle $x\ inM$

Definition

Eine Karte $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ ist orientiert wenn $\varphi_i^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)$ und $\omega|_{U_i}$ gleich orientiert sind.

oBdA nehmen wir dies immer an (wenn nötig, vertausche zwei Koordinaten der Karte)

Integration

Definition

$V \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\beta = b dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, $\operatorname{supp}(b) \subset V$

$$\int_V \beta := \int_V b$$

$\omega \in \Lambda^n(M)$ mit kompaktem Träger, wähle dem orientierten Atlas untergeordnete Zerlegung der Eins $\{f_i\}$

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} \varphi_i^{-1*}(f_i \omega)$$

Ist alles wohldeifniert und tut, was es soll!

Stokes

Theorem

Hat $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ kompakter Träger , so ist

$$\int_M d\omega = 0$$

Allgemeiner gilt natürlich $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, aber wir waren zu faul, berandete Mannigfaltigkeiten zu definieren...
Beweis: oBdA M offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (additive Definition von $\int$), dann explizite formel von $d\beta$ und $\int_M \frac{\partial b}{\partial x^i} = 0$ verwenden $\square$

Integration und Pullbacks

Satz

Ist f orientierungserhaltend, so gilt
$\int f^*\omega = \int \omega$

Folgt direkt aus den Deifnition.
Wie ich es vertsehe: Die Transformationsformel ist in den Begirff des Integrals eingearbeitet, diese Deifnition ist von der Wahl der koordinaten unabhängig, daher sieht man ach Pullbacks nicht, die sozusagen eine Verallgemeinerung von Koordinatenwechseln sind

Semiriemannsche Mfk

Definition

Metrik, $*$, Volumenelement $\mu \in \Lambda^n(M)$ sind punktweise deifniert. Eine Mfk mit einer Metrik g heißt semiriemannsch.

$f \in C^\infty(M) \Rightarrow *f = f\mu, *(f\mu) = (-1)^g f$, $(-1)^g$ ist Fkt $M \to \{\pm 1\}$, aber galtt, somit lokal konstant

Definition

Kodiffernetial: $\delta\colon \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k-1}(M)$,

$$\delta\omega = -(-1)^g(-1)^{n(k+1)} * d * \omega$$

$(d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$ Laplaceoperator

Selbstadjungiertheit

Satz

M orientiert mit Metrik g und Volumenform μ, $\alpha \in \Lambda^k(M), \beta \in \Lambda^{k+1}(M)$, $\alpha \wedge *\beta$ kompakter Träger. Dann

$$\int_M g(\alpha, \delta\beta)\mu = \int_M g(d\alpha, \beta)\mu.$$

Beweis: Nach Stokes gilt

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge *\beta)$$

Jetzt Definition von δ einsetzen und Vorzeichenformel für $**$. $\square$

Korollar: Δ ist selbstadjungiert (modulo